УДК 512
Математика

Лиана АБРАМЯН
Кафедра математики АрГУ , к.ф.м.н.
E-mail: liana_abrahamyan@mail.ru

ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ СВЕРХТОЖДЕСТВ , ОПРЕДЕЛЕННЫХ ПО РАВЕНСТВУ $((x, y), u, v) = (x (y, u), v)$

В данной работе характеризуются сверхтождества, определенные по равенству $((x, y), u, v) = (x (y, u), v)$ в фукционально-нетривиальных 2q- и 3q-алгебрах.

Ключевые слова: *{2,3} -алгебра, 2q-алгебра, 3q-алгебра, обратимая алгебра, сверхтождество.*

Լ.Աբրահամյան

$((x, y), u, v) = (x (y, u), v)$ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒԹՅԱՄԲ ՈՐՈՇՎՈՂ ԳԵՐՆՈՒՅՆՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԲՆՈՒԹԱԳՐՈՒՄԸ

Սույն աշխատանքում բնութագրվում են $((x, y), u, v) = (x (y, u), v)$ հավասարությամբ որոշվող գերնույնությունները ֆունկցիոնալ-ոչ տրիվիալ 2q-հանրահաշիվներում և 3q-հանրահաշիվներում:

Բանալի բառեր՝ *{2,3}-հանրահաշիվ, 2q-հանրահաշիվ, 3q-հանրահաշիվ, հակադարձելի հանրահաշիվ, գերնույնություն:*

L.Abrahamyan

CHARACTERIZATION OF HYPERIDENTITIES DEFINED BY THE EQUATION $((x,y),u,v) = (x(y.u), v)$

In this paper we characterize the hyperidentities defined by the equation $((x, y), u, v) = (x (y, u), v)$ which are satisfied in functionally non-trivial 2q-algebras and 3q-algebras.
Keywords: *{2,3}-algebra, 2q-algebra, 3q-algebra, invertible algebra, hyperidentity.*

1^0 **Введение.** Обычно в алгебре изучаются свойства первого или второго порядка, т.е. такие свойства которые выражаются формулами первого или второго порядка. Отличие формул первого и второго порядка заключается в том, что в формулах второго порядка кванторные символы существования и общности связывают не только предметные переменные но и функциональные (предикатные) переменные. Один из таких классов формул называется сверхтождеством.

Общее понятие сверхтождества рассматривал Ю.М. Мовсисян ([1-4]), как формулу языка второго порядка следующего вида:

$$\forall X_{1,\ldots,}X_m \forall x_{1,\ldots,}x_n (w_1 = w_2)$$

где $X_{1,\ldots,}X_m$ - функциональные переменные, а $x_{1,\ldots,}x_n$ - предметные переменные в словах (термах) w_1, w_2. О формулах второго порядка см. ([5-8]).

Обычно сверхтождества записываются без кванторной приставки, понимая их выполнимость(истинность) в алгебрах в следующем смысле. В алгебре (Q, Σ) выполняется сверхтождество

$$w_1 = w_2 \,, \qquad (*)$$

если равенство $(*)$ справедливо, когда в нем каждая предметная переменная и каждая функциональная переменная заменяются соответственно любым элементом из Q и любой операцией соответствующей арности из Σ (предполагается возможность такой замены, т.е. имеет место включение $\{|X_1|,\ldots,|X_m|\} \subseteq \{|A| \ \ |A \in \Sigma\}$, где $|S|$ арность S). Число m называется функциональным рангом сверхтождества; если m>1, то сверхтождество называется нетривиальным.

Например, в дистрибутивной решетке $(Q,+,\cdot)$ выполняется следующие сверхтождества идемпотентности, коммутативности, ассоциативности и дистрибутивности:

$$X(x, x)=x\,,$$
$$X(x, y)= X(y, x),$$
$$X(X(x, y),z) = X(x,X(y,z)).$$
$$X(x, Y(y,z)) = Y(X(x,y), X(x,z)).$$

Доказано ([3,4]) и обратное утверждение, что любое сверхтождество многообразия дистрибутивных решеток является следствием этих четырех сверхтождеств. Кроме того в ([3,4]) характеризованны также сверхтождества многообразий всех решеток, модулярных решеток, а также многообразие булевых алгебр. В ([7,8]) рассмотрены сверхтождества в термальных алгебрах или в алгебрах полиномов. Они доказали, что в полиномиальных алгебрах групп или полугрупп сверхтождества не имеют конечного базиса.

Алгебра с бинарными и тернарными операциями называется {2,3} - алгеброй.

{2,3} - алгебра (Q, Σ) называется функционально-нетривиальной если в ней множество бинарных и множество тернарных операций неодноэлементно.

{2,3} - алгебра (Q, Σ) называется обратимой алгеброй, если в ней каждая операция квазигрупповая.

{2,3} -алгебра (Q, Σ) называется 2q-алгеброй, если в ней существует бинарная квазигрупповая операция и 3q-алгеброй, если в ней существует тернарная квазигрупповая операция.

n-группоид *Q(A)* называется n-квазигруппой или n-арной квазигруппой, если в равенстве A $(x_1^n) = x_{n+1}$ всякие элементы n из x_1^{n+1} однозначно определяют n+1-й. Иными словами, *Q(A)* называется n-квазигруппой, если уравнение

$$A\,(a_1^{i-1}, x, a_{i+1}^n) = b$$

однозначно разрешимо для любых a_1^n, $b \in Q$ и для любого $i = 1,2,\ldots, n$.

При n=2 получаем 2-квазигруппу или обычную (бинарную) квазигруппу, а при n=3 получаем 3-квазигруппу или тернарную квазигруппу.

2^0. **Основной рзультат.**

Основным результатом данной статьи является следующая теорема:

Теорема. 1). Если в фукционально-нетривиальной 2q-алгебре выполняется нетривиальное сверхтождество, определенное равенством

$$((x, y), u, v) = (x\,(y, u), v),$$

тогда в нем каждая тернарная функциональная переменная повторяется хотя бы два раза. Следовательно, каждое такое сверхтождество может быть только функционального ранга 2 или 3 и одного из следующих видов:

$$X(Y(x, y), u, v) = X\,(x\,Y\,(y, u), v),$$
$$X(Y(x, y), u, v) = X\,(x\,Z\,(y, u), v).$$

2). Если в функционально-нетривиальной 3q-алгебре выполняется нетривиальное сверхтождество определенное равенством

$$((x, y), u, v) = (x\,(y, u), v),$$

тогда в нем каждая бинарная функциональная переменная повторяется хотя бы два раза. Следовательно, каждое такое сверхтождество может быть только функционального ранга 2 или 3 и одного из следующих видов:

$$Y(X(x, y), u, v) = Z(x\,X(y, u), v),$$
$$Y(X(x, y), u, v) = Y(x\,X(y, u), v),$$

Доказательство: 1). Пусть в фукционально-нетривиальной 2q-алгебре выполняется нетривиальное сверхтождество, определенное равенством

$$((x, y), u, v) = (x\,(y, u), v).$$

Рассмотрим произвольное такое сверхтождество:

$$X(Y(x, y), u, v) = Z(x, T\,(y, u), v),$$

Предположим, что в этом сверхтождестве функциональная переменная X встречается всего один раз и A - бинарная квазигрупповая операция из Σ. Тогда имеем:

$$X_1(A(x,y),u,v) = Z(x,T(y,u),v) \tag{1}$$

$$X_2(A(x,y),u,v) = Z(x,T(y,u),v) \quad (2)$$

где $X_1 \neq X_2$ и $X_1, X_2 \in \Sigma$

Правые части равенств (1) и (2) равны, следовательно равны и их левые части, т.е. имеет место :

$$X_1(A(x,y),u,v) = X_2(A(x,y),u,v)$$

Т.к. бинарная операция A обратима (квазигрупповая), то из равенства

$$X_1(A(x,y),u,v) = X_2(A(x,y),u,v)$$

следует

$$X_1(A(x,y),u,v) = X_2(A(x,y),u,v)$$
$$X_1(t,u,v) = X_2(t,u,v),$$

где $t + A(x,y) \in Q$ - произвольный элемент из Q. Получили противоречие.

Следовательно, функциональная переменная X должна повторяться в рассматриваемом сверхтождестве.

2). Аналогично доказывается, что бинарная функциональная переменная Y также должна повторяться, если данное сверхтождество выполняется в функционально-нетривиальной 3q-алгебре.

Действительно, пусть функциональная пременная Y встречается всего один раз. Здесь полагаем *X=B* , где тернарная B квазигрупповая операция из Σ . Тогда имеем:

$$B(Y_1((x,y),u,v) = Z(x,T(y,u),v),$$
$$B(Y_2((x,y),u,v) = Z(x,T(y,u),v),$$

где $Y_1 \neq Y_2$ и $Y_1, XY_2 \in \Sigma$. Следовательно,

$$B(Y_1((x,y),u,v) = B(Y_2((x,y),u,v)$$

и поскольку B - тернарная квазигрупповая операция, то здесь можно сократить на u, v:

$$Y_1(x,y) = Y_2(x,y)$$

т.е. $Y_1 = Y_2$. Получили противоречие.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мовсисян Ю.М.* , Введние в теорию алгебр со сверхтождествами, Изд-во ЕГУ, Ереван, 1986
2. *Мовсисян Ю.М.* , Сверхтождества и сверхмногообразия в алгебрах, Ид-во ЕГУ, Ереван, 1990
3. *Movsisyan Yu.M.,* Hyperidentities in algebras and varieties, //Uspekhi Mathematicheskikh Nauk, 53(1998), pp.61-114. English traslation in Russian Mathematical Surveys 53 (1998), pp.57-108
4. *Movsisyan Yu.M.*, Hyperidentities and hypervarieties, Scientiae Mathematicae Japonicae, 54(3),(2001), 595-640.
5. *Malcev A.I.*, Some problems in the theory of classes of models, Proceedings of IV All-Union Mathematical Congress, Leningrad,I, Publishing House of the USSR Academy of Sciences, Leningrad, 169-198(1963)
6. *Church A.,* Introduction to mathematical logic, vol. I, Princeton University Press, Princeton,1956
7. *Bergman G.M.,* Hyperidentities of groups and semigroups, A equationes Math. 23(1981), 50-65
8. *Taylor W.*, Hyperidentities and hypervarieties, A equationes Math. 23(1981), 111-127.

Հոդվածը տպագրության է երաշխավորել խմբագրական կոլեգիայի անդամ, ֆ.մ.գ.թ. Գ.Հ.Սահակյանը: