ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXX 1980 5

УДК 519.217

МАТЕМАТИКА

В. В. Сарафян, Р. Г. Сафарян

Диффузионные процессы с усреднением и распространение концентрационных волн

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. А. Александряном 25/II 1980)

Рассмотрим следующую смешанную краевую задачу:

$$\frac{\partial u^{\varepsilon}}{\partial t}=\frac{1}{2\varepsilon}\frac{\partial^2 u^{\varepsilon}}{\partial x^2}+b(x, y)\frac{\partial u^{\varepsilon}}{\partial y}+\frac{1}{\varepsilon}f(x, y, u^{\varepsilon}),\ t>0$$

$$x\in(-1,1),\ -\infty<y<\infty;\ \left.\frac{\partial u^{\varepsilon}}{\partial x}\right|_{x=\pm 1}=0,\ u^{\varepsilon}(0, x, y)=g(x, y)\geqslant 0 \quad (1)$$

$\varepsilon>0$

Здесь ε — малый параметр; $b(x, y)$, $f(x, y, u)$ — ограниченные по модулю, удовлетворяющие условию Липшица функции. Начальная функция $g(x, y)$ предполагается непрерывной всюду, кроме, быть может, конечного числа гладких кривых в плоскости (x, y); носитель функции $g(x, y)$ обозначим G и будем считать, что G непустое множество, совпадающее с замыканием множества своих внутренних точек. Мы предполагаем, что функция $f(x, y, u)$ при любых $x\in[-1, 1]$, $y\in(-\infty,\infty)$ удовлетворяет следующим условиям: $f(x, y, 0)=f(x, y, 1)=0$, $f(x, y, u)>0$ при $u\in(0, 1)$ и $f(x, y, u)<0$ при $u\notin[0, 1]$.

Кроме того, предполагается, что

$$c(x, y)=\left.\frac{\partial f(x, y, u)}{\partial u}\right|_{u=0}=\max_{u} u^{-1}f(x, y, u). \quad (2)$$

Мы приведем некоторые результаты относительно поведения решении задачи (1) при малых ε. Как и следовало ожидать из физических соображений, функция $u^{\varepsilon}(t, x, y)$ при малых ε близка к ступеньке-функции, зависящей только от y и принимающей два значения 0 и 1. С ростом t область G_t, где $u^{\varepsilon}(t, x, y)$ близка к 1, изменяется и решение задачи (1) при малых ε носит характер волны. Наша задача тесно связана с работой [1], где рассматривается задача о распространении концентрационной волны с такой же нелинейностью, как у нас, когда случайное движение — обычная диффузия. В нашем случае соответствующий случайный процесс по оси y имеет конечную скорость и носит характер броуновского движения с инерцией.

Сначала рассмотрим случай $b(x, y)=b(x)$, $f(x, y, u)=f(u)$, $G=\operatorname{supp} g(x, y)=\{y<0\}$. Обозначим $\bar{b}=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} b(x)\,dx$. Для любого $\beta\in(-\infty, \infty)$ определим $\lambda(\beta)$ как наименьшее собственное значение краевой задачи

$$\frac{1}{2} u''(x)+\beta(b(x)-\bar{b})u(x)=\lambda(\beta)u(x),\quad x\in(-1, 1),$$

$$u'(1)=u'(-1)=0. \tag{3}$$

Нетрудно показать, что функция $\lambda(\beta)$ выпукла вниз. Обозначим $L(\alpha)$ преобразование Лежандра от $\lambda(\beta)$: $L(\alpha)=\sup_{\beta}(\alpha\beta-\lambda(\beta))$.

Теорема 1. *Пусть* $b(x, y)=b(x)$, $f(x, y, u)=f(u)$, $G=\{y<0\}$. *Обозначим* $\bar{\alpha}$ *единственный положительный корень уравнения* $L(\alpha)=f'(0)$, $\alpha^*=\bar{\alpha}-\bar{b}$. *Тогда*

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0} u^\varepsilon(t, x, y)=\begin{cases}1 & \text{при } y<\alpha^* t\\ 0 & \text{при } y>\alpha^* t\end{cases}$$

Для доказательства теоремы 1 введем в рассмотрение диффузионный процесс $(x_t^\varepsilon, y_t^\varepsilon)$ в полосе $|x|\leq 1$, $-\infty<y<\infty$, который внутри этой полосы управляется оператором $L^\varepsilon=\frac{1}{2\varepsilon}\frac{d^2}{dx^2}+b(x, y)\frac{d}{dy}$, а при $x=\pm 1$ претерпевает отражение по нормали к границе. Из формулы Каца — Фейнмана [2] следует, что решение задачи (1), если оно существует, удовлетворяет уравнению

$$u^\varepsilon(t, x, y)=M_{x,y}g(x_t^\varepsilon, y_t^\varepsilon)\exp\left\{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t c(u^\varepsilon(t-s, x_s^\varepsilon, y_s^\varepsilon))ds\right\}, \tag{4}$$

где $c(u)=u^{-1}f(u)$, $M_{x,y}$ — математическое ожидание в предположении, что $x_0=x$, $y_0=y$. Если $c(u)$ удовлетворяет условию Липшица, то легко доказать, что существует единственное решение уравнения (4), которое естественно считать обобщенным решением задачи (1). Если данные задачи достаточно гладкие, то нетрудно доказать, что это обобщенное решение будет классическим.

Так как по условию $c=f'(0)\geq u^{-1}f(u)$, то из (4) вытекает неравенство

$$0\leq u^\varepsilon(t, x, y)\leq M_{x,y}g(x_t^\varepsilon, y_t^\varepsilon)e^{\frac{ct}{\varepsilon}}. \tag{5}$$

Далее, применяя результаты работ [3,4], получим, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon \ln M_{x,y} g(y_t^\varepsilon) = -\inf_{\varphi\in C_{0t},\ \varphi_0=y,\ \varphi_t<0} \left\{ \int_0^t L(\dot\varphi_s + b)\,ds \right\}. \tag{6}$$

Нижняя грань в правой части равенства (6), как легко видеть, достигается при $\dot\varphi_s = \frac{y}{t}$. Отсюда следует, что $M_{x,y} g(y_t^\varepsilon)$ при $\varepsilon \downarrow 0$ логарифмически эквивалентно $\exp\left\{-\frac{t}{\varepsilon} L\left(\frac{y}{t} + \bar b\right)\right\}$. Из (5) и (6) заключаем, что при малых $\varepsilon > 0$

$$0 \leqslant u^\varepsilon(t, x, y) \leqslant \exp\left\{\frac{t}{\varepsilon}\left(c - L\left(\frac{y}{t} + \bar b\right)\right)\right\}$$

и, следовательно, $\lim_{\varepsilon\downarrow 0} u^\varepsilon(t, x, y) = 0$, если $L\left(\frac{y}{t} + \bar b\right) > C$. Так как $L(\alpha)$ возрастающая функция, то последнее неравенство выполняется только при $\frac{y}{t} > \bar\alpha - \bar b$, где $\bar\alpha$ — положительный корень уравнения $L(\alpha) = c = f'(0)$. Таким образом, если $y > \alpha^* t$, то $\lim_{\varepsilon\downarrow 0} u^\varepsilon(t, x, y) = 0$.

Поясним теперь, как доказывается, что $\lim_{\varepsilon\downarrow 0} u^\varepsilon(t, x, y) = 1$ при $y < \alpha^* t$. Это доказательство аналогично доказательству теоремы 1 из ([3]). Из оценки (6), с учетом того, что $u^\varepsilon \to 0$ при $y > \alpha^* t$, можно вывести, что для любого $\delta > 0$ найдется столь малое $h > 0$, что

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0} \varepsilon \ln u^\varepsilon(t, x, (\alpha^* + h)t) > -\delta. \tag{7}$$

Далее, используя строго марковское свойство „теплового" процесса $(t-s, x_s^\varepsilon, y_s^\varepsilon) = Z_s^\varepsilon$, можно для любого марковского момента τ^ε записать соотношение

$$u^\varepsilon(t, x, y) = M_{x,y} u^\varepsilon(t - \tau^\varepsilon, x_{\tau^\varepsilon}^\varepsilon, y_{\tau^\varepsilon}^\varepsilon) e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^{\tau^\varepsilon} c(u^\varepsilon(t-s, x_s^\varepsilon, y_s^\varepsilon))ds}.$$

Выбирая в этом соотношении в качестве τ^ε первый момент достижения процессом z_t^ε множества $t = 0$ или множества $\{(s, x, y) : u^\varepsilon(s, x, y) > 1 - \varkappa\}$, с учетом оценки (7) и того, что $c(u) > c_\varkappa > 0$ при $u \in [0, 1 - \varkappa]$, нетрудно доказать, что $\lim_{\varepsilon\downarrow 0} u^\varepsilon(t, x, y) = 1$ при $y < \alpha^* t$.

Замечание. Нетрудно освободиться от предположения о том, что $G = \{y < 0\}$. Если $g(x, y)$ — произвольная неотрицательная непрерывная функция, то положим $\bar G = \{y : g(x, y) > 0$ при каком-нибудь $x \in (-1, 1)\}$. Если $\bar G = \{y < a < \infty\}$, то утверждение теоремы сохраняется без существенных изменений — фронт волны будет передвигаться со скоростью $\alpha^* = \bar\alpha - \bar b$. Если множество $\bar G$ состоит из ограниченных интервалов, то нужны небольшие уточнения. А именно все правые концы компонент множества $\bar G$ будут двигаться со скоростью $\alpha^* =$

$=\alpha-\bar{b}$. Левые концы будут двигаться со скоростью $\alpha^{**}=-\alpha-\bar{b}$. В частности, если $\bar{b}=0$, то полосы, на которых $u^\varepsilon(t,x,y)$ близко к 1, будут расширяться со временем в обе стороны со скоростью, по абсолютной величине равной α. Если $\bar{b}\neq 0$, но $|\bar{b}|<\alpha$, то эти полосы тоже будут со временем расширяться в обе стороны, но с различными скоростями.

Теперь мы рассмотрим случай неоднородных по y коэффициентов. Здесь скорость распространения фронта уже меняется от точки к точке и возможны некоторые новые эффекты, такие, как, например, зажигание новых индуцированных центров ([6]). Для краткости будем считать, что начальная функция зависит только от y: $g=g(y)$ и что $\bar{b}(y)=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} b(x,y)\,dx=0$ при всех y.

Пусть $\lambda=\lambda(y,\beta)$ наибольшее собственное значение задачи

$$\frac{1}{2}u''(x)+\beta b(x,y)u(x)=\lambda(y,\beta)u(x),\quad x\in(-1,1),\quad u'(1)=u'(-1)=0.$$

Здесь $\beta\in(-\infty,\infty)$ и $y\in(-\infty,\infty)$ параметры. Обозначим $L(y,\alpha)$—преобразование Лежандра функции $\lambda(y,\beta)$ по β. Введем в рассмотрение функционал

$$R_{0t}(\varphi)=\int_0^t [c(\varphi_s)-L(\varphi_s,\dot{\varphi}_s)]\,ds.$$

Этой формулой определим функционал $R_{0t}(\varphi)$ для абсолютно непрерывных функций φ_s, $s\in[0,t]$; для остальных непрерывных φ_s, $s\in[0,t]$ положим $R_{0t}(\varphi)=-\infty$. Функционал $R_{0t}(\varphi)$ полунепрерывен сверху. Функцию $V_0(t,y)$ определим равенством

$$V_0(t,y)=\sup\{R_{0t}(\varphi):\varphi\in C_{0t},\ \varphi_0=y,\ \varphi_t\in G\},$$

где $G=\{y: g(y)>0\}$.

Теорема 2. *Пусть* $f(x,y,u)=f(y,u)$, $g=g(y)$, $\bar{b}(y)=0$. *Предположим, что для любой точки* (t,y) *такой, что* $V_0(t,y)=0$

$$V_0(t,y)=\sup\{R_{0t}(\varphi):\varphi\in C_{0t},\ \varphi_0=y,$$
$$\varphi_t\in G,\quad V(t-s,\varphi_s)<0 \text{ при } s\in(0,t)\}.$$

Тогда $\lim_{\varepsilon\downarrow 0}u^\varepsilon(t,x,y)=0$, *если* $V_0(t,y)<0$; $\lim_{\varepsilon\downarrow 0}u^\varepsilon(t,x,y)=1$, *если* $V_0(t,y)>0$.

Таким образом, уравнение $V(t,y)=0$ задает фронт волны в момент t; экстремали функционала $R_{0t}(\varphi)$ играют роль лучей.

Доказательство этой теоремы близко к доказательству теоремы 1. Как следует из ([3,4]),

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon\ln M_{x,y}g(Y_t^\varepsilon)\exp\left\{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t c(Y_s^\varepsilon)\,ds\right\}=V_0(t,y).$$

Пользуясь этим соотношением, доказательство теоремы 2 можно провести аналогично тому, как доказывается теорема 1 из ([2]).

Теперь обратимся к случаю, когда нелинейный член зависит от быстрой переменной x. Будем для краткости считать, что от y коэффициенты не зависят и $G=\{y<0\}$.

Теорема 3. *Предположим, что* $b=b(x)$, $f(x, y, u)=f(x, u)$, $G=\{y<0\}$. *Пусть* $\lambda(\beta_1, \beta_2)$, $(\beta_1, \beta_2\in(-\infty, \infty))$, *наименьшее собственное значение задачи*

$$\frac{1}{2}u''(x)+(\beta_1 b(x)+\beta_2 c(x))u(x)=\lambda(\beta_1, \beta_2)u, \quad x\in(-1,1)$$

$$u'(-1)=u'(1)=0,$$

$L(\alpha_1, \alpha_2)$*—преобразование Лежандра функции* $\lambda(\beta_1, \beta_2)$. *Обозначим* α^* *единственный положительный корень уравнения* $\sup_c|c-L(\alpha, c)|=0$. *Тогда*

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0} u^\varepsilon(t, x, y)=\begin{cases}1 \text{ при } y<\alpha^* t,\\ 0 \text{ при } y>\alpha^* t.\end{cases}$$

Доказательство этой теоремы проводится по тому же плану, что и доказательство теоремы 1. Следует только воспользоваться тем, что при $\varepsilon\downarrow 0$

$$\ln M_{x,y}g(x_t^\varepsilon, y_t^\varepsilon)e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t c(x_s^\varepsilon)ds}\sim\frac{1}{\varepsilon}\sup\Big\{-\int_0^t L(\dot\varphi_s^1, \dot\varphi_s^2)ds+\varphi_t^2:$$

$$:\varphi^1, \varphi^2\in C_{0t}, \ \varphi_0^1=y, \ \varphi_t^1<0, \ \varphi_0^2=0\Big\}.$$

Эта эквивалентность вытекает из (([3]), ([4]), гл. 7).

Ереванский государственный
университет,
Армянский педагогический институт
им. Х. Абовяна

Վ. Վ. ՍԱՐԱՖՅԱՆ Ռ. Դ. ՍԱՖԱՐՅԱՆ

Դիֆուզիոն պրոցեսներ միջինացումով և կոնցենտրացիան ալիքների տարածում

Դիտարկենք հետևյալ խառը եզրային խնդիրը.

$$\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}=\frac{1}{2\varepsilon}\frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial x^2}+b(x, y)\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial y}+\frac{1}{\varepsilon}f(x, y, u^\varepsilon), \quad x\in(-1, 1)$$

$$-\infty<y<\infty, \ t>0; \ u^\varepsilon(0, x, y)=g(x, y)\geqslant 0; \ \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x}(t, x, y)\Big|_{x=\pm 1}=0$$

Ցույց է տրված որոշ ենթադրությունների դեպքում փոքր ε-ի համար, որ նշված խնդրի $u^{\varepsilon}(t, x)$ լուծումը ունի աստիճանաձև ալիքի բնույթ, որը տարածվում է γ հաստատուն արագությամբ։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *А. Н. Колмогоров, И. Г. Петровский, Н. С. Пискунов*, Бюллетень МГУ, Серия А, т. 1, 1937. [2] *М. И. Фрейдлин*, ДАН СССР, т. 246, № 3 (1979). [3] *В. В. Сирифян, Р. Г. Сифарян, М. И. Фрейдлин*, УМН, т. 33, № 6 (1978). [4] *А. Д. Вентцель, М. И. Фрейдлин*, Флуктуации в динамических системах под действием малых случайных возмущений. «Наука», М., 1979.