

УДК 517.51

МАТЕМАТИКА

В. С. Виденский

# О приближении функций многочленами по произвольной полной системе

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 14/II 1982)

Будем говорить, что последовательность линейных операторов  $\{L_n\}$  из  $C[0,1]$  в  $C[0,1]$  является аппроксимирующей, если

$$\forall f \in C[0,1] \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n f - f\|_{C[0,1]} = 0.$$

Класс таких последовательностей будем обозначать через  $\mathcal{A}$  и писать  $\{L_n\} \in \mathcal{A}$ .

В настоящей заметке доказывается, что для каждой полной в  $C[0,1]$  системы функций можно построить аппроксимирующую последовательность линейных положительных операторов (кратко л. п. о.) типа многочленов Бернштейна.

**Теорема.** Если  $\{\varphi_k\}_{k=0}^\infty$ ,  $\varphi_0=1$ , — полная в  $C[0,1]$  система функций, то существуют такие многочлены  $\{u_{nk}\}_{k=0}^n$  по системе функций  $\{\varphi_k\}_{k=0}^n$ , что

$$u_{nk}(x) \geq 0, \quad \sum_{k=0}^n u_{nk}(x) = 1,$$

и линейные положительные операторы

$$U_n(f, x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) u_{nk}(x) \tag{1}$$

образуют аппроксимирующую последовательность.

**Доказательство.** 1°. Обозначим через  $\lambda_{nk}$  функцию, линейную на каждом отрезке  $\left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right]$  и такую, что  $\lambda_{nk}\left(\frac{i}{n}\right) = \delta_{ki}$  ( $\delta_{ki} = 0$  при  $k \neq i$ ,  $\delta_{ii} = 1$ ). Тогда ломаная, интерполирующая функцию  $f \in C[0,1]$  в узлах  $\frac{k}{n}$ , запишется в виде

$$\Lambda_n(f, x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \lambda_{nk}(x).$$

Очевидно,  $\Lambda_n$  — л. п. о., причем  $\{\Lambda_n\} \in \mathcal{A}$ . Для линейной функции  $f$  имеем  $\Lambda_n f = f$ , в частности,  $\Lambda_n(1, x) = 1$ ,  $\Lambda_n(t, x) = x$ .

2°. При фиксированном  $n$  приблизим функции  $\lambda_{nk}$  многочленами



по системе  $\{\varphi_k\}_{k=0}^{m_n}$ . Пусть  $\varepsilon_n \downarrow 0$ . Введем функции  $\{\mu_{nk}\}_{k=0}^n$ , линейные на отрезках  $\left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right]$  и такие, что

$$\mu_{nk}\left(\frac{i}{n}\right) = \begin{cases} \frac{\varepsilon_n}{3n^2} & \text{при } i \neq k, \\ 1 - \frac{\varepsilon_n}{3n} & \text{при } i = k. \end{cases}$$

Так как  $\mu_{nk}$  — ломаная с вершинами в точках  $\frac{i}{n}$  и так как

$$\sum_{k=0}^n \mu_{nk}\left(\frac{i}{n}\right) = 1, \text{ то } \sum_{k=0}^n \mu_{nk}(x) = 1. \text{ Мы имеем}$$

$$\|\lambda_{nk} - \mu_{nk}\| = \frac{\varepsilon_n}{3n}, \quad k=0, 1, \dots, n.$$

Выберем  $m_n$  столь большим, чтобы существовали многочлены  $\{q_{nk}\}_{k=0}^{m_n-1}$  по системе  $\{\varphi_k\}_{k=0}^{m_n}$ , которые удовлетворяют неравенствам

$$\|\mu_{nk} - q_{nk}\| < \frac{\varepsilon_n}{6n^3} \quad \text{при } k=0, 1, \dots, n-1.$$

Положим  $q_{nn}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} q_{nk}(x)$ , тогда

$$\|\mu_{nn} - q_{nn}\| < \frac{\varepsilon_n}{6n^2}.$$

Ясно, что все  $q_{nk}(x) \geq 0$  и что

$$\|\lambda_{nk} - q_{nk}\| < \frac{\varepsilon_n}{2n}, \quad k=0, 1, \dots, n.$$

Построим последовательность л. п. о.  $\{Q_{m_n}\}$  по формулам

$$Q_{m_n}(f, x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) q_{nk}(x).$$

Мы имеем  $Q_{m_n}(1, x) = 1$ , и так как

$$\|Q_{m_n}f - \Lambda_n f\| \leq \|f\| \varepsilon_n,$$

то  $\{Q_{m_n}\} \in \mathcal{A}$ .

3°. При  $m_i \leq n < m_{i+1}$  определим многочлены  $\{u_{nk}\}$  по системе  $\{\varphi_k\}_{k=0}^{m_i}$  равенствами

$$u_{nk} = Q_{m_i}(\lambda_{nk}, x),$$

а л. п. о.  $U_n$  по формуле (1). Проверим, что  $\{U_n\} \in \mathcal{A}$ . Действительно, мы имеем

$$\|U_n f - Q_{m_i} f\| = \|Q_{m_i}(\Lambda_n f - f)\| \leq \|\Lambda_n f - f\|,$$

и остается заметить, что  $\{Q_{m_i}\} \in \mathcal{A}$ ,  $\{\Lambda_n\} \in \mathcal{A}$ . Таким образом, наша теорема доказана.



З а м е ч а н и е 1. Равноотстоящие узлы  $\frac{k}{n}$  в формуле (1) можно заменить любыми точками  $0 = \xi_{n0} < \xi_{n1} < \dots < \xi_{nn} = 1$ , для которых  $\max_{1 \leq k \leq n} (\xi_{nk} - \xi_{n,k-1}) \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ . Для этого достаточно вместо  $\Lambda_n f$  рассмотреть ломаные  $\Lambda_n^* f$ , интерполирующие  $f$  в узлах  $\{\xi_{nk}\}_{k=0}^n$ .

З а м е ч а н и е 2. Многочлены (1)—обобщение классических многочленов Бернштейна

$$B_n(f, x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) p_{nk}(x), \quad p_{nk}(x) = C_n^k x^k (1-x)^{n-k}.$$

Функции  $\{p_{nk}\}_{k=0}^n$  являются  $D^*$ -базисом алгебраической системы  $\{x^k\}_{k=0}^n$ . Это означает, что выполняются условия

$$p_{nk}(x) \geq 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{p_{nk}(x)}{p_{n,k-1}(x)} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{p_{nk}(x)}{p_{n,k-1}(x)} = \infty. \quad (2)$$

Из (2) следует, что многочлены  $P_n(x) = \sum_{k=0}^n c_k p_{nk}(x)$  удовлетворяют правилу знаков Декарта в интервале  $]0, 1[$ . Многие замечательные свойства  $B_n f$  связаны с тем, что  $\{p_{nk}\}_{k=0}^n$  есть  $D^*$ -базис.

В заметках <sup>(1)</sup> и <sup>(2)</sup> были построены аналогичные многочлены по рациональным дробям с данной матрицей вещественных полюсов  $\{x_{nk}\}_{k=1}^n$ ,  $x_{nk} \in \mathbb{R} \setminus [0, 1]$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$A_n(f, x) = \sum_{k=0}^n f(\tau_{nk}) a_{nk}(x),$$

где  $\{a_{nk}\}_{k=0}^n$ — $D^*$ -базис системы  $\{1, (x-x_{nk})^{-1}\}_{k=1}^n$ .

В <sup>(1,2)</sup> указано условие, необходимое и достаточное, чтобы  $\{A_n\} \in \mathcal{A}$ . Это условие более ограничительно, чем условие, обеспечивающее полноту системы рациональных дробей

$$\{1, (x-x_{nk})^{-1}\}_{k=1}^n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Таким образом, в общем случае, который рассматривается в настоящей заметке, многочлены  $\{a_{nk}\}_{k=0}^n$ , вообще говоря, не являются  $D^*$ -базисом системы  $\{\varphi_k\}_{k=0}^n$ .

Ленинградский государственный  
педагогический институт им. А. Н. Герцена

Վ. Ս. ՎԻԻՆՆՍԿԻ

Ֆունկցիաների մոտարկումների մասին կամայական լրիվ սխտեմով կազմված  
բազմանդամներով

$C[0; 1]$ -ը իր մեջ արտապատկերող գծալին օպերատորների  $\{L_n\}_0^\infty$  հաշորդականութիւնը կոչվում է մոտարկող հաշորդականութիւն, եթե ինչպիսին էլ լինի  $f$  ֆունկցիան  $C[0; 1]$ -ից

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n f - f\|_{C[0; 1]} = 0:$$



Հողվածում ապացուցվում է հետևյալ թեորեմը:

**Թեորեմ:** Եթե ֆունկցիաների  $\{\varphi_k\}_0^\infty$  ( $\varphi_0=1$ ) սխառեմը լրիվ է  $C[0; 1]$ -ում, ապա գոյություն ունեն  $\{\varphi_k^n\}_0^n$  ( $n=0, 1, 2, \dots$ ) սխառեմով կազմված այնպիսի  $\{u_{nk}\}_{k=0}^n$  բազմանդամներ, որ  $u_{nk}(x) \geq 0$ ,  $\sum_{k=0}^n u_{nk}(x) = 1$ , և

$$U_n(f; x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) u_{nk}(x)$$

դրական գծային օպերատորները կազմում են մոտարկող հաջորդականություն:

#### ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

<sup>1</sup> В. С. Виденский, Изв. АН БССР, сер. физ.-мат., № 1, 1979. <sup>2</sup> В. С. Виденский, ДАН АрмССР, т. 70, № 3 (1980).