

УДК 519.876.3

МАТЕМАТИКА

Г. Г. Мартиросян

О некоторых оптимизационных задачах для систем с неравномерным износом

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. Р. Варшамовым 16/IX 1983)

Рассматривается задача (5) из ⁽¹⁾. Функции $b_i(t)$ предполагаются непрерывными, строго возрастающими, неотрицательными на $[0, \infty)$ и положительными на $(0, \infty)$. Сохраняются все определения и обозначения, данные в ^(1,2).

Рассмотрим класс расписаний для задачи (5) ⁽¹⁾, имеющих не более $(s-1)$ -ой перестановки деталей.

Определение 1. Расписания ρ и ρ' называются подобными, если последовательность $\beta_j^1, \beta_j^2, \dots, \beta_j^s$ расписания ρ совпадает с соответствующей последовательностью расписания ρ' для $j=1, 2, \dots, n$.

Ясно, что подобие задает на множестве расписаний с $(s-1)$ -ой перестановкой отношение эквивалентности с числом классов эквивалентности $r_s \leq s^n$. Для каждого такого класса K , рассмотрим оптимизационную задачу

$$\begin{cases} T_s \rightarrow \max \\ z_l(\rho) \geq 0 \end{cases} \quad l=1, 2, \dots, n, \quad \rho \in K. \quad (1)$$

Пусть $T_{s_n}^*$ — решение такой задачи. Обозначим $T_s^* = \max T_{s_n}^*$ и рассмотрим последовательность $T_1^*, T_2^*, \dots, T_i^*, \dots$. Ясно, что если T_0 — решение задачи (5) ⁽¹⁾, то $\forall_i T_i^* \leq T_0$, а если $j < i$, то $T_j^* < T_i^*$. Возникает вопрос, существует ли такое i_0 , что для $j \geq i_0$ $T_j^* = T_0$?

Для ответа на него понадобится

Лемма 1. Пусть q_1 — решение уравнения $\int_0^x b_1(t) dt = 1$. Тогда для всякого $T \leq q_1$ существует расписание ρ такое, что $T(\rho) = T$ и $z_i(\rho) = z_j(\rho)$ $i, j=1, 2, \dots, n$. Доказательство проводится индукцией по n аналогично доказательству нижеследующей теоремы 1, ввиду чего мы его не приводим.

Теорема 1. Существует $i_0 \leq 2^n - 1$ такое, что для любого $j \geq i_0$ $T_j^* = T_0$.

Доказательство. Согласно лемме 2 ⁽¹⁾ достаточно показать существование расписания ρ с числом перестановок не большим $2^{n-1} - 1$, такого, что $z_i(\rho) = 0$ $i=1, 2, \dots, n$. При $n=2$ теорема сразу следует из теоремы 3 ⁽¹⁾. Пусть теорема верна для $n=1, 2, \dots, (i-1)$. Покажем ее справедливость при $n=i$. Рассмотрим следующее расписание ρ : 1-ая деталь работает на месте A_1 время $T' \leq q_1$, а затем

на месте A_n до полного износа. 2, 3, ..., i -ая детали работают до момента T' на местах $A_2, A_3, \dots, A_i$ по расписанию ρ' , построенному по лемме 1, а затем на местах $A_1, \dots, A_{i-1}$ по расписанию ρ'' такому, что $z_j(\rho') + z_j(\rho'') = 0$ (его существование утверждается предположением индукции). Пусть $T^*(T')$ — момент полного износа 1-ой детали, а $T^{**}(T')$ — момент полного износа остальных деталей (если $T' = q_1$, то 2, 3, ..., i -ая детали работают на местах $A_2, \dots, A_i$ до полного износа). Рассмотрим функцию $\omega(T') = T^*(T') - T^{**}(T')$. Она непрерывна по теореме о неявных функциях на интервале $[0, q_1]$. $\omega(0) > 0$, $\omega(q_1) < 0$, поэтому существует $T' \in (0, q_1)$, такое, что $\omega(T') = 0$. Соответствующее этому T' расписание ρ будет искомым.

Теорема 1 явно задаст класс подобия оптимального расписания ρ , а для нахождения моментов перестановок задает систему 2^{n-1} уравнений с 2^{n-1} неизвестными и гарантирует ее разрешимость в множестве положительных чисел.

Рассмотрим случай $b_i(t) = x_i(t) + \beta$, часто встречающийся в реальных условиях. Пусть D — следующий определитель:

$$D = \begin{vmatrix} x_1 - x_2 & x_2 - x_3 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & x_{n-1} - x_n \\ x_2 - x_3 & x_3 - x_4 & & & & & & x_n - x_1 \\ \cdot & \cdot & & & & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & & & & \cdot \\ x_{n-1} - x_n & x_n - x_1 & & & & & & x_{n-3} - x_{n-2} \end{vmatrix}$$

Теорема 2. Для $b_i(t) = \alpha_i t + \beta$ при $D \neq 0$ существует оптимальное расписание ρ , содержащее $(n-1)$ -ю перестановку.

Доказательство. Зададим параметры β_i^j расписания σ следующим образом: $\beta_i^j = (j+i-1) \bmod n$. Согласно лемме 2 ⁽¹⁾ и замечанию к ней достаточно показать существование положительного решения системы

[illegible]

Пусть $D_i(a_1, \dots, a_{n-1})$ — определитель D , в котором i -ый столбец заменен столбцом $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{pmatrix}$.

Решая уравнение (6) ⁽¹⁾, найдем значение переменной T_n . Подставляя это значение (см. теорему 4 ⁽²⁾) в (2) и исключая из (2) последнее уравнение, получим систему линейных уравнений относительно переменных $y_i = T_i''$, решение которой y_i запишем в виде

$$y_i = \frac{D_i(2 - x_n T_n^2 - 2\beta T_n, 2 - x_1 T_n^2 - 2\beta T_n, \dots, 2 - x_{n-2} T_n^2 - 2\beta T_n)}{D};$$

после некоторых преобразований получаем $T_1 = T_n \sqrt{\frac{i}{n}}$, что доказывает теорему.

Теорему 2 можно распространить на случай $b_i(t) = \alpha_i t^m + \beta$ небольшим видоизменением доказательства.

Для задачи (5) ⁽¹⁾ при произвольных функциях $b_i(t)$ получена также

Теорема 3. При $n=3$ существует оптимальное для (5) ⁽¹⁾ расписание с двумя перестановками.

Доказательство не приводим ввиду громоздкости.

Рассмотрим теперь другое обобщение задачи (2) ⁽²⁾. Пусть $z_j^i(t)$ — та доля детали j , которая износилась к моменту t при работе по расписанию ρ . Будем предполагать, что скорость износа j -ой детали, работающей в момент t на месте A_i , зависит лишь от номера i и величины $z_j^i(t)$. Для каждого i существует функция $\bar{b}_i(\cdot)$, определенная, непрерывная, строго возрастающая на $[0, 1]$ и положительная на $(0, 1)$ такая, что скорость износа детали, работающей по расписанию ρ в момент t на месте A_i , равна $\bar{b}_i(z_j^i(t))$. Предположим, что деталь обрабатывается только на одном месте A_i . Можно вычислить $B_i(t)$ — долю детали, изношенную за время t . Мы будем считать, что нам заданы лишь функции $b_i(t) = \bar{b}_i(B_i(t))$. Пусть j -ая деталь при работе по расписанию ρ в момент t_0 поступает на место A_i . Пусть также $b_j^i(t_0)$ — скорость износа j -ой детали в момент t_0 . Тогда $b_j^i(t_0) = b_i(x)$, где x — корень уравнения $\int_0^x b_i(t) dt = z_j^i(t_0)$. Если j -ая деталь покидает место A_i в момент t'_0 , то $b_j^i(t_0 + \Delta t) = b_i(x + \Delta t)$ для $\Delta t \leq t'_0 - t_0$. Теперь если $z_i(\rho) = 1 - z_i^i(T(\rho))$, а P^{**} — множество всех расписаний в смысле ⁽²⁾, то задача формулируется так:

$$\begin{aligned} & | T(\rho) \rightarrow \max \\ & | \rho \in P^{**} \end{aligned} \quad (3)$$

Определение 2. Расписание ρ называется квазиоптимальным, если в момент $T(\rho)$ для $j=1, 2, \dots, n$ $z_j^i(T(\rho)) = 1$.

Теорема 4. Существует квазиоптимальное расписание с числом перестановок $2^{n-1} - 1$.

В доказательстве используются в основном идеи доказательства теоремы 1. Определяется класс подобия расписания ρ и система уравнений, совместная в множестве положительных чисел, компоненты решения которой есть моменты перестановок.

Теорема 5. Всякое оптимальное расписание является квазиоптимальным.

Доказательство аналогично лемме 2 ⁽¹⁾.

Теорема 6. Если $b_i(t) = \alpha_i t$, то всякое квазиоптимальное расписание является оптимальным.

Доказательство. Пусть ρ — квазиоптимальное расписание, T_i — момент i -ой перестановки, $T_0 = 0$, $T_s = T(\rho)$, $t_i = T_i - T_{i-1}$. Индукцией по j можно показать, что

$$z_j^i(T_j) = \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^j t_k \sqrt{\alpha_{\beta_i^k}} \right)^2 \quad i=1, 2, \dots, n.$$

Из равенства $z_j^i(T_s) = 1$ после несложных преобразований получаем

$T_s = \frac{n}{\sqrt{2 \sum_{i=1}^n \sqrt{a_i}}}$. Отсюда и из теоремы 5 следует теорема 6.

Замечание. Теорему 6 можно доказать и в случае $b_i(t) = \alpha_i t^m$.

Теорема 7. Если $b_i(t) = \alpha_i t + \gamma_i$ и $\frac{\gamma_i}{\sqrt{\alpha_i}} = \frac{\gamma_j}{\sqrt{\alpha_j}} = a$, $i, j = 1, 2, \dots, n$, то всякое квазиоптимальное расписание является оптимальным.

Доказательство. Индукцией по l можно доказать, что

$$z_p^l(T_l) = \frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^l t_j \sqrt{\alpha_{\beta_j^l}} \right)^2 + a \left(\sum_{j=1}^l t_j \sqrt{\alpha_{\beta_j^l}} \right), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Из равенства $z_p^l(T_s) = 1$ получаем, решая квадратные уравнения и суммируя по i ,

$$T_s = T(p) = n(\sqrt{a^2 + 2} - a).$$

Отсюда и из теоремы 5 следует доказываемая теорема.

2. Գ. ՄԱՐՏԻՐՈՍՅԱՆ

Անհամաչափ մաշվածություն ունեցող համակարգերի համար մի փանի
օպտիմիզացիոն խնդիրների մասին

Աշխատանքում ստացված են n մանրակների n տեղերում աշխատանքի
ժամանակը մարսիմիզացնող եղանակները մաշման արագությունն ըստ մա-
մանակի աճման դեպքում: Մաշման արագությունն ըստ մաշման աստիճանի
դեպքում օպտիմալ եղանակները ստացված են մաշման արագության ֆունկ-
ցիան դժային և այլ սահմանափակումներին բավարարելու դեպքերում:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ В. К. Леонтьев, Г. Г. Мартиросян, Кибернетика, № 5, 1983. ² В. К. Леонтьев,
Г. Г. Мартиросян, ДАН АрмССР, т. 76, № 4 (1983).