ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXXIII 1986 2

МАТЕМАТИКА

УДК 515.1

А. В. Архангельский, Н. Э. Мирзаханян

О топологически однородных пространствах со свойством Бэра, являющихся непрерывными образами σ-компактных групп

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. А. Александряном 4/III 1986)

В статье рассматриваются топологические инварианты (прежде всего кардинальные) топологически однородных пространств со свойством Бэра, являющихся непрерывными образами σ-компактных групп, в частности, свободных топологических групп компактов, подчиненных тем или иным условиям.

Полученные результаты применимы при решении более специального и естественного вопроса: какими свойствами обладают топологически однородные пространства со свойством Бэра, на которых непрерывно и транзитивно действует σ-компактная группа?

Топологическая группа G называется σ-компактной, если она представима в виде объединения счетного семейства компактных подпространств.

Говорят, что пространство X обладает свойством Бэра, если пересечение всякого счетного семейства открытых всюду плотных в нем множеств всюду плотно.

Пространство X называется топологически однородным, если для любых $x, y \in X$ существует гомеоморфизм $f: X \to X$ такой, что $f(x) = y$ и $f(X) = X$.

Все пространства предполагаются тихоновскими.

Мы пользуемся обозначениями и терминологией из [1].

Через $F(X)$ обозначаем свободную топологическую группу пространства X[2].

П р е д л о ж е н и е 1. Пусть топологически однородное пространство со свойством Бэра является непрерывным образом σ-компактной группы $G = \bigcup\{K_n : n \in N^+\}$. Тогда Y локально компактно.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $f: G \to Y$ непрерывное отображение σ-компактной группы $G = \bigcup\{K_n : n \in N^+\}$ на топологически однородное пространство Y со свойством Бэра. Каждое $f(K_n)$ как непрерывный образ компакта K_n является компактом и замкнуто в Y. Пространство Y обладает свойством Бэра, поэтому найдутся открытое в Y множество U и номер $n^* \in N^+$, для которого $\overline{U} \subset f(K_{n^*})$. Так ка $\overline{U}$—замкнутое подпространство компакта $f(K_{n^*})$, то $\overline{U}$ компактно.

Так как Y однородно, то Y локально компактно.

П р е д л о ж е н и е 2. Пусть топологически однородное пространство со свойством Бэра является непрерывным образом σ-компактной группы $G=\bigcup\{K_n : n\in N^+\}$ и пусть $t(K_n)\leqslant\tau$ для всякого $n\in N^+$. Тогда $t(Y)\leqslant\tau$.

Доказательство. Пусть $f: G\to Y$—непрерывное отображение σ-компактной группы $G=\bigcup\{K_n : n\in N^+\}$ на топологически однородное пространство Y со свойством Бэра. Пространство Y обладает свойством Бэра, поэтому найдутся открытое в Y множество U и номер $n^*\in N^+$, для которого $\overline{U}\subset f(K_{n^*})$. Так как f отображает K_{n^*} на $f(K_{n^*})$ замкнуто, а $t(K_{n^*})\leqslant\tau$, то $t(f(K_{n^*}))\leqslant\tau$. Так как $\overline{U}$ замкнутое подпространство $f(K_{n^*})$, то $t(\overline{U})\leqslant\tau$. Следовательно, $t(U)\leqslant\tau$.

Итак, в Y есть непустое открытое множество, теснота которого не превосходит τ. Так как Y однородно, это означает, что теснота всего пространства Y не превосходит τ.

Следствие 1. Пусть топологически однородное пространство Y со свойством Бэра является непрерывным образом пространства $F(X)$, где X—компакт счетной тесноты. Тогда теснота Y счетна.

Определение 1 ([2]). Пространство X называется монолитным, если для любого $A\subset X$ $nw(\overline{A})\leqslant|A|$.

Предложение 3. Пусть топологически однородное пространство со свойством Бэра является непрерывным образом σ-компактной группы $G=\bigcup\{K_n : n\in N^+\}$ и пусть K_n монолитно для каждого $n\in N^+$. Тогда Y монолитно.

Доказательство. Пусть $f: G\to Y$ непрерывное отображение σ-компактной группы $G=\bigcup\{K_n : n\in N^+\}$ на топологически однородное пространство Y со свойством Бэра. Так как Y—пространство со свойством Бэра, то найдутся открытое в Y множество U и номер $n^*\in N^+$, для которого $\overline{U}\subset f(K_{n^*})$. Каждый компакт $f(K_n)$ монолитен в Y и $\overline{U}$ монолитно в Y (это вытекает из того, что монолитность сохраняется при переходе к замкнутому пространству и непрерывных отображениях компактов).

Так как Y однородно, имеем, что для каждой точки $y\in Y$ существует такая окрестность U_y точки y, что U_y монолитно в Y, т. е. пространство Y локально монолитно.

Монолитность пространства Y вытекает из следующего предложения.

Предложение 4. Линделёфово локально монолитное пространство монолитно.

Доказательство. Пусть пространство Y локально монолитно, т. е. для каждой точки $y\in Y$ пусть существует такая окрестность U_y точки y, что U_y монолитно в Y. Так как пространство Y линделёфово, имеем $Y=\bigcup\{U_{y_n} : n\in N^+\}$ для некоторого счетного подмножества $\{y_n : n\in N^+\}\subset Y$. Без ограничения общности можно считать, что семейство $\{U_{y_n} : n\in N^+\}$ локально конечно, ибо Y паракомпактно как регулярное линделефовое пространство.

Для любого подмножества $A\subset Y$ имеем $A=\bigcup\{(A\cap U_{y_n}) : n\in N^+\}$, $\overline{A}=\bigcup\{\overline{(A\cap U_{y_n})} : n\in N^+\}$. Так как U_{y_n} монолитно в Y для каждого $n\in$

$\in N^{+}$, то $n\varpi(\overline{A\cap U_{y_n}})\leqslant|A\cap U_{y_n}|\leqslant|A|$ для каждого $n\in N^{+}$. Следовательно, $n\varpi(\overline{A})\leqslant|A|$.

Следствие 2. Пусть топологически однородное пространство Y со свойством Бэра является непрерывным образом пространства $F(X)$, где X—монолитный компакт. Тогда Y монолитно.

Теорема 1. Пусть топологически однородное пространство со свойством Бэра является непрерывным образом σ-компактной группы G, порожденной (алгебраически) монолитным компактом счетной тесноты. Тогда Y—пространство со счетной базой.

Доказательство. В силу предложения 1 пространство Y локально компактно, а в силу предложений 2 и 3 Y—монолитное пространство счетной тесноты.

Известно, что в локально компактном монолитном пространстве счетной тесноты существует хотя бы одна точка счетного характера (см. (1)). Так как Y однородно, это означает, что пространство Y удовлетворяет первой аксиоме счетности.

Теорема В. В. Успенского (см. (3)) утверждает, что если Y является непрерывным образом σ-компактной топологической группы, то $n\varpi\{y\in Y:\chi(y,Y)\leqslant\aleph_0^{*}\}\leqslant\aleph_0$. Следовательно, $\varpi(Y)=n\varpi(Y)\leqslant\aleph_0$.

Следствие 3. Пусть топологически однородное пространство Y со свойством Бэра является непрерывным образом пространства $F(X)$, где X—монолитный компакт счетной тесноты. Тогда Y—пространство со счетной базой.

Теорема 2. Пусть топологически однородное пространство Y со свойством Бэра является непрерывным образом σ-компактной группы G и пусть Y монолитно и имеет счетную тесноту. Тогда пространство Y обладает счетной базой.

Доказательство теоремы 2 в основных чертах повторяет доказательство теоремы 1.

Теорема 3. Пусть топологически однородное пространство Y счетной тесноты со свойством Бэра является непрерывным образом σ-компактной группы G счетной тесноты. Тогда пространство Y сепарабельно.

Доказательство. Пространство Y локально компактно (предложение 1). Кардинал $\aleph_1^{**}$ является калибром пространства Y (см. (3)). По теореме Шапировского (см. (4)) отсюда, из $t(Y)\leqslant\aleph_0$ и того, что Y локально компактно, следует, что пространство Y сепарабельно.

Московский государственный университет

Ա. Վ. ԱՐԽԱՆԳԵԼՍԿԻ, Ն. Է. ՄԻՐԶԱԽԱՆՅԱՆ

σ-կոմպակտ խմբերի անընդհատ պատկերներ հանդիսացող Բերի հատկությունով օժտված տոպոլոգորեն համասեռ տարածությունների մասին

Հոդվածում դիտարկվում են σ-կոմպակտ խմբերի (մասնավորապես,

* $\aleph_0$—алеф-ноль

** $\aleph_1$—алеф-один

կոմպակտների ազատ տոպոլոգիական խմբերի) անընդհատ պատկերներ հանդիսացող Բերի հատկությունով օժտված տոպոլոգորեն համասեռ տոպոլոգիական տարածությունների տոպոլոգիական ինվարիանտները։

Աշխատանքում ստացված արդյունքները կիրառելի են ավելի բնական և հատուկ հարցի լուծման դեպքում. ինչպիսի հատկություններով են օժտված Բերի հատկությունով տոպոլոգորեն համասեռ տարածությունները, որոնց վրա անընդհատ և տրանզիտիվ գործում է σ-կոմպակտ տոպոլոգիական խումբը։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *А. В. Архангельский*, УМН, т. 33, № 6 (1978). [2] *А. В. Архангельский*, УМН, т. 36, № 3 (1981). [3] *В. В. Успенский*, ДАН СССР, т. 285, № 4 (1985). [4] *Б. Э. Шапировский*, Уч. зап. Рижского ун-та, т. 3, с. 88—89 (1976).