

УДК 539.3

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

Э. К. Оганесян

К осесимметричной контактной задаче о взаимодействии упругого полубесконечного цилиндра с круглой шайбой малой толщины

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Б. Л. Абрамяном 28/IV 1988)

Основные результаты по исследованию контактных задач теории упругости для цилиндрических тел отражены в (1). В этом направлении укажем также на работы (2-6).

В настоящей работе рассматривается осесимметричная контактная задача о взаимодействии полубесконечного упругого цилиндра с упругой шайбой малой толщины.

Рассмотрим отнесенный к цилиндрической системе координат r, θ, z упругий полубесконечный цилиндр $\Omega = \{r = R, \pi = 0 < \pi, z \geq 0\}$ с осью Oz и радиуса R , обладающий модулем сдвига G_2 , торец $z=0$ которого концентрически подкреплен упругой круговой шайбой малой толщины h из упругого материала с модулем сдвига G_1 . Поверхность шайбы $z=-h$ нагружена тангенциальными напряжениями произвольной интенсивности, т. е.

$$\tau_{rz}|_{z=-h} = \tau_0(r), \quad \tau_z|_{z=-h} = 0 \quad (0 < r < R). \quad (1)$$

Определим тангенциальные контактные напряжения $\tau_{rz} = \tau(r)$ в зоне контакта, когда боковая поверхность цилиндра свободна от нагрузки.

Предположим, что шайба постоянной толщины $h \ll R$, полностью сцепленная с полубесконечным цилиндром на его торце $z=0$, нагружена симметричным образом и ее изгибная жесткость пренебрежимо мала, т. е. $D \approx 0$, где D — цилиндрическая жесткость шайбы на изгиб. Рассматривая равновесие элемента шайбы в цилиндрической системе координат и используя затем связь между компонентами напряжений и деформаций, придем к дифференциальному уравнению

$$\Delta_0 U_r = -(1-\nu^2)E^{-1}F_r; \quad \Delta_0 = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{1}{r^2}, \quad F_r = [\tau(r) - \tau_0(r)]/h. \quad (2)$$

Дифференциальное уравнение (2) должно рассматриваться при граничном условии

$$T(r)|_{r=0} = 0, \quad (3)$$

где $T(r)$ — растягивающие условия, действующие в срединной плос-

кости шайбы и выражающиеся через радиальное перемещение формулой

$$T(r) = 2hG \left| \frac{1}{1-\nu} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (rU_r) - \frac{U_r}{r} \right| \quad (0 < r < R).$$

Решая уравнение (2) методом вариации постоянных, получим

$$U_r = C_0 r + \frac{1-\nu}{4hGr} \int_0^r (\xi^2 - r^2) [\tau(\xi) - \tau_0(\xi)] d\xi \quad (0 < r < R). \quad (4)$$

На торце $z = 0$ имеем условие контакта

$$U_r^{(0)} = U_r^{(1)} \quad (0 < r < R) \quad (5)$$

и условия

$$\tau_{rz}(r, 0) = \tau(r), \quad \tau_z(r, 0) = 0 \quad (0 < r < R) \quad (6)$$

Здесь $\tau(r)$ — неизвестное тангенциальное контактное напряжение, подлежащее определению.

На боковой же поверхности цилиндра

$$\tau_{rz}(R, z) = 0, \quad \tau_z(R, z) = 0 \quad (0 < z < \infty). \quad (7)$$

Воспользовавшись известным представлением осесимметричной задачи теории упругости через функцию Лява (6), бигармоническую функцию Лява $\chi(r, z)$ представим в виде

$$\begin{aligned} \chi = & C_0 + E_0 Z + \sum_{k=1}^{\infty} (C_k + E_k Z) e^{-\mu_k z} J_0(\mu_k r) + \\ & + \int_0^{\infty} [A(\lambda) I_0(\lambda r) + B(\lambda) r I_1(\lambda r)] \cos \lambda z d\lambda \quad (0 < r < R, 0 < z < \infty), \end{aligned} \quad (8)$$

где $J_0(x)$ — функция Бесселя первого рода, а $I_0(x)$ и $I_1(x)$ — модифицированные функции Бесселя.

Подставляя (8) в известные соотношения (6), которые связывают компоненты напряжений и перемещений с функцией $\chi(r, z)$, и требуя, чтобы выполнялось второе условие (6), получим

$$C_k = (2\nu - 1) E_k \mu_k \quad (k = 0, 1, 2, \dots); \quad (9)$$

$$2GU_r(r, z) = \int_0^{\infty} [A(\lambda) I_1(\lambda r) + r B(\lambda) I_0(\lambda r)] \lambda^2 \ln \lambda z d\lambda +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k E_k J_1(\mu_k r) [2(1-\nu) - \mu_k z] e^{-\mu_k z},$$

$$2GU_z(r, z) = \int_0^{\infty} \left[\lambda A(\lambda) I_0(\lambda r) + B(\lambda) \left(-\lambda(1-\nu) I_0(\lambda r) + \right. \right.$$

$$\left. + \lambda r I_1(\lambda r) \right) \lambda \cos \lambda z d\lambda + \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k E_k J_0(\mu_k r) [2\nu - 1 - \mu_k z] e^{-\mu_k z}.$$

$$\tau_{rz}(r, z) = \int_0^\infty \left\{ I_0(\lambda r) \lambda r B(\lambda) + I_1(\lambda r) \lambda A(\lambda) + 2(1-\nu) E(\lambda) \right\} \times \\ \times \lambda^2 \cos \lambda z d\lambda + \sum_{k=1}^\infty e^{-\mu_k z} J_1(\mu_k r) \mu_k^2 E_k (\mu_k z - 1), \quad (0 < r < R, \quad 0 < z < \infty),$$

$$\sigma_r(r, z) = \int_0^\infty \left\{ I_0(\lambda r) [(1-2\nu)\lambda B(\lambda) + \lambda^2 A(\lambda)] + \right. \\ \left. + I_1(\lambda r) \left[\lambda^2 r E(\lambda) - \frac{\lambda}{r} A(\lambda) \right] \right\} \lambda \sin \lambda z d\lambda + \\ + \sum_{k=1}^\infty \left\{ \mu_k^2 J_0(\mu_k r) [2E_k - \mu_k E_k z] - \frac{\mu_k}{r} J_1(\mu_k r) [2(1-\nu)E_k - \mu_k E_k z] \right\} e^{-\mu_k z}.$$

Используя далее интегральное представление функций $e^{-\mu_k z}$ и $ze^{-\mu_k z}$ по функциям $\sin \lambda z$ и $\cos \lambda z$ (7), при помощи условия (7) после некоторых преобразований для определения $A(\lambda)$ и $B(\lambda)$ получим следующую систему уравнений:

$$B(\lambda) [(1-2\nu)I_0(\lambda R) + \lambda R I_1(\lambda R)] + A(\lambda) [\lambda I_0(\lambda R) - R^{-1} I_1(\lambda R)] = \\ = -4\pi^{-1} \sum_{k=1}^\infty \mu_k^2 E_k J_0(\mu_k R) / (\mu_k^2 + \lambda^2)^2; \quad (10)$$

$$B(\lambda) [\lambda R I_0(\lambda R) + 2(1-\nu)I_1(\lambda R)] + A(\lambda) \lambda I_1(\lambda R) = 0.$$

Теперь $A(\lambda)$ и $B(\lambda)$ определим из системы (10) и их выражения подставим в первое условие (6), а затем обе части полученного уравнения умножим на $r J_1(\mu_n r)$ и проинтегрируем от 0 до R . В результате будем иметь

$$\mu_n E_n = \frac{16}{\pi R J_0(\mu_n R)} \sum_{k=1}^\infty \mu_k^2 I_0(\mu_k R) E_k \int_0^\infty \frac{I_1^2(\lambda R)}{\Delta(\lambda)} \frac{\lambda^5 d\lambda}{(\mu_n^2 + \lambda^2)^2 (\mu_k^2 + \lambda^2)^2} - \\ - \frac{2}{R^2 \mu_n J_0^2(\mu_n R)} \int_0^R r \tau(r) J_1(\mu_n r) dr \quad (n=0, 1, 2, \dots). \quad (11)$$

Уравнения (11) должны рассматриваться вместе с условием контакта (5), которое принимает вид ($0 < r < R$)

$$G^{-1} \sum_{k=1}^\infty \mu_k E_k J_1(\mu_k r) = (1-\nu_2)^{-1} C_0 r + [4(1-\nu_2) G_1 h r]^{-1} (1-\nu_1) \int_0^r (\xi^2 - r^2) [\tau(\xi) - \\ - \tau_0(\xi)] d\xi. \quad (12)$$

Умножая далее (12) на $r J_1(\mu_n r)$, а затем интегрируя обе его части от 0 до R , после перехода к безразмерным координатам и величинам

$$x = r/b, \quad y = \xi/b, \quad \tau^*(y) = b\tau(by)/RG_2, \quad \tau_0^*(y) = b\tau_0(by)/RG_2;$$

$$L(x, y) = K(bx, by)/R, \quad E_n^* = \mu_n^2 E_n J_0(\mu_n R)/G_2, \quad H = (1-\nu_1)RG_1/8(1-\nu_2)G_2 h;$$

$$K(\xi, r) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k^{-1} J_0^{-2}(\mu_k R) J_1(\mu_k \xi) J_1(\mu_k r), \quad \lambda^* = 1/R, \quad \mu_k^* = \mu_k R, \quad C = -\frac{C_0}{2(1-\nu_1)}$$

получим

$$E_n^* = -4C + 4H J_0^{-1}(\mu_n^*) \mu_n^* \int_0^1 J_1(\mu_n^* x) dx \int_0^x (y^2 - x^2) |\tau^*(y) - \tau_0^*(y)| dy$$

$$n = (0, 1, 2, \dots). \quad (13)$$

При этом из граничного условия (3) легко найти, что

$$C = -2H(1+\nu_1) \int_0^1 |\tau^*(y) - \tau_0^*(y)| dy - NH \int_0^1 (y^2 - 1) |\tau^*(y) - \tau_0^*(y)| dy,$$

$$(N = (1-\nu_1^2)) \quad (14)$$

Производя далее интегрирование по частям интеграла в (13), после несложных преобразований будем иметь

$$E_n^* = 4C(N^{-1} - 1) + 8H(1+\nu_1)N^{-1} \int_0^1 |\tau^*(y) - \tau_0^*(y)| dy -$$

$$- 8H J_0^{-1}(\mu_n^*) \int_0^1 x J_0(\mu_n^* x) dx \int_0^x |\tau^*(y) - \tau_0^*(y)| dy. \quad (15)$$

Теперь, если неизвестное контактное напряжение $\tau^*(y)$ разложить по полной ортогональной системе $\{J_1(\mu_k^* y)\}_{k=1}^{\infty}$, т. е. положить

$$\tau^*(y) = \sum_{k=1}^{\infty} \delta_k J_1(\mu_k^* y) \quad (0 < y < 1),$$

то вместо (15) будем иметь

$$E_n^* - D_n^* \delta_n = \gamma + G_n \quad (n = 1, 2, \dots), \quad (16)$$

$$D_n^* = 4H J_0(\mu_n^*) / \mu_n^*;$$

$$\gamma = 8H(1+\nu_1)N^{-1} \sum_{k=1}^{\infty} (\mu_k^*)^{-1} \delta_k [J_0(\mu_k^*) - 1] + 4C(N^{-1} - 1);$$

$$G_n = D_n^* \delta_n^0 - 8H(1+\nu_1)N^{-1} \sum_{k=1}^{\infty} (\mu_k^*)^{-1} \delta_k^0 [J_0(\mu_k^*) - 1].$$

После перехода к безразмерным величинам (11) можно представить в форме

$$E_n^* + \sum_{k=1}^{\infty} A_{kn} E_k^* + B_n \delta_n = 0; \quad (17)$$

$$\delta_n = 2J_0^{-1}(\mu_n^*) \int_0^1 x J_1(\mu_n^* x) \tau(x) dx; \quad B_n = J_0(\mu_n^*);$$

$$A_{kn} = -16\pi^{-1}\nu_n^* \int_0^\infty \Delta_0^{-1}(\lambda^*) I_1^2(\lambda^*) \lambda^{n-2} (\nu_n^{*2} + \lambda^{*2})(\nu_n^{*2} + \lambda^{*2})^2 d\lambda^*; \\$$

$$\Delta_0(\lambda^*) = R\Delta(\lambda) = \lambda^{*2} [I_0^2(\lambda^*) - I_1^2(\lambda^*)] - 2(1 - \nu_2) I_1^2(\lambda^*).$$

Таким образом, поставленная задача свелась к решению системы из двух алгебраических систем (16) и (17). Исключая из этой системы k_n^* , для определения $\{\gamma_n\}_{n=1}^\infty$, получим одну бесконечную систему, которая после введения новой неизвестной

$$X_n = (D_n^* + B_n) \delta_n / \nu_n^{1/2} \quad (n=1, 2, \dots)$$

принимает вид

$$X_n = \nu_n^{1/2} \sum_{k=1}^\infty A_{kn} D_k^* \nu_k^{1/2} (D_k^* + B_k)^{-1} \gamma_k = \nu_n^{-1/2} a_n, \quad (18)$$

$$a_n = -\gamma - G_n - \sum_{k=1}^\infty A_{kn} (\gamma + G_k) \quad (n=1, 2, \dots).$$

Для исследования бесконечной алгебраической системы (18) можно показать, что

$$D_k^* (D_k^* + B_k)^{-1} = (1 - \gamma_0 \nu_k)^{-1} \quad (\gamma_0 = 1/8H),$$

$$S_n = \sum_{k=1}^\infty |A_{kn}| \nu_k^{1/2} (D_k^* + B_k)^{-1} = O(\nu_n^{-1})$$

$$\nu_n^{-1/2} a_n \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty),$$

откуда вытекает ее квазиполная регулярность.

Институт механики
Академии наук Армянской ССР

Է. Ղ. ՀՈՎԱՆՆԻՍՅԱՆ

Փոխ հաստոյրյան շրջանաձև տափօղակի և կիսաանվերջ գլանի փոխադրելիւթյան վերաբերյալ առանցքահամաչափ կոնտակտային խնդրի մասին

Դիտարկվում է առանցքահամաչափ բոռի փոխանցման կոնտակտային խնդիր բարակապատ շրջանաձև առաձգական տափօղակից հավասար շառավիղ ունեցող կիսաանվերջ գլանին, որի կողմնային մակերևույթը ազատ է ճիգերից: Տափօղակը համակենտրոն ձևով ամրակցված է առաձգական գլանին, վերջինիս հատույթի մակերևույթը ենթադրվում է, որ տափօղակի ծոման հոշտույթյունը արհամարելի փոքր է: Խնդիրը բերվում է քվազիլիոզին ուղղվար հանրահաշվական անվերջ համակարգի լուծման:

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ Развитие теории контактных задач в СССР, Наука, М., 1976. ² Б. Л. Абрамян, ДАН АрмССР, т. 19, № 1, с. 3—12 (1954). ³ В. Т. Гринченко, ПМ, т. 1, № 1, с. 109—119 (1965). ⁴ А. В. Белоконов, Е. П. Маликов, Изв. АН АрмССР. Механика, т. 35, № 2, с. 17—26 (1982). ⁵ Э. К. Оганесян, ДАН АрмССР, т. 75, № 1, с. 30—35 (1982). ⁶ И. Н. Снеддон, Преобразование Фурье, ИЛ, М., 1955. ⁷ И. С. Градштейн, И. М. Рыжик, Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, Наука, М., 1971. ⁸ В. М. Александров, С. М. Мхитарян, Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками, Наука, М., 1983.