ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
LXXX 1985 3

УДК 517.55

МАТЕМАТИКА

А. И. Петросян

Множества пика классов гладких функций в строго псевдовыпуклой области

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 26/XI 1983)

Пусть D—строго псевдовыпуклая область с регулярной границей в пространстве C^n, т. е.

$$D=\{z\in C^n : \rho(z)<0\},$$

где вещественнозначная бесконечно дифференцируемая функция $\rho(z)$ определена в некоторой окрестности замыкания области $\overline{D}$ и комплексный гессиан

$$\sum_{l,k=1}^{n}\frac{\partial^2\rho(z)}{\partial z_l\partial\bar{z}_k}w_l\bar{w}_k$$

положительно определен при всех $z\in\partial D$. Обозначим через $A^k(D)$ класс функций, голоморфных в D, у которых все производные до k-го порядка непрерывны на $\overline{D}$. Подмногообразие M на границе ∂D области называется многообразием пика для $A^k(D)$, если для каждого компакта $K\subset M$ существует функция $f\in A^k(D)$ (функция пика) такая, что $f(z)=1$ при $z\in K$ и $|f(z)|<1$ при $z\in\overline{D}\setminus K$. Очевидно, это условие можно заменить на

$$f(z)=0 \text{ при } z\in K \text{ и } \mathrm{Re} f(z)>0 \text{ при } z\in\overline{D}\setminus K. \quad (1)$$

В работе Г. М. Хенкина и А. Е. Туманова ([1]) показано, что многообразие пика M для $A(D)=A^0(D)$ в каждой точке $z\in M$ должно удовлетворять условию

$$T_z(M)\subset T_z^c(\partial D). \quad (2)$$

Здесь $T_z(M)$—пространство, касательное к M в точке z, $T_z^c(\partial D)$—комплексное касательное пространство к ∂D в точке z, т. е.

$$T_z^c(\partial D)=\left\{\zeta\in C^n : \sum_{k=1}^{n}\zeta_k\frac{\partial\rho(z)}{\partial z_k}=0\right\}.$$

В той же работе доказано, что если M принадлежит классу гладкости C^3, то условие (2) является и достаточным, чтобы M было многообразием пика для $A(D)$. Впоследствии в работе У. Рудина ([2]) условие на M было ослаблено: достаточно, чтобы M принадлежало C^1. Случай $A^\infty(D)$ исследован в ([3]) и ([4]).

Настоящая работа посвящена исследованию многообразий пика для $A^k(D)$, $2\leqslant k<\infty$. Доказано следующее утверждение:

Теорема 1. *Если подмногообразие M класса $C^k (k \geqslant 3)$ на границе строго псевдовыпуклой области D в каждой точке $z \in M$ удовлетворяет условию (2), то M является многообразием пика для $A^{k-1}(D)$.*

При доказательстве используется схема, примененная в [1] и [3]. Для заданного компакта $K \subset M$ сперва строится так называемая „почти аналитическая" функция пика $F(z)$.

Теорема 2 (см. [1], а также [4]). *Пусть M—то же, что в теореме 1, K—компакт на M. Тогда в некоторой окрестности Ω этого компакта существует функция $F(z)$, $F \in C^k(\Omega)$, такая, что*

а) $F(z)=0$ *тогда и только тогда, когда* $z \in K$;

б) $\bar\partial F=0$ *на* M, *более того,* $\bar\partial F(z)=o(d(z, M)^{k-1})$, *где* $d(z, M)$—*расстояние между* z *и* M;

в) $\operatorname{Re} F(z) \geqslant c d(z, M)^2$ *при* $z \in \bar D \cap \Omega$. *Здесь* c—*константа, зависящая только от области* D;

г) $\operatorname{grad} \operatorname{Re} F(z) = -\frac{\chi_z}{\|\chi_z\|^2}$, $\operatorname{grad} \operatorname{Im} F(z) = -\frac{\tau_z}{\|\tau_z\|^2}$, *где* $\chi_z = \operatorname{grad} \rho(z)$,

$$\tau_z = i\chi_z.$$

Пусть функция $\lambda(z) \in C^\infty(\Omega)$ финитна в Ω, $\lambda(z)=1$ в некоторой окрестности компакта K и $0 \leqslant \lambda(z) \leqslant 1$. Рассмотрим форму $g(z)=\bar\partial \frac{\lambda(z)}{F(z)}$.

Лемма. *Уравнение $\bar\partial u=g$ в области D имеет решение $u(z)$, бесконечно дифференцируемое на множестве $\bar D \setminus M$ и удовлетворяющее оценке*

$$D^p u(z) = o(d(z, M)^{k-|p|-3}). \tag{3}$$

Здесь $p=(p_1, \ldots, p_{2n})$—целочисленный вектор, $|p|=\sum_{k=1}^{2n} p_k$ и

$$D^p u(z) = \frac{\partial^{|p|} u(z)}{\partial z_1^{p_1} \ldots \partial z_n^{p_n} \cdot \partial \bar z_1^{p_{n+1}} \ldots \partial \bar z_n^{p_{2n}}}.$$

Решение $u(z)$, допускающее оценку (3), выписывается явной формулой, полученной в [5]:

$$u(z) = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \left\{ \int_{\partial D \times [0,1]} g(\zeta) \wedge \omega'(\eta) \wedge \omega(\zeta) - \int_D g(\zeta) \wedge \omega' \left(\frac{\bar\zeta - \bar z}{|\zeta - z|^2} \right) \wedge \omega(\zeta) \right\},$$

где $\omega'(\eta) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \eta_k d\eta_1 \wedge \ldots \wedge d\eta_{k-1} \wedge d\eta_{k+1} \wedge \ldots \wedge d\eta_n$,

$$\omega(\zeta) = d\zeta_1 \wedge \ldots \wedge d\zeta_n, \quad \eta_k = (1-t) \frac{\bar\zeta_k - \bar z_k}{|\zeta - z|^2} + t \cdot \frac{P_k(\zeta, z)}{\Phi(\zeta, z)},$$

$\Phi(\zeta, z)$—ядро Хенкина — Рамиреца и $\sum_{k=1}^{n} (\zeta_k - z_k) P_k(\zeta, z) \equiv 1$. Оценка (3) основана на том, что форма

$$g = \bar\partial \frac{\lambda}{F} = \frac{1}{F} \bar\partial \lambda - \lambda \frac{\bar\partial F}{F^2}$$

бесконечно дифференцируема на $\bar D \setminus M$, а при подходе к M имеет степенной рост. А именно, из б)—г) следует, что $g(z)=o(d(z, M)^{k-5})$ при $z\to M$ вдоль комплексного касательного направления и $g(z)=o(d(z, M)^{k-3})$ при $z\to M$ вдоль комплексной нормали, т. е. плоскости векторов χ и τ.

Доказательство теоремы 1. Пусть $K\subset M$, функции $F(z)$ и $u(z)$ те же, что в теореме 2 и лемме. Рассмотрим функцию

$$v(z)=\frac{\lambda(z)}{F(z)}-u(z).$$

Имеем $\bar\partial v=\bar\partial\frac{\lambda}{F}-\bar\partial u=g-\bar\partial u=0$, т. е. $v(z)$ голоморфна в области D. Далее,

$$\operatorname{Re} v=\lambda\frac{\operatorname{Re}F}{|F|^2}-\operatorname{Re}u. \tag{4}$$

Из (3) при $k>3$ и $p=0$ следует, что $u(z)=o(d(z, M))$, т. е. $u(z)$ ограничена на $\bar D$. Поэтому с учетом в) и (4) имеем

$$\operatorname{Re} v(z)\geqslant-\max_{z\in\bar D}\operatorname{Re}u(z)>-\infty.$$

Добавив в случае необходимости к функции $u(z)$ соответствующую константу, можно предположить, что

$$\operatorname{Re} v(z)>0,\quad z\in\bar D\setminus K. \tag{5}$$

Покажем, что функция

$$f(z)=\frac{1}{v(z)}=\frac{F(z)}{\lambda(z)-u(z)F(z)} \tag{6}$$

является искомой функцией пика для компакта K. Прежде всего, $f(z)$ голоморфна в D и, как следует из (5), $\operatorname{Re}f(z)>0$ при $z\in\bar D\setminus K$. Из (6) следует, что нули $f(z)$ совпадают с нулями $F(z)$, т. е. с множеством K (см. а)). Таким образом, f удовлетворяет условиям (1). Остается показать, что $f\in A^{k-1}(D)$. Функция f на множестве $\bar D\setminus K$ принадлежит классу C^k, поэтому проверять непрерывность D^pf ($|p|\leqslant k-1$) следует лишь в окрестности K, где имеем

$$f(z)=\frac{F(z)}{1-u(z)F(z)}.$$

Взяв для простоты случай $p=(k-1, 0, \ldots, 0)$, получаем

$$D^pf=\sum_{m=0}^{k-1}\sum_{j=0}^{m}\frac{(-1)^{m+1}m!}{(1-uF)^{m+1}}C_{k-1}^{m}C_m^{j}D^{k-1-m}F\cdot D^{m-j}F\cdot D^{j}u. \tag{7}$$

Из оценок (3) следует, что при $j<k-2$ D^ju непрерывны на $\bar D$. А те слагаемые в (7), которые содержат $D^{k-2}u$ или $D^{k-1}u$, имеют соответствующие сомножители F и F^2, которые „гасят" рост этих производных.

Ереванский государственный университет

Ա. Ի. ՊԵՏՐՈՍՅԱՆ

Պիկի բազմությունները խիստ պսևդոուռուցիկ տիրույթում ողորկ ֆունկցիաների դասերի համար

Դիցուք D-ն խիստ պսևդոուռուցիկ տիրույթ է C^n տարածության մեջ, M-ը նրա ∂D եզրի վրա ենթաբազմաձևություն է, որը յուրաքանչյուր $z \in M$ կետում բավարարում է $T_z(M) \subset T_z^c(\partial D)$ պայմանին։

Այստեղ $T_z(M)$-ը M բազմաձևության շոշափող տարածությունն է, իսկ $T_z^c(\partial D)$-ն ∂D-ի կոմպլեքս շոշափող տարածությունն է z կետում։

$A^k(D)$-ով նշանակվում է D-ում հոլոմորֆ և $\bar{D}$-ում մինչև k-րդ կարգի անընդհատ ածանցյալներ ունեցող ֆունկցիաների դասը։

Հոդվածում ապացուցվում է, որ եթե M-ը պատկանում է C^k դասին, ապա կամայական $K \subset M$ կոմպակտ բազմություն հանդիսանում է պիկի բազմություն $A^{k-1}(D)$-ի համար։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *G. M. Henkin, A. E. Tumanov,* C. R. Ecole d'été à Drogobytch, 1974. [2] *W. Rudin,* Pacific J. Math., v. 75 267—279 (1978). [3] *M. Hakim, N. Sibony,* Duke Math. J. v. 45, 601—617 (1978). [4] *J. Chaumat, A. M. Chollet,* Ann. Inst. Fourier, v. 29, 171—200 (1979). [5] *Г. М. Хенкин,* Мат. сб., т. 82, № 2 (1970).