

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

С. А. Амбарцумян

Расчет симметрично нагруженной круговой цилиндрической оболочки, подкрепленной продольными ребрами

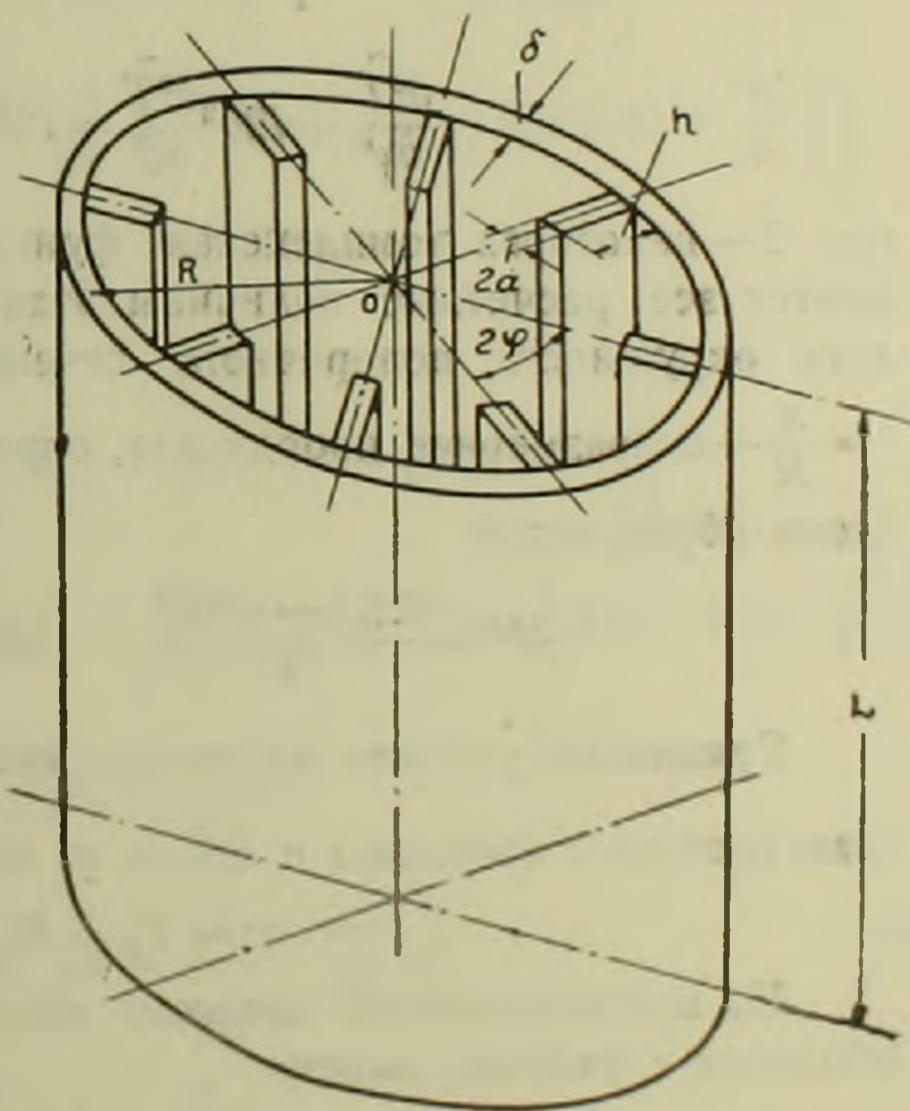
(Представлено А. Г. Назаровым 7. VII. 1955)

1. Рассмотрим замкнутую круговую цилиндрическую оболочку, подкрепленную продольными ребрами прямоугольного поперечного сечения. Пусть ребра расположены на равном расстоянии друг от друга по окружности поперечного сечения. Оболочка свободно оперта по торцам и загружена равномерно распределенной нагрузкой p . Считаем, что ребра тоже свободно оперты по концам и скольжение каждого ребра по линиям контакта с оболочкой невозможно.

Пусть имеем для оболочки: R —радиус кривизны срединной поверхности; δ —толщина стенки; L —длина; E и μ —модуль упругости и коэффициент Пуассона материала оболочки. Для ребра L —длина; $2a$ и h —размеры поперечного сечения; E_1 —модуль упругости материала ребра (фиг. 1).

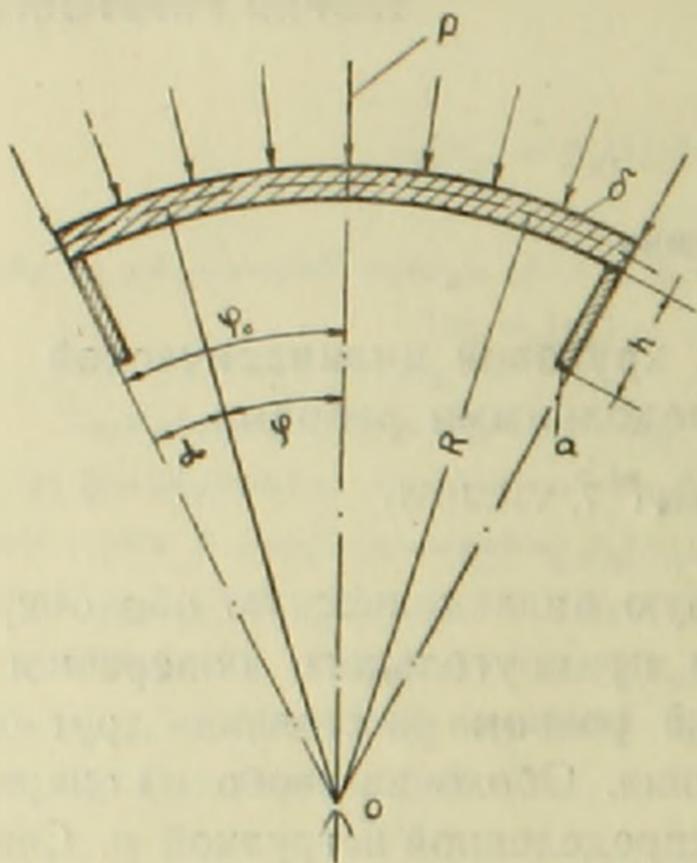
Под действием равномерно распределенного давления p , все ребра будут деформироваться одинаково, в одинаково деформированном состоянии будут также секции оболочки, находящиеся между двумя соседними ребрами. Отсюда не трудно заметить, что решение поставленной задачи можно

получить, рассматривая лишь одну секцию, расположенную между двумя соседними ребрами, включая половинки этих ребер (фиг. 2).



Фиг. 1.

Таким образом, задача расчета прочности симметрично нагруженной круговой цилиндрической оболочки, подкрепленной продольными ребрами, сводится к решению основной системы, состоящей из свободно опертой по торцам круговой цилиндрической оболочки, прямолинейные края которой подкреплены радиально расположенными ребрами, последние при деформации не поворачиваются и по направлению касательных к направляющим



Фиг. 2.

срединной поверхности оболочки не перемещаются.

2. Основную систему решаем с помощью известного приема, широко применяемого при решении контактной задачи цилиндрической оболочки с ребром^(1,2). Здесь при вычислении коэффициентов жесткости прямолинейного края цилиндрической оболочки пользуемся упрощенной теорией длинных цилиндрических пластин В. В. Новожилова⁽²⁾.

В этом случае, как известно, разрешающее уравнение оболочки имеет вид

$$\frac{\partial^4 \bar{T}}{\partial \varphi^4} + i2b^2 \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \xi^2} = i2b^2 R \Delta(q_n), \quad (2.1)$$

где \bar{T} — некоторая комплексная функция, через которую представляются все расчетные величины задачи: φ — угол, соответствующий дуге окружности поперечного сечения цилиндрической пластинки; $\xi = \frac{x}{R}$ — безразмерная координата, определяющая положение оболочки вдоль образующей

$$4b^4 = \frac{12(1 - \mu^2)R^2}{\delta^2}, \quad \Delta \dots = \frac{\partial^2 \dots}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \dots}{\partial \varphi^2}. \quad (2.2)$$

Граничные условия на торцах имеют вид: при $\xi = 0$; $\xi = \frac{L}{R}$ (начало отсчета ξ совпадает с одной из криволинейных кромок)

$$v = w = T_1 = M_1 = 0^*. \quad (2.3)$$

На прямолинейных кромках оболочки, из условий сопряжения оболочки с ребром, имеем:

$$\begin{aligned} & \text{при } \varphi = \pm \varphi_0 \text{ (или } \alpha = |\varphi_0|) \\ & v = 0; R\psi = 0, w_0 = w_{00}, u_0 = u_{00}, \\ & S_0 = -S_{00}, N_{20} = -N_{200}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

* Здесь и в дальнейшем принимаются обозначения работы⁽²⁾.

При этих граничных условиях, (2.3) и (2.4), задача решается с помощью обобщенного метода Мориса Леви.

Не вдаваясь в подробности, приводим расчетные формулы оболочки, которые необходимы также при построении коэффициентов жесткости края оболочки. При получении этих формул ограничиваются первым членом разложения ⁽²⁾:

$$\begin{aligned} u &= u' \cos \lambda \xi + u^*, & v &= v' \sin \lambda \xi, \\ w &= w' \sin \lambda \xi + w^*, & \psi &= \psi' \cos \lambda \xi, \\ T_1 &= T_1' \sin \lambda \xi, & T_2 &= T_2' \sin \lambda \xi + T_2^*, \\ S &= S' \cos \lambda \xi, & N_2 &= N_2' \sin \lambda \xi, \\ M_1 &= \mu M_2, & M_2 &= M_2' \sin \lambda \xi. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Здесь ⁽²⁾:

$$\begin{aligned} u' &= \frac{\lambda}{\nu^2} \left[B_1 e^{-c_1 \alpha} \cos \left(d_1 \alpha + \beta_1 + \frac{\pi}{4} \right) - B_2 e^{-c_2 \alpha} \cos \left(d_2 \alpha + \beta_2 - \frac{\pi}{4} \right) \right] \\ v' &= -\frac{1}{\nu} \left[B_1 e^{-c_1 \alpha} \cos \left(d_1 \alpha + \beta_1 + \frac{\pi}{8} \right) - B_2 e^{-c_2 \alpha} \sin \left(d_2 \alpha + \beta_2 - \frac{\pi}{8} \right) \right] \\ w' &= B_1 e^{-c_1 \alpha} \cos \left(d_1 \alpha + \beta_1 \right) + B_2 e^{-c_2 \alpha} \cos \left(d_2 \alpha + \beta_2 \right) \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$R\psi' = -\nu \left[B_1 e^{-c_1 \alpha} \cos \left(d_1 \alpha + \beta_1 - \frac{\pi}{8} \right) + B_2 e^{-c_2 \alpha} \sin \left(d_2 \alpha + \beta_2 + \frac{\pi}{8} \right) \right]$$

$$\frac{R}{E\delta} T_1' = -\lambda u'$$

$$\frac{R}{E\delta} T_2' = -\frac{\lambda^4}{\nu^4} \left[B_1 e^{-c_1 \alpha} \sin \left(d_1 \alpha + \beta_1 \right) - B_2 e^{-c_2 \alpha} \sin \left(d_2 \alpha + \beta_2 \right) \right]$$

$$\frac{R}{E\delta} S' = -\frac{\lambda^3}{\nu^3} \left[B_1 e^{-c_1 \alpha} \sin \left(d_1 \alpha + \beta_1 - \frac{\pi}{8} \right) + B_2 e^{-c_2 \alpha} \cos \left(d_2 \alpha + \beta_2 + \frac{\pi}{8} \right) \right]$$

$$\begin{aligned} \frac{R}{E\delta} N_2' &= -\frac{\nu^3}{4b^4} \left[B_1 e^{-c_1 \alpha} \sin \left(d_1 \alpha + \beta_1 + \frac{\pi}{8} \right) - \right. \\ &\quad \left. - B_2 e^{-c_2 \alpha} \cos \left(d_2 \alpha + \beta_2 - \frac{\pi}{8} \right) \right] \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{E\delta} M_2' &= -\frac{\nu^2}{4b^4} \left[B_1 e^{-c_1 \alpha} \cos \left(d_1 \alpha + \beta_1 - \frac{\pi}{4} \right) - \right. \\ &\quad \left. - B_2 e^{-c_2 \alpha} \cos \left(d_2 \alpha + \beta_2 + \frac{\pi}{4} \right) \right] \end{aligned}$$

Частные решения взяты из безмоментной теории и имеют вид:

$$T_2^* = q_n' R \sin \lambda \xi, \quad w^* = q_n' \frac{R^2}{E \delta} \sin \lambda \xi,$$

$$u^* = q_n' \frac{\mu}{\lambda} \frac{R^2}{E \delta} \cos \lambda \xi, \quad (2.8)$$

где

$$q_n' = \frac{4}{\pi} p, \quad \lambda = \frac{\pi R}{L}. \quad (2.9)$$

В формулах (2.6) и (2.7) c_1 , c_2 , d_1 и d_2 являются соответственно действительными и мнимыми частями корней характеристического уравнения и имеют следующий вид:

$$c_1 = d_2 = v \cos \frac{\pi}{8}, \quad c_2 = d_1 = v \sin \frac{\pi}{8},$$

$$v = \sqrt[4]{2} \sqrt{b \lambda}. \quad (2.10)$$

Для определения коэффициентов жесткости прямолинейного края оболочки вычислим значения постоянных интегрирования: B_1 , B_2 и β_1 , β_2 соответствующие следующим двум вариантам граничных условий:

$$\left. \begin{aligned} u' = 1, \quad v' = 0, \quad w' = 0, \quad \psi' = 0 \\ w' = 1, \quad u' = 0, \quad v' = 0, \quad \psi' = 0 \end{aligned} \right\} \text{ при } \varphi = \varphi_0. \quad (2.11)$$

В табл. 1 помещены значения постоянных интегрирования. Третий столбец таблицы (p) содержит значения коэффициентов при абсолютной заделке краев оболочки (1.2).

Подставляя значения коэффициентов интегрирования в (2.7), получим коэффициенты жесткости края оболочки, в табл. 2 приведены эти коэффициенты.

Таблица 1

	$u' = 1$	$w' = 1$	p
$B_1 \cos \beta_1$	0,00	-0,707	$0,707 q_n' \frac{R^2}{E \delta}$
$B_1 \sin \beta_1$	$-2,41 \frac{v^2}{\lambda}$	-4,12	$\left(2,41 \frac{\mu v^2}{\lambda^2} + 4,12 \right) q_n' \frac{R^2}{E \delta}$
$B_2 \cos \beta_2$	0,00	1,707	$-1,707 q_n' \frac{R^2}{E \delta}$
$B_2 \sin \beta_2$	$\frac{v^2}{\lambda}$	1,707	$-\left(\frac{\mu v^2}{\lambda^2} + 1,707 \right) q_n' \frac{R^2}{E \delta}$

	$u'=1$	$w'=1$	P
$\frac{R}{E\delta} S'$	$2,61 \frac{\lambda^2}{\nu}$	$2,61 \frac{\lambda^3}{\nu^3}$	$-2,61 \frac{\lambda}{\nu} \left(\frac{\mu}{\nu} + \frac{\lambda^2}{\nu^2} \right) q_n \frac{R^2}{E\delta}$
$\frac{R}{E\delta} N'_2$	$2,61 \frac{\lambda^3}{\nu^3}$	$6,31 \frac{\lambda^4}{\nu^5}$	$-\frac{\lambda^2}{\nu^2} \left(2,61 \frac{\mu}{\nu} + 6,31 \frac{\lambda^2}{\nu^3} \right) q_n \frac{R^2}{E\delta}$

Далее построим коэффициенты жесткости сопряженного ребра. С этой целью, исходя из формул (2.12), находим коэффициенты для S' и N'_2 при рассмотренных выше единичных случаях. Формулы (2.12) представляют связь между возможными перемещениями сопряженной кромки балки с действующими на нее усилиями и имеют следующий вид:

$$u_0 = \frac{4R^2 S^0}{\lambda^2 E_1 F} - \frac{R^3 h N'_2{}^0}{2\lambda^3 E_1 J},$$

$$w'_0 = \frac{R^4 N'_2{}^0}{\lambda^4 E_1 J} - \frac{R^3 h S^0}{2\lambda^3 E_1 J}. \quad (2.12)$$

F и J — площадь и момент инерции поперечного сечения ребра.

В табл. 3 помещены коэффициенты жесткости балки.

Исходя из условий сопряжения оболочки с ребром (2.4), получим систему уравнений для определения краевых перемещений;

Таблица 3

	$u'=1$	$w'=1$
$\frac{R}{E_1 \delta} S'$	$\frac{F \lambda^2}{R \delta}$	$\frac{\lambda^3 h F}{2R^2 \delta}$
$\frac{R}{E_1 \delta} N'_2$	$\frac{\lambda^3 h F}{2R^2 \delta}$	$\frac{\lambda^4 h^2 R}{3R^3 \delta}$

$$\left(2,61 \frac{E}{\nu} + \frac{FE_1}{R\delta} \right) u' + \lambda \left(2,61 \frac{E}{\nu^3} + \frac{hFE_1}{2R^2\delta} \right) w' = 2,61 \frac{1}{\nu^2 \lambda} \left(\mu + \frac{\lambda^2}{\nu} \right) \frac{R^2}{\delta} q'_n \quad (2.13)$$

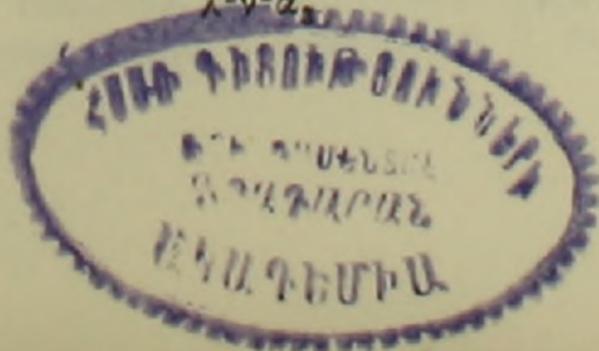
$$\left(2,61 \frac{E}{\nu^3} + \frac{hFE_1}{2R^2\delta} \right) u' + \lambda \left(6,31 \frac{E}{\nu^5} + \frac{h^2FE_1}{3R^3\delta} \right) w' = \frac{1}{\nu^2 \lambda} \left(2,61 \frac{\mu}{\nu} + 6,31 \frac{\lambda^2}{\nu^3} \right) \frac{R^2}{\delta} q'_n. \quad (2.14)$$

Уравнения (2.13) и (2.14), решая совместно относительно краевых значений перемещений u' и w' , получим:

$$u' = K_u \frac{R^2}{E\delta} q'_n, \quad w' = K_w \frac{R^2}{E\delta} q'_n \quad (2.15)$$

$$K_u = \frac{2,61 \left[\alpha_1 \left(\frac{6,31}{\nu^5} + \frac{nh^2F}{3R\delta} \right) - \alpha_2 \left(\frac{2,61}{\nu^3} + \frac{nhF}{2R^2\delta} \right) \right]}{\lambda \nu^2 \alpha_3}$$

$$K_w = \frac{2,61 \left[\alpha_1 \left(\frac{2,61}{\nu^3} + \frac{nhF}{2R^2\delta} \right) - \alpha_2 \left(\frac{2,61}{\nu} + \frac{nF}{R\delta} \right) \right]}{\lambda^2 \nu^2 \alpha_3} \quad (2.16)$$



$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 &= \left(\mu_1 + \frac{\lambda^2}{\nu} \right) & \alpha_2 &= \left(\frac{\mu}{\nu} + 2,41 \frac{\lambda^2}{\nu^3} \right) \\ \alpha_3 &= \left(\frac{2,61}{\nu^3} + \frac{nhF^1}{2R^2\delta} \right)^2 - \left(\frac{2,61}{\nu} + \frac{nF}{R\delta} \right) \left(\frac{6,31}{\nu^5} + \frac{nh^2F^1}{3R^2\delta} \right) \end{aligned} \right\} \quad (2.17)$$

В этих формулах через n обозначено отношение модуля упругости ребра (E_1) к модулю упругости оболочки (E), т. е. $n = E_1/E$.
На основании (2.15), из табл. 1 следует:

$$B_1 \cos \beta_1 = 0,707(1 - K_w) \frac{R^2}{E\delta} q'_n,$$

$$B_1 \sin \beta_1 = \left[2,41 \frac{\nu^2}{\lambda} \left(-\frac{\mu}{\lambda} - K_u \right) + 4,12(1 - K_w) \right] \frac{R^2}{E\delta} q'_n, \quad (2.18)$$

$$B_2 \cos \beta_2 = 1,707(K_w - 1) \frac{R^2}{E\delta} q'_n,$$

$$B_2 \sin \beta_2 = \left[1,707(K_w - 1) + \frac{\nu^2}{\lambda} \left(K_u - \frac{\mu}{\lambda} \right) \right] \frac{R^2}{E\delta} q'_n.$$

Имея значения постоянных интегрирования, можно считать, что поставленная задача решена.

3. В этой заметке ради сокращения изложения пользовались упрощенным разрешающим уравнением В. В. Новожилова, которое изучено достаточно полно (1, 3, 4). Однако поставленная задача, в случае необходимости, может быть разрешена и с помощью более точных уравнений.

Изложенный прием расчета останется без изменений и в случае, когда внешняя нагрузка по длине оболочки меняется, т. е. когда $p = p(\xi)$.

Институт строительных материалов
и сооружений Академии наук Армянской ССР

Ս. Ա. ՀԱՄԲՐԱՆՈՒՄՅԱՆ

**Սիմետրիկ բռնված, ընդերկայնական կողեր ունեցող
գլանային թաղանթների հաշվումը**

Աշխատանքում բերված է կամայական թվով ընդերկայնական կողեր ունեցող գլանային թաղանթի հաշվման մի եղանակ: Դիտված է այն դեպքը, երբ թաղանթը բռնված է սիմետրիկ և հավասարաչափ բաշխված բռնով: Նշվում է, որ առաջարկված եղանակը կիրառելի է նաև այն դեպքում, երբ բերթ թաղանթի առանցքի նկատմամբ բաշխված է սիմետրիկ, իսկ ըստ թաղանթի երկարության փոփոխվում է ինչ որ սրենքով:

ЛИТЕРАТУРА — ԿՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ Л. Л. Гольденвейзер, Расчет тонкостенных оболочек и складок, опирающихся на жесткие диафрагмы, с учетом изгибающих и крутящих моментов, сб. Пластинки и оболочки, Гостройиздат, 1939. ² В. В. Новожилов, Теория тонких оболочек, Судпромгиз, 1951. ³ А. Л. Гольденвейзер, ПММ, т., XIII, вып. I (1949). ⁴ С. А. Амбарцумян, ПММ, т. XVIII, вып. 3 (1954).