

О МАТЕМАТИЧЕСКОМ МОДЕЛИРОВАНИИ ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО
ПРОЦЕССА, ОБСЛУЖИВАЕМОГО ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКИМ
МАНИПУЛЯТОРОМ

Гукасян А. А.

Ключевые слова: технологический процесс, адаптивный электромеханический манипулятор, конвейер, фазовые траектории, синтез управления.

Ghukasyan A.A.

About Mathematical Modeling of a Technological Process Served by an
Electromechanical Manipulator

Keywords: technological process, adaptive electromechanical manipulator, conveyor, phase trajectories, synthesis control.

A mathematical model of the technological process serviced by an adaptive electromechanical manipulator is constructed. The technological process consists of a manipulator, conveyors and a trolley with parts. Various variants of the synthesis of optimal and quasi-optimal in time conveyor service, which can take place within the framework of the model under consideration, are investigated. Qualitative pictures of the phase trajectories of the manipulator movement in the service process are constructed. The control functions are determined depending on the phase coordinates of conveyors and parts, taking into account that during the movement of the manipulator, various external and internal forces can act on the system. On the phase plane, those areas are highlighted, within which it is possible to service the conveyors by the manipulator.

Ղուկասյան Ա. Ա.

Էլեկտրամեխանիկական մանիպուլյատորով սպասարկվող տեխնոլոգիական պրոցեսի
մաթեմատիկական մոդելավորման մասին

Հիմնաբառեր. տեխնոլոգիական պրոցես, ադապտիվ էլեկտրամեխանիկական մանիպուլյատոր, կոնվեյեր, ֆազային հետագիծ, դեկավարման սինտեզ:

Կառուցված է տեխնոլոգիական պրոցեսի մաթեմատիկական մոդել, որը սպասարկվում է ադապտիվ /կողմնորոշվող/ էլեկտրամեխանիկական մանիպուլյատորի միջոցով: Տեխնոլոգիական պրոցեսը կազմված է մանիպուլյատորից, կոնվեյերներից և դետալներով սայլակից: Հետազոտված է կոնվեյերների օպտիմալ և կվազիօպտիմալ ըստ ժամանակի մատակարարման սինթեզի տարբեր խնդիրներ, որոնք կարող են տեղի ունենալ հետազոտվող մոդելի շրջանակներում: Կառուցված են մատակարարման ընթացքում մանիպուլյատորի շարժման ֆազային հետագծերի որակական պատկերները: Որոշված են կոնվեյերների և բեռի ֆազային կոորդինատներից կախված դեկավարման ֆունկցիաները հաշվի առնելով, որ շարժման ընթացքում մանիպուլյատորի վրա կարող են ազդել ներքին և արտաքին տարբեր ուժեր: Ֆազային հարթության վրա առանձնացված են այն տիրույթները, որոնց շրջանակներում հնարավոր է կոնվեյերների սպասարկումը մանիպուլյատորի միջոցով:

Построена математическая модель технологического процесса, обслуживаемого адаптивным электромеханическим манипулятором. Технологический процесс состоит из манипулятора, конвейеров и тележки с деталями. Исследованы различные варианты синтеза оптимального и квазиоптимального по времени обслуживания конвейеров, которые могут иметь место в рамках рассматриваемой модели.

Построены качественные картины фазовых траекторий движения манипулятора в процессе обслуживания. Определены управляющие функции в зависимости от фазовых координат конвейеров и деталей, учитывая, что во время движения манипулятора на систему могут действовать различные внешние и внутренние силы. На фазовой плоскости выделены те области, в рамках которых возможно обслуживание конвейеров манипулятором.

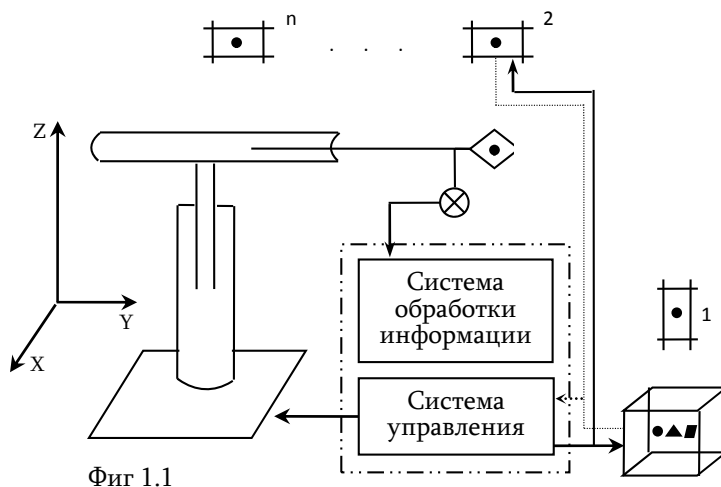
Введение. Обслуживание технологического процесса с помощью манипуляционных роботов имеет определенный интерес как для практики, так и для теории математического моделирования и управления движениями. На практике в системе ГАП могут иметь место различные задачи обслуживания, которые могут быть решены с использованием манипуляторов с программным управлением (порядок обслуживания и время встреч заранее определены) или адаптивного манипуляционного робота, оснащенного системой технического зрения, чувствительными датчиками и другими элементами искусственного интеллекта. Простейшими датчиками являются датчики контактного типа. Эти датчики чаще всего располагают на наружных и внутренних поверхностях захватного устройства манипулятора [1-9]. Датчики усилия позволяют регулировать усилие схвата пропорционально массе захватываемых объектов. Для измерения усилий применяют два способа: по упругой деформации чувствительного элемента и по перемещению подвижной части чувствительного элемента в зависимости от массы объектов. Для измерения малых усилий пригодны различные конструкционные решения с использованием проволочных и полупроводниковых тензометров сопротивления или токопроводящих полимеров. Для измерения больших усилий применяют магнитоупругие элементы, а для точных измерений – тарированные пружины и другие упругочувствительные элементы. Адаптивные манипуляционные роботы, оснащенные датчиками, имеют возможность в процессе обслуживания по разным критериям определить последовательность целей. На фиг. 1.2 приведена одна из схем чувствительного схвата манипулятора с тарированными пружинами. В работах [10-14] приводятся математические модели процессов обслуживания манипулятором технологического процесса, а также обсуждаются различные варианты оптимизации управляемого процесса. Эти исследования являются продолжением работы [10]. Во всех случаях время нахождения манипулятора около каждого объекта не учитывается, то есть считается, что в момент времени t_i манипулятор обслуживает объект под номером i и мгновенно направляется к другому объекту (предположение имеет место, поскольку $\tau / (T - t_0) \ll 1$, где τ – время нахождения манипулятора около объекта, а $(T - t_0)$ – время процесса обслуживания). Отметим, что если последовательность обслуживания манипулятором объектов фиксирована, то задача на каждом этапе движения $[t_{i-1}, t_i]$ сводится к обычной задаче управления или оптимального управления с фиксированными или свободными краевыми условиями [15-18]. В задачах обслуживания актуальными являются также вопросы управления с переменной и не фиксированной массой [19,20]. В случае, когда последовательность обслуживания и моменты встреч с объектами не фиксированы, то

первоначальную задачу управления можно сформулировать как задачу нахождения последовательностей объектов обслуживания и моментов встреч, в процессе которых минимизирующий функционал будет зависеть также от последовательности встреч. Решение такой задачи существует, поскольку число возможных последовательностей встреч с объектами конечно. С точки зрения технологического процесса немаловажным критерием качества является также рациональное использование технологического участка ($S \rightarrow \min$). Этот критерий является геометрическим и налагает на кинематику движения манипулятора дополнительное ограничение [10]. Отметим, что в общем случае задачи обслуживания являются многоэтапными, где выбор критерия оптимальности для всего процесса и для каждого этапа зависят от технологического назначения.

Ниже приводится математическая модель простого и абстрактного управляемого технологического процесса (Фиг.1.1), где предполагается, что адаптивный электромеханический манипулятор, с помощью датчика усилий определяя по деформации упругих элементов вес детали, на каждом этапе осуществляет оптимальное или квазиоптимальное по времени ($T \rightarrow \min$) обслуживание конвейеров с учетом внешних или внутренних факторов. Исследованы различные варианты синтеза обслуживания на каждом этапе, которые могут иметь место в рамках рассматриваемой модели. Построены качественные картины фазовых траекторий движения манипулятора и определены управляющие функции в зависимости от фазовых координат. Приведенная модель технологического процесса и поставленные задачи обслуживания являются содержательными и представляют также определенный интерес в области теоретической механики и математической теории управления движений.

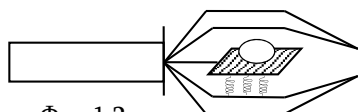
1. Математическая модель технологического процесса. Рассматривается управляемый технологический процесс, который состоит из нескольких (n) конвейеров, подвижной тележки с деталями весом m_i^* ($i = 1, 2, \dots, n$) и адаптивным электромеханическим манипулятором (Фиг.1.1). Задача манипулятора состоит в том, что манипулятор должен оптимальным образом переложить нужные детали из тележки на конвейеры. Здесь последовательность обслуживания конвейеров (целей), а также время встречи с ними не фиксированы. Однако адаптивный манипулятор с помощью датчика усилий, расположенного во внутренней поверхности захватного устройства (Фиг.1.2), определяя по деформации упругих элементов вес деталей, должен детали с весом m_i^* ($i = 1, 2, \dots, n$) переложить на i -ый ($i = 1, 2, \dots, n$) конвейер, соответственно. Нужно отметить, что порядок подачи деталей из тележки происходит произвольным образом. Рассматриваемый процесс можно назвать также процессом сортировки деталей. Принципиальная схема работы чувствительного схвата манипулятора с тарированными пружинами

представлена на фиг. 1.3. Представленная схема с локальным управлением со многими другими составляют часть системы обработки информации (фиг.1.1) (на фиг. 1.3 приняты следующие обозначения: D- деталь, СЛУ- система локального управления, \otimes - измерительный прибор, СУ-система управления, Δl_i ($i = 1, 2, \dots, n$) - относительные удлинение тарированных пружин, m_i^* ($i = 1, 2, \dots, n$) - вес детали).



Фиг 1.1

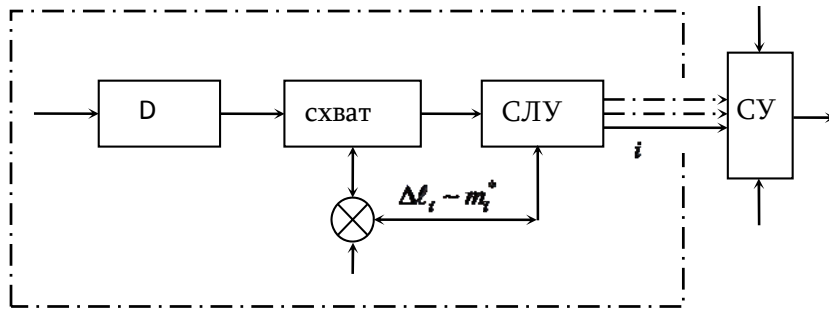
Электромеханическая модель управляемого манипулятора имеет пять степеней подвижности, кинематическая схема которой приведена на Фиг. 1.1. Манипулятор состоит из подвижного основания, стойки, вертикально ориентированного вала, направляющей и стрелы со схватом. Все подвижные части манипулятора считаются абсолютно твердыми телами. Степени подвижности манипулятора, соответствуют движению основания на плоскости OXY , перемещению вала в вертикальном направлении, его повороту вокруг вертикальной оси и перемещению стрелы вдоль направляющей. Указанным степеням подвижности соответствуют обобщенные координаты: $x_0(t), y_0(t)$ положение основания; $z(t)$ - расстояние от связанной с основанием горизонтальной плоскости OXY до стрелы; $\varphi(t)$ - угол поворота стрелы относительно оси вала; $y(t)$ - расстояние центра масс стрелы до оси вала. Управление по указанным степеням свободы осуществляется электромагнитными силами и моментами nM, n_2F_2, n_3F_3 , соответственно (n, n_2, n_3 - коэффициенты пропорциональности). Предполагается, что при движении манипулятора по указанным степеням



Фиг 1.2

30

подвижности могут действовать постоянные по величине внешние или неучтенные внутренние силы или моменты M^0, F_2^0, F_3^0 , соответственно.



Фиг. 1.3

Введем обозначения: l - полная длина стрелы (стрела моделируется как однородный стержень с одинаковым сечением); m_1 - суммарная масса направляющего цилиндра и вала; J_1 - суммарный момент инерции цилиндра и вала относительно оси, параллельной OZ и проходящей через их центр масс; m_2 - масса стрелы; J_2 - центральный момент инерции стрелы; m_0 - суммарная масса основания и стойки; \mathbf{R} - радиус-вектор центра масс стрелы относительно начала координат системы $OXYZ$ (точки O); \mathbf{R}_1 - радиус-вектор груза на схвате относительно точки O ; \mathbf{r} - радиус-вектор основания манипулятора относительно точки O .

В инерциальной системе координат $OXYZ$ векторы \mathbf{R} , \mathbf{R}_1 , и \mathbf{r} имеют вид

$$\mathbf{R}(t) = \begin{pmatrix} x_0(t) + y(t) \sin \varphi \\ y_0(t) + y(t) \cos \varphi \\ 0 + z(t) \end{pmatrix}, \mathbf{R}_1(t) = \begin{pmatrix} x_0(t) + \left(y(t) + \frac{l}{2}\right) \sin \varphi \\ y_0(t) + \left(y(t) + \frac{l}{2}\right) \cos \varphi \\ 0 + z(t) \end{pmatrix}, \quad (1.1)$$

$$\mathbf{r}(t) = (x_0(t), y_0(t), 0)^T$$

Фазовые положения деталей в тележке относительно системы координат $OXYZ$ определим через $(x_i^0(t), y_i^0(t), z_i^0(t), \dot{x}_i^0(t), \dot{y}_i^0(t), \dot{z}_i^0(t))$, а текущие местоположения деталей на конвейерах – через координаты $(y_i^*(t), \varphi_i^*(t), z_i^*(t), \dot{y}_i^*(t), \dot{\varphi}_i^*(t), \dot{z}_i^*(t))$.

Здесь предполагается, что управляющей стороне известна динамика движения конвейеров и тележки, а также параметры $(x_i^0(t), y_i^0(t), z_i^0(t), \dot{x}_i^0(t), \dot{y}_i^0(t), \dot{z}_i^0(t))$; $(y_i^*(t), \varphi_i^*(t), z_i^*(t), \dot{y}_i^*(t), \dot{\varphi}_i^*(t), \dot{z}_i^*(t))$ в момент времени t .

Кинетическая и потенциальная энергия движения манипулятора имеет вид

$$K_i = \frac{J_1}{2} \dot{\varphi}^2 + \frac{m_1}{2} \dot{z}^2 + \frac{m_0 + m_1}{2} (\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2) + m_2 \frac{\dot{\mathbf{R}}^2}{2} + m_i^* \frac{\dot{\mathbf{R}}_1^2}{2}; \quad (1.2)$$

$$\Pi_i = (m_1 + m_2 + m_i^*) gz, (i = 1, 2, \dots, n)$$

Предполагая, что движение по степеням подвижности происходит поэтапно при заданном движении основания $(\ddot{x}_0 = const, \ddot{y}_0 = const)$, уравнение движения манипулятора можно представить в виде

$$\ddot{\mathbf{a}}_i = \mathbf{Q}_i - \mathbf{W}_i \quad (1.3)$$

где

$$\mathbf{a}_i = (\alpha_{1i}, \alpha_{2i}, \alpha_{3i})^T, \mathbf{Q}_i = (Q_{1i}, Q_{2i}, Q_{3i})^T, (\alpha_{1i} = \varphi, \alpha_{2i} = y, \alpha_{3i} = z);$$

$$Q_{1i} = nM(t) / \left[J_1 + J_2 + m_2 y^2 + m_i^* (y + l/2)^2 \right];$$

$$Q_{2i} = n_2 F_2 / (m_2 + m_i^*); Q_{3i} = n_3 F_3 / (m_1 + m_2 + m_i^*);$$

$$\mathbf{W}_i = (w_{1i}, w_{2i}, w_{3i})^T; w_{1i} = M^0 / \left[J_1 + m_2 y^2 + J_2 + m_i^* (y + l/2)^2 \right];$$

$$w_{2i} = \ddot{x}_0 \sin \varphi_* + \ddot{y}_0 \cos \varphi_* + F_2^0 / (m_2 + m_i^*);$$

$$w_{3i} = F_3^0 / (m_1 + m_2 + m_i^*) - g; (i = 1, 2, \dots, n)$$

(φ_* - угол между осями системы координат $OXYZ$ и вектора ускорения $\ddot{\mathbf{r}} = (\ddot{x}_0, \ddot{y}_0, 0)$ основания манипулятора)

К уравнениям (1.3) необходимо добавить также уравнения баланса напряжений в цепях роторов электродвигателей приводов [7-9]

$$L_j \dot{I}_j + R_j I_j + k_j n_j \dot{\alpha}_{ji} = u_j, |u_j| \leq U_j, (j = 1, 2, 3; i = 1, 2, \dots, n) \quad (1.4)$$

Здесь L_j - коэффициенты индуктивности обмоток роторов электродвигателей приводов, R_j - электрические сопротивления обмоток роторов электродвигателей приводов, I_j - ток в цепях роторов приводов, k_j - коэффициенты пропорциональности между электрическим током в цепях роторов электродвигателей приводов и усилиями $(Q_j = k_j I_j)$, u_j - электрические напряжения, подаваемые на вход электродвигателей приводов.

Нужно отметить, что на этапах обслуживания, когда движение манипулятора происходит без груза, в (1.3) необходимо положить $m_i^* = 0 (i = 1, 2, \dots, n)$.

Используя соотношение $(Q_j = k_j I_j) (j = 1, 2, 3)$, из (1.3) и (1.4) получим

$$L_j \ddot{\alpha}_{ji} + R_j \ddot{\alpha}_{ji} + k_j^* \dot{\alpha}_{ji} = u_j^* - w_j^*, \quad (1.5)$$

где $u_j^* = k_j u_j, w_j^* = R_j w_j, k_j^* = k_j^2 n_j, (i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, 3)$

В дальнейшем предполагаем, что $L_j \ll R_j$. При этом систему уравнений (1.5) в нулевом приближении можно представить в виде [1,21]

$$R_j \ddot{\alpha}_{ji} + k_j^* \dot{\alpha}_{ji} = \tilde{u}_j, \quad (1.6)$$

где $\tilde{u}_j = u_j^* - w_j^*, (i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, 3)$.

(отметим, что уравнения (1.5) при $L_j \ll R_j$ имеет вид $\varepsilon L_j^0 \ddot{\alpha}_{ji} + R_j \ddot{\alpha}_{ji} + k_j^* \dot{\alpha}_{ji} = u_j^* - w_j^*$, где $\varepsilon \ll 1, L_j^0 \sim 1, i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, 3$ и представляет систему сингулярно и регулярно возмущенных дифференциальных уравнений с малым параметром при старших производных [21,22])

Случай, когда во время движения манипулятора по степеням подвижности не действуют дополнительные внешние или внутренние усилия ($w_j^* \equiv 0, j = 1, 2, 3$) в [21], при ограничениях на управляющие воздействия $|u_j^*| \leq u_j^0, j = 1, 2, 3$ и при условиях $L_j \ll R_j (j = 1, 2, 3)$, в нулевом приближении подробно исследована задача об оптимальном по быстродействию управления транспортными движениями электромеханического манипуляционного робота с тремя степенями свободы. В пренебрежении взаимным влиянием различных степеней свободы определено оптимальное управление в форме синтеза, обеспечивающее наискорейшее приведение робота в заданную конфигурацию с торможением движения в конце процесса.

В силу принципа максимума Л.С.Понтрягина оптимальное управление $u_j^{*o} (j = 1, 2, 3)$ релейное [18]. Корни характеристических уравнений (1.6) вещественные $(\lambda_{j1} = 0, \lambda_{j2} = -k_j^*/R_j, (j = 1, 2, 3))$, и следовательно, каждое из управлений $u_j^{*o} (j = 1, 2, 3)$ имеет не более одной точки переключения на оптимальной траектории. Отсюда вытекает, что в общем случае траектория оптимального обслуживания при $w_j^* \equiv 0, j = 1, 2, 3$ на фазовой плоскости $(\alpha_j(t), \dot{\alpha}_j(t))$ состоит из отрезков двух фазовых кривых, одна из которых отвечает значению $u_j^{*o} = u_j^0 (j = 1, 2, 3)$, а другая - $u_j^{*o} = -u_j^0 (j = 1, 2, 3)$. Один из отрезков фазовых кривых, составляющих оптимальную траекторию, проходит через конечную точку $(\alpha_j^T, \dot{\alpha}_j^T) (j = 1, 2, 3)$.

Принимая за основу решение задачи оптимального быстродействия при $w_j^* \equiv 0, j=1, 2, 3$, построим фазовые траектории и синтез управления квазиоптимального обслуживания манипулятором объектов при управлении $\tilde{u}_j = u_j^* - w_j^* (j=1, 2, 3)$.

Ограничения на управляющие воздействия \tilde{u}_j представим в виде

$$-u_j^0 - w_j^* \leq \tilde{u}_j(t) \leq u_j^0 - w_j^*, (i=1, 2, \dots, n; j=1, 2, 3) \quad (1.7)$$

где u_j^0 ограничение на u_j^* .

При ограничении (1.7) фазовые траектории квазиоптимального обслуживания манипулятором конвейера при $w_j^* \neq 0, j=1, 2, 3$ на фазовой плоскости $(\alpha_j(t), \dot{\alpha}_j(t))$ состоит из отрезков двух фазовых кривых, одна из которых отвечает значению $\tilde{u}_j^o = u_j^0 - w_j^* (j=1, 2, 3)$, а другая - $\tilde{u}_j^o = -u_j^0 - w_j^* (j=1, 2, 3)$. Поскольку система уравнений (1.6) и ограничения (1.7), при $L_j \ll R_j (j=1, 2, 3)$ имеют место на каждом этапе обслуживания, то в дальнейшем можно пропускать индекс i .

2. Приближенный синтез обслуживания. Построим синтез квазиоптимального обслуживания для систем второго порядка (1.6), приводящий манипулятор из произвольного начального состояния

$$\alpha_j(t_0) = \alpha_j^0, \dot{\alpha}_j(t_0) = \dot{\alpha}_j^0 (j=1, 2, 3) \quad (2.1)$$

в произвольное конечное состояние

$$\alpha_j(T) = \alpha_j^T, \dot{\alpha}_j(T) = \dot{\alpha}_j^T (j=1, 2, 3) \quad (2.2)$$

при ограничениях (1.7), за возможное минимальное время ($T \rightarrow \min$).

Не нарушая общности, в качестве произвольного начального состояния можно взять положение деталей на тележке, а в качестве конечного состояния - положение деталей на конвейерах (напомним, что по предположению управляющей стороне известна (2.1) и (2.2)).

Общее решение уравнения (1.6) при $\tilde{u}_j = const (j=1, 2, 3)$ имеет вид

$$\alpha_j = \alpha_j^0 - \frac{\tilde{u}_j}{k_j^{*2}} R_j \ln \frac{\tilde{u}_j - k_j^* \dot{\alpha}_j}{\tilde{u}_j - k_j^* \dot{\alpha}_j^0} + \frac{R_j}{k_j^*} (\dot{\alpha}_j^0 - \dot{\alpha}_j), (j=1, 2, 3) \quad (2.3)$$

где $\dot{\alpha}_j^0, \dot{\alpha}_j^0$ - значения переменных $\alpha_j, \dot{\alpha}_j$, соответственно в некоторый начальный момент времени t_0 (2.1).

Поскольку выражение, стоящее под знаком логарифма, должно быть положительным, из (2.3) следует, что на любой фазовой траектории семейства (2.3) выполняются неравенства

$$\dot{\alpha}_j < \tilde{u}_j / k_j^*, \dot{\alpha}_j^0 < \tilde{u}_j / k_j^* \quad (2.4)$$

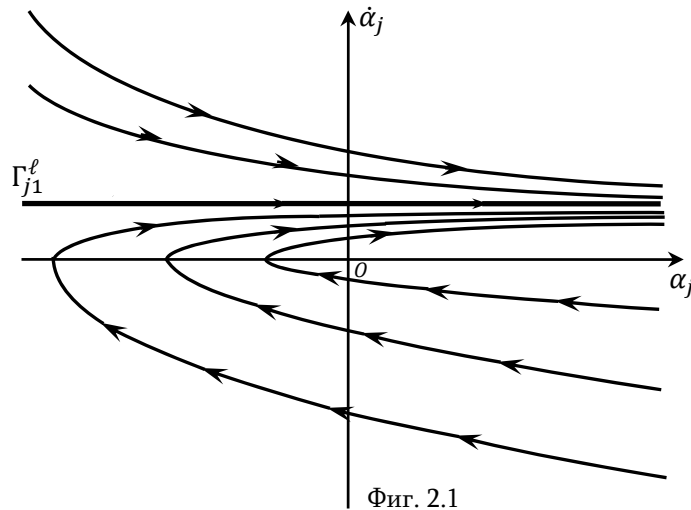
или

$$\dot{\alpha}_j > \tilde{u}_j/k_j^*, \omega_j^0 > \tilde{u}_j/k_j^*, (j=1,2,3) \quad (2.5)$$

2.1 Синтез квазиоптимального обслуживания в случае

$$\tilde{u}_j = u_j^0 - w_j^*, u_j^0 > w_j^*, (j=1,2,3).$$

Из производной функции (2.3) по $\dot{\alpha}_j$ ($\partial\alpha_j/\partial\dot{\alpha}_j = R_j\dot{\alpha}_j/(u_j^0 - w_j^* - k_j^*\dot{\alpha}_j)$) следует, что в области (2.4) функция $\alpha_j(\dot{\alpha}_j)$ монотонно возрастает при $\dot{\alpha}_j > 0$ и монотонно убывает при $\dot{\alpha}_j < 0$, а в области (2.5), где $\dot{\alpha}_j > 0$ функция $\alpha_j(\dot{\alpha}_j)$ монотонно убывает. Кривые семейства (2.3) имеют асимптотику $\dot{\alpha}_j = \tilde{u}_j/k_j^*$. Отметим, что эта кривая также является фазовой траекторией уравнения, отвечающей стационарному вращению соответствующего звена манипулятора с постоянной скоростью.



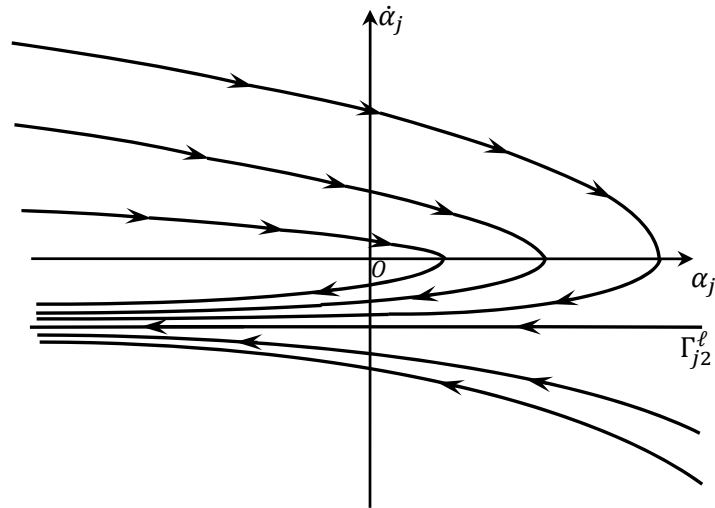
Фиг. 2.1

На фиг. 2.1 изображены фазовые кривые уравнения (1.6), отвечающие значению $\tilde{u}_j = u_j^0 - w_j^*$ ($u_j^0 > w_j^*$), при $w_j^* = 0$, $w_j^* > 0$ и $w_j^* < 0$ ($j=1,2,3$), соответственно. Стрелками показано направление движения изображающей точки. Приняты обозначения Γ_{j1}^l ($j=1,2,3; l=1,2,3$) для асимптотики $\dot{\alpha}_j = \tilde{u}_j/k_j^*$, которые означают $\Gamma_{j1}^1 : \dot{\alpha}_j = u_j^0/k_j^*$ ($w_j^* = 0$), $\Gamma_{j1}^2 : \dot{\alpha}_j = (u_j^0 - w_j^*)/k_j^*$ ($w_j^* > 0$), $\Gamma_{j1}^3 : \dot{\alpha}_j = (u_j^0 - w_j^*)/k_j^*$ ($w_j^* < 0$). Все асимптотики в рассматриваемом случае находятся на верхней полуплоскости. Фазовые траектории обслуживания при $w_j^* = 0$

$(j = 1, 2, 3)$ являются оптимальными базовыми траекториями, а время движения по этим траекториям минимальным. В остальных случаях, где $w_j^* \neq 0 (j=1, 2, 3)$, здесь и в дальнейшем, фазовые траектории являются квазиоптимальными, которые и обусловлены влиянием внешних или внутренних сил или моментов на решения задачи оптимального обслуживания.

Аналогично построим семейства фазовых кривых уравнения (1.6), отвечающие значению $\tilde{u}_j = -(u_j^0 + w_j^*)$ ($u_j^0 > w_j^*$), при $w_j^* = 0$, $w_j^* > 0$ и $w_j^* < 0$. Из выражений для производной функции (2.3) по $\dot{\alpha}_j$ при $\tilde{u}_j = -(u_j^0 + w_j^*)$, $(\partial \alpha_j / \partial \dot{\alpha}_j = -R_j \dot{\alpha}_j / (u_j^0 + w_j^* + k_j^* \dot{\alpha}_j))$ следует, что в области (2.5), где $\dot{\alpha}_j > -(u_j^0 + w_j^*) / k_j^*$, $\omega_j^0 > -(u_j^0 + w_j^*) / k_j^*$ функция $\alpha_j(\dot{\alpha}_j)$ монотонно убывает при $\dot{\alpha}_j > 0$ и монотонно возрастает при $\dot{\alpha}_j < 0$, а в области (2.4), где $\dot{\alpha}_j < -(u_j^0 + w_j^*) / k_j^*$, $\omega_j^0 < -(u_j^0 + w_j^*) / k_j^*$ - монотонно убывает.

На Фиг. 2.2 изображены фазовые кривые уравнения (1.6), отвечающие управлению $\tilde{u}_j = -(u_j^0 + w_j^*)$, ($u_j^0 > w_j^*$) при $w_j^* = 0, w_j^* > 0, w_j^* < 0 (j = 1, 2, 3)$ - соответственно. Обозначению $\Gamma_{j2}^l (l=1, 2, 3; j=1, 2, 3)$ соответствуют следующие асимптотики: $\Gamma_{j2}^1 : \dot{\alpha}_j = -u_j^0 / k_j^* (w_j^* = 0)$, $\Gamma_{j2}^2 : \dot{\alpha}_j = -(u_j^0 + w_j^*) / k_j^* (w_j^* > 0)$, $\Gamma_{j2}^3 : \dot{\alpha}_j = -(u_j^0 + w_j^*) / k_j^* (w_j^* < 0)$. Здесь все асимптотики находятся в нижней



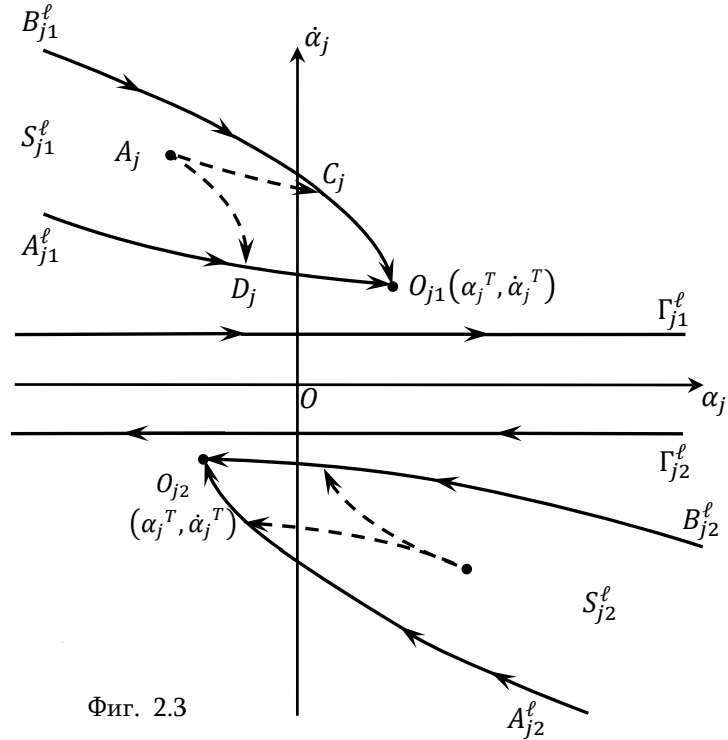
Фиг. 2.2

полуплоскости. При $w_j^* = 0$ ($j = 1, 2, 3$) асимптоты Γ_{j1}^1 (фиг.2.1) и Γ_{j2}^1 ($j = 1, 2, 3$) (фиг.2.2) симметричны относительно координатной линии α_j ($j = 1, 2, 3$).

Анализ фазовых кривых показывает, что единственными фазовыми траекториями, приводящими манипулятор в заданное состояние $(\alpha_j^T, \dot{\alpha}_j^T)$ при $\tilde{u}_j = u_j^0 - w_j^*$, где $u_j^0 > w_j^*$, являются

$$\alpha_j = \alpha_j^T - \frac{R_j}{k_j^{*2}} \left[(u_j^0 - w_j^*) \ln \frac{u_j^0 - w_j^* - k_j^* \dot{\alpha}_j}{u_j^0 - w_j^* - k_j^* \dot{\alpha}_j^T} + k_j^* (\dot{\alpha}_j - \dot{\alpha}_j^T) \right] \quad (2.6)$$

$(w_j^* = 0, w_j^* > 0, w_j^* < 0), (j = 1, 2, 3)$



Фиг. 2.3

При $\tilde{u}_j = -(u_j^0 + w_j^*)$, $u_j^0 > w_j^*$ фазовые кривые, приводящие систему (1.6) в фазовую точку $(\alpha_j^T, \dot{\alpha}_j^T)$, имеют вид

$$\alpha_j = \alpha_j^T + \frac{R_j}{k_j^{*2}} \left[(u_j^0 + w_j^*) \ln \frac{u_j^0 + w_j^* + k_j^* \dot{\alpha}_j}{u_j^0 + w_j^* + k_j^* \dot{\alpha}_j^T} - k_j^* (\dot{\alpha}_j - \dot{\alpha}_j^T) \right] \quad (2.7)$$

$$(w_j^* = 0, w_j^* > 0, w_j^* < 0), (j = 1, 2, 3)$$

На фиг. 2.3, 2.4 изображены все семейство фазовых траекторий, приводящих манипулятор в конечные состояния, когда конечные состояния находятся выше линии $\Gamma_{j1}^l (\dot{\alpha}_j^T > \Gamma_{j1}^l)$, ниже линии $\Gamma_{j2}^l (\dot{\alpha}_j^T < \Gamma_{j2}^l)$, и между линиями $\Gamma_{j1}^l, \Gamma_{j2}^l$ ($j = 1, 2, 3; l = 1, 2, 3$) (Фиг.2.4) соответственно.

Обозначая через $v_{j1}(\alpha, \dot{\alpha})$ функцию, заданную на фазовой плоскости $(\alpha, \dot{\alpha})$, решение рассматриваемой задачи квазиоптимального обслуживания, когда $\dot{\alpha}_j^T > \Gamma_{j1}^l$ можно истолковать следующим образом

$$v_{j1}(\alpha, \dot{\alpha}) = \begin{cases} u_j^0 - w_j^*, & \text{на дуге } A_{j1}^l O_{j1} \text{ и в области } S_{j1}^l \\ -(u_j^0 + w_j^*), & \text{на дуге } B_{j1}^l O_{j1} \text{ и в области } S_{j1}^l \end{cases}, (j = 1, 2, 3; l = 1, 2, 3) \quad (2.8)$$

Из фазовых кривых следует, что в случае $\dot{\alpha}_j^T > \Gamma_{j1}^l$ квазиоптимальное (оптимальное при $w_j^* = 0, j = 1, 2, 3$) решение задачи обслуживания существует только в области S_{j1}^l ($j = 1, 2, 3; l = 1, 2, 3$). Здесь S_{j1}^l – открытая область, ограниченная линиями $A_{j1}^l O_{j1}$ и $B_{j1}^l O_{j1}$. Внутри области S_{j1}^l решение задачи не зависит от чередования переключений управляющей функции \tilde{u}_j , то есть в S_{j1}^l можно двигаться по закону (2.6) и (2.7) до попадания на линии переключения $A_{j1}^l O_{j1}$ и $B_{j1}^l O_{j1}$, соответственно. После этого, дальнейшее движение совершается по линии $A_{j1}^l O_{j1}$ или $B_{j1}^l O_{j1}$ до попадания в конечную точку. Все эти траектории при $w_j^* = 0, j = 1, 2, 3$ удовлетворяют принципу максимума и, следовательно, являются оптимальными. На каждой оптимальной траектории значение управляющего параметра \tilde{u}_j равно $v_{j1}(\alpha, \dot{\alpha})$ в той точке, в которой в момент времени t находится фазовая точка. Заметим, что время движения по указанным траекториям в области S_{j2}^l также не зависит от чередования выбора функции $\tilde{u}_j(t)$, а определяется фазовыми координатами внутренней (начальной) точки области S_{j2}^l и конечной точки O_{j2} . ($j = 1, 2, 3; l = 1, 2, 3$) S_{j2}^l – открытая область, ограниченная линиями $A_{j2}^l O_{j2}$ и $B_{j2}^l O_{j2}$.

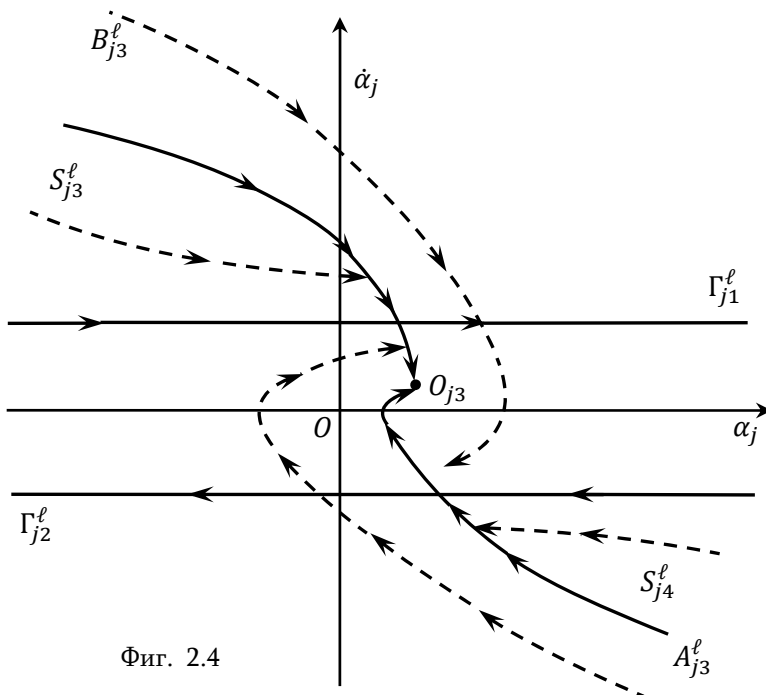
Не нарушая общности, докажем последнее утверждение при $w_j^* = 0$ и $|\tilde{u}_j(t)| \leq u_j^0$ ($j = 1, 2, 3$). Пусть в момент времени $t = t_0$ положение манипулятора совпадает с точкой $A_j(\alpha_j^0, \dot{\alpha}_j^0) \in S_{j1}^l$, а конечное положение при $t = T$ – с точкой $O_{j1}(\alpha_j^T, \dot{\alpha}_j^T)$ Фиг. 2.3. Из (2.8) следует, что движение из начальной точки

$A_j(\alpha_j^0, \dot{\alpha}_j^0) \in \mathcal{S}_{j1}^1$ к конечной точке $O_{j1}(\alpha_j^T, \dot{\alpha}_j^T)$ при $|\tilde{u}_j(t)| \leq u_j^0 (j=1,2,3)$ не зависит от чередования переключений управляющей функции. Сначала можно двигаться по закону $\tilde{u}_j = +u_j^0 (j=1,2,3)$ до попадания на линии $B_{j1}O_{j1} (j=1,2,3)$, затем по закону $\tilde{u}_j = -u_j^0 (j=1,2,3)$ до точки O_{j1} , или сначала по закону $\tilde{u}_j = -u_j^0 (j=1,2,3)$ до линии переключения $A_{j1}O_{j1}$, затем по закону $\tilde{u}_j = +u_j^0 (j=1,2,3)$ до точки $O_{j1} (j=1,2,3)$.

Точки пересечения с линиями $B_{j1}O_{j1}$ и $A_{j1}O_{j1}$ в моменты времени $t=t_{1j}$ и $t=t_{2j}$ обозначим через $C_j(\alpha_j^1(t_{1j}), \dot{\alpha}_j^1(t_{1j}))$ и $D_j(\alpha_j^2(t_{2j}), \dot{\alpha}_j^2(t_{2j}))$, соответственно.

Определим время движения по траектории $A_j C_j O_{j1}$. Уравнение (1.6) представим через фазовых координат $(\alpha_{j1}(t) = \alpha_j(t), \alpha_{j2}(t) = \dot{\alpha}_j(t))$

$$\begin{cases} \dot{\alpha}_{j1} = \alpha_{j2} \\ \dot{\alpha}_{j2} = -\frac{k_j^*}{R_j} \alpha_{j1} + \frac{\tilde{u}_j}{R_j}, (\alpha_{j1} = \alpha_j, j=1,2,3) \end{cases} \quad (2.9)$$



Фиг. 2.4

Интегрируя (2.9) от t_{1j} до t , получим

$$\tilde{u}_j |t - t_{1j}| = R_j \left[\alpha_{j2}(t) - \alpha_{j2}(t_{1j}) \right] + k_j^* \left[\alpha_{j1}(t) - \alpha_{j1}(t_{1j}) \right] \quad (2.10)$$

Из постановки следует, что если $t \in [t_0, t_{1j}]$, то $\tilde{u}_j = +u_j^0$, а если $t \in [t_{1j}, T_{1j}]$, то $\tilde{u}_j = -u_j^0$. Справедливы, также условия

$$|t - t_{1j}| = \begin{cases} t - t_{1j}, & \text{если } t > t_{1j} \\ t_{1j} - t, & \text{если } t < t_{1j} \end{cases},$$

следовательно, время движения от точки A_{j1} до точки C_j , определяется выражением

$$t_{A_j C_j} = |t_0 - t_{1j}| = \frac{R_j}{u_j^0} \left[\alpha_{j2}(t_0) - \alpha_{j2}(t_{1j}) \right] + \frac{k_j^*}{u_j^0} \left[\alpha_{j1}(t_0) - \alpha_{j1}(t_{1j}) \right] \quad (2.11)$$

Аналогичным образом определим время движения от точки C_j до конечной точки O_{j1} , получим

$$t_{C_j O_{j1}} = |T_{1j} - t_{1j}| = \frac{R_j}{u_j^0} \left[\alpha_{j2}(t_{1j}) - \alpha_{j2}(T_{1j}) \right] + \frac{k_j^*}{u_j^0} \left[\alpha_{j1}(t_{1j}) - \alpha_{j1}(T_{1j}) \right] \quad (2.12)$$

Обозначая время движения от точки A_j до точки O_{j1} по траектории $A_j C_j O_{j1}$ через $T_{A_j C_j O_{j1}}$, получим

$$\begin{aligned} T_{A_j C_j O_{j1}} = t_{A_j C_j} + t_{C_j O_{j1}} = (T_{1j} - t_0) &= \frac{R_j}{u_j^0} \left[\alpha_{j2}(t_0) - \alpha_{j2}(T_{1j}) \right] + \\ &+ \frac{k_j^*}{u_j^0} \left[\alpha_{j1}(t_0) - \alpha_{j1}(T_{1j}) \right] \quad (j = 1, 2, 3) \end{aligned} \quad (2.13)$$

Здесь $(\alpha_{j1}(T_{1j}), \alpha_{j2}(T_{1j}))$ координаты конечной точки O_{j1} .

Выражение (2.13) не зависит от фазовых координат промежуточной точки C_j , то есть время движения от точки A_j до точки O_{j1} по траектории $A_j C_j O_{j1}$ не зависит от координаты точки C_j .

Аналогичным образом определим время движения по траектории $A_j D_j O_{j1}$. Интегрируя уравнения (2.9) от t до t_{2j} , получим

$$\tilde{u}_j |t - t_{2j}| = R_j \left[\alpha_{j2}(t) - \alpha_{j2}(t_{2j}) \right] + k_j^* \left[\alpha_{j1}(t) - \alpha_{j1}(t_{2j}) \right]$$

Здесь имеют место следующие условия, если $t \in [t_0, t_{2j}]$, то $\tilde{u}_j = -u_j^0$, а если $t \in [t_{2j}, T_{2j}]$, то $\tilde{u}_j = +u_j^0$ и $|t - t_{2j}| = \begin{cases} t - t_{2j}, & \text{если } t > t_{2j} \\ t_{2j} - t, & \text{если } t < t_{2j} \end{cases}$,

Время движения от точки A_{j1} до точки D_j , определяется выражением

$$t_{A_j D_j} = |t_0 - t_{2j}| = \frac{R_j}{u_j^0} [\alpha_{j2}(t_{2j}) - \alpha_{j2}(t_0)] + \frac{k_j^*}{u_j^0} [\alpha_{j1}(t_{2j}) - \alpha_{j1}(t_0)], \quad (j=1, 2, 3) \quad (2.14)$$

а время движения от точки D_j до точки O_{j1} - выражением

$$t_{D_j O_{j1}} = |T_{2j} - t_{2j}| = \frac{R_j}{u_j^0} [\alpha_{j1}(T_{2j}) - \alpha_{j1}(t_{2j})] + \frac{k_j^*}{u_j^0} [\alpha_{j1}(T_{2j}) - \alpha_{j1}(t_{2j})], \quad (2.15)$$

Из (2.14) и (2.15) имеем

$$T_{A_j D_j O_{j1}} = t_{A_j D_j} + t_{D_j O_{j1}} = (T_{2j} - t_0) = \frac{R_j}{u_j^0} [\alpha_{j2}(T_{2j}) - \alpha_{j2}(t_0)] + \frac{k_j^*}{u_j^0} [\alpha_{j1}(T_{2j}) - \alpha_{j1}(t_0)] \quad (j=1, 2, 3) \quad (2.16)$$

Выражение (2.16) также не зависит от фазовых координат промежуточной точки D_j .

Поскольку $\alpha_{j1}(T_{2j}) = \alpha_{j1}(T_{1j}); \alpha_{j2}(T_{2j}) = \alpha_{j2}(T_{1j}), (j=1, 2, 3)$, то из (2.13) и (2.16) следует, что время движения $T_{A_j C_j O_{j1}}$ от точки $A_j \in S_{j1}^1$ до конечной точки O_{j1} по траектории $A_j C_j O_{j1}$ и время движения $T_{A_j D_j O_{j1}}$ от точки $A_j \in S_{j1}^1$ до конечной точки O_{j1} по траектории $A_j D_j O_{j1}$ равны по абсолютной величине, то есть не зависит от выбора траектории движения.

Обозначая

$$F_j(\alpha_{j1}(t_0), \alpha_{j2}(t_0), \alpha_{j1}(T), \alpha_{j2}(T)) = \frac{R_j}{u_j^0} [\alpha_{j2}(t_0) - \alpha_{j2}(T)] + \frac{k_j^*}{u_j^0} [\alpha_{j1}(t_0) - \alpha_{j1}(T)] \quad (j=1, 2, 3)$$

время движения в области $S_{j1}^1 (j=1, 2, 3)$ можно представить следующим образом

$$|T - t_0| = \begin{cases} F_j(\alpha_{j1}(t_0), \alpha_{j2}(t_0), \alpha_{j1}(T), \alpha_{j2}(T)), & \text{если } +u_j^0, -u_j^0 \\ -F_j(\alpha_{j1}(t_0), \alpha_{j2}(t_0), \alpha_{j1}(T), \alpha_{j2}(T)), & \text{если } -u_j^0, +u_j^0 \end{cases} \quad (j=1, 2, 3)$$

Полученный результат распространяется также для квазиоптимальных режимов управления манипулятором.

Аналогично с (2.8) строится решение задачи квазиоптимального синтеза управления в случае $\dot{\alpha}_j^T < \Gamma_{j2}^l$ фиг.2.3

$$v_{j2}(\alpha, \dot{\alpha}) = \begin{cases} u_j^0 - w_j^* \text{ на дуге } A_{j2}^l O_{j2} \text{ и в области } S_{j2}^l & (j = 1, 2, 3); \\ -(u_j^0 + w_j^*) \text{ на дуге } B_{j2}^l O_{j2} \text{ и в области } S_{j2}^l & (l = 1, 2, 3) \end{cases} \quad (2.17)$$

При $l = 1, w_j^* = 0$ синтеза управления (2.17) является оптимальным.

В рассматриваемом случае, также, внутри области S_{j2}^l можно двигаться по законам (2.6) и (2.7) до попадания на линии переключения $A_{j2}^l O_{j2}$ и $B_{j2}^l O_{j2}$ соответственно. В области S_{j2}^l время движения также не зависит от выбора траектории. Напомним, что при $l = 1 w_j^* = 0, l = 2 w_j^* > 0, l = 3 w_j^* < 0$.

Обозначая синтезирующую функцию через $v_{j3}(\alpha_j, \dot{\alpha}_j)$, решение задачи квазиоптимального синтеза управления в случае $\Gamma_{j2}^l < \dot{\alpha}_j^T < \Gamma_{j1}^l$ ($j = 1, 2, 3; l = 1, 2, 3$) представим в виде фиг.2.4

$$v_{j3}(\alpha_j, \dot{\alpha}_j) = \begin{cases} u_j^0 - w_j^* \text{ ниже линии } A_{j3}^l O_{j3}, \text{ на дуге } A_{j3}^l O_{j3} \text{ и в } S_{j3}^l \\ -(u_j^0 + w_j^*) \text{ выше линии } B_{j3}^l O_{j3}, \text{ на дуге } B_{j3}^l O_{j3} \text{ и в } S_{j4}^l \end{cases} \quad (2.18)$$

Здесь S_{j3}^l - открытая область, ограниченная линиями $B_{j3}^l O_{j3}$ и Γ_{j1}^l , S_{j4}^l - линиями $A_{j3}^l O_{j3}$ и Γ_{j2}^l ($j = 1, 2, 3; l = 1, 2, 3$), соответственно.

В рассматриваемом случае $\Gamma_{j2}^l < \dot{\alpha}_j^T < \Gamma_{j1}^l$ ($j = 1, 2, 3; l = 1, 2, 3$) управление (2.18) обеспечивает квазиоптимальное приведение в конечное состояние $O_{j3}(\alpha_j^T, \dot{\alpha}_j^T)$ ($j = 1, 2, 3$) из любой точки фазовой плоскости (обслуживание манипулятором возможно при любой позиции элементов технологического процесса). При $w_j = 0, j = 1, 2, 3$, синтез управления $v_{j3}(\alpha_j, \dot{\alpha}_j), j = 1, 2, 3$ (2.18) является оптимальным по быстродействию.

2.2 Синтез обслуживания в случае $u_j^0 = w_j^*, w_j^* > 0 (j = 1, 2, 3)$. На отрезке времени, когда $\tilde{u}_j = 0 (\tilde{u}_j = u_j^0 - w_j^*)$, фазовые траектории обслуживания представляют собой прямые линии (1.6), (2.3). Движение происходит без управления (по инерции) по фазовым прямым

$$\alpha_j(t) = \alpha_j^0 + \frac{R_j}{k_j^*} \omega_j^0 - \frac{R_j}{k_j^*} \dot{\alpha}_j \quad (2.19)$$

Из (2.19) следует, что функция $\alpha_j(\dot{\alpha}_j)$ всюду монотонно убывает, поскольку $\partial\alpha_j/\partial\dot{\alpha}_j < 0$ ($j = 1, 2, 3$) (Фиг.2.5).

На отрезке времени, когда $\tilde{u} = -(u_j^0 + w_j^*)$, фазовые траектории обслуживания описываются уравнениями (2.3) и имеют вид

$$\alpha_j = \alpha_j^0 + \frac{2u_j^0}{k_j^{*2}} R_j \ln \frac{2u_j^0 + k_j^* \dot{\alpha}_j}{2u_j^0 + k_j^* \omega_j^0} + \frac{R_j}{k_j^*} (\omega_j^0 - \dot{\alpha}_j) \quad (j = 1, 2, 3) \quad (2.20)$$

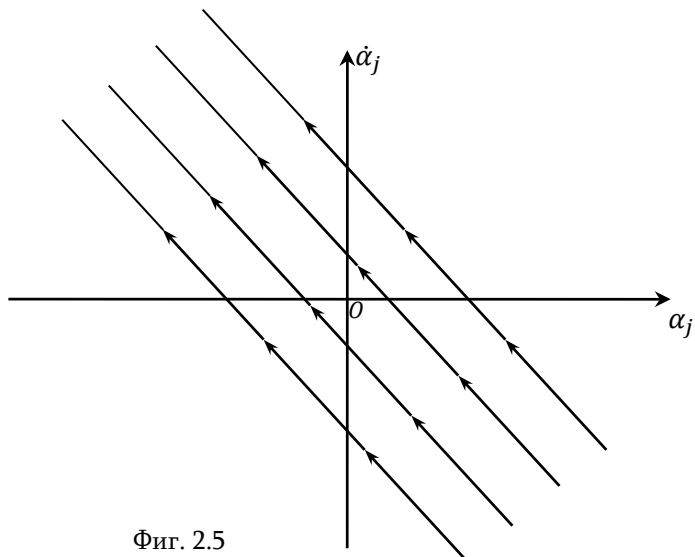
Здесь $\partial\alpha_j/\partial\dot{\alpha}_j = -R_j \dot{\alpha}_j / (2u_j^0 + k_j^* \dot{\alpha}_j)$ ($j = 1, 2, 3$).

Анализ фазовых кривых показывает, что в области, где $\dot{\alpha}_j > -2u_j^0/k_j^*$, $\omega_j^0 > -2u_j^0/k_j^*$, при $\dot{\alpha}_j < 0$ функция $\alpha_j(\dot{\alpha}_j)$ (2.20) монотонно возрастает ($\partial\alpha_j/\partial\dot{\alpha}_j > 0, j = 1, 2, 3$), а при $\dot{\alpha}_j > 0$ — монотонно убывает ($\partial\alpha_j/\partial\dot{\alpha}_j < 0, j = 1, 2, 3$) (фиг. 2.6.). В области $\dot{\alpha}_j < -2u_j^0/k_j^*$, $\omega_j^0 < -2u_j^0/k_j^*$ функция $\alpha_j(\dot{\alpha}_j)$ монотонно убывает, так как $\dot{\alpha}_j < 0$ ($\partial\alpha_j/\partial\dot{\alpha}_j < 0, j = 1, 2, 3$). Фазовые кривые (2.20) имеют асимптотику $\Gamma_j: \dot{\alpha}_j = -2u_j^0/k_j^*$ ($j = 1, 2, 3$), которые также являются фазовыми траекториями движения манипулятора.

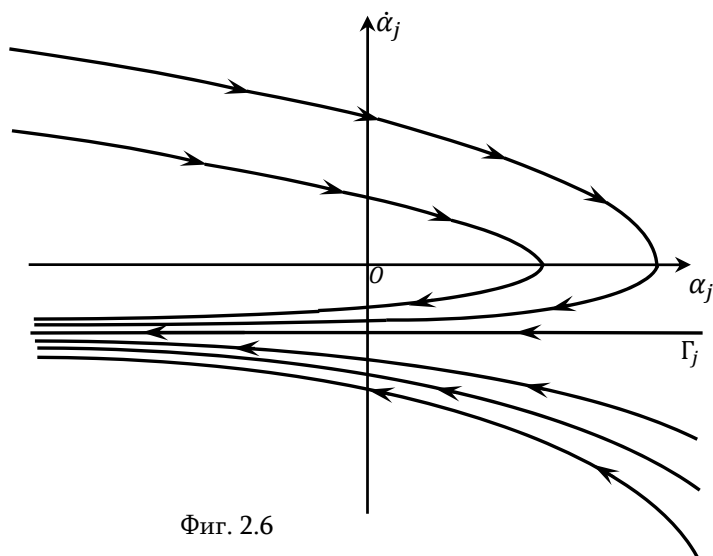
На фиг. 2.7 изображены все семейства полученных таким образом фазовых траекторий, приводящих манипулятор в конечное состояние, когда конечное состояние находится выше линии $\Gamma_j(\dot{\alpha}_j^T > \Gamma_j)$ и ниже линии $\Gamma_j(\dot{\alpha}_j^T < \Gamma_j)$. Фазовыми кривыми, приводящими манипулятор в фазовую точку $(\alpha_j^T, \dot{\alpha}_j^T)$ ($j = 1, 2, 3$) являются

$$\alpha_j = \alpha_j^T + \frac{2u_j^0}{k_j^{*2}} R_j \ln \frac{2u_j^0 + k_j^* \dot{\alpha}_j}{2u_j^0 + k_j^* \omega_j^0} + \frac{R_j}{k_j^*} (\dot{\alpha}_j^T - \dot{\alpha}_j) \quad (2.21)$$

$$\alpha_j(t) = \alpha_j^T + \frac{R_j}{k_j^*} \dot{\alpha}_j^T - \frac{R_j}{k_j^*} \dot{\alpha}_j \quad (2.22)$$



Фиг. 2.5



Фиг. 2.6

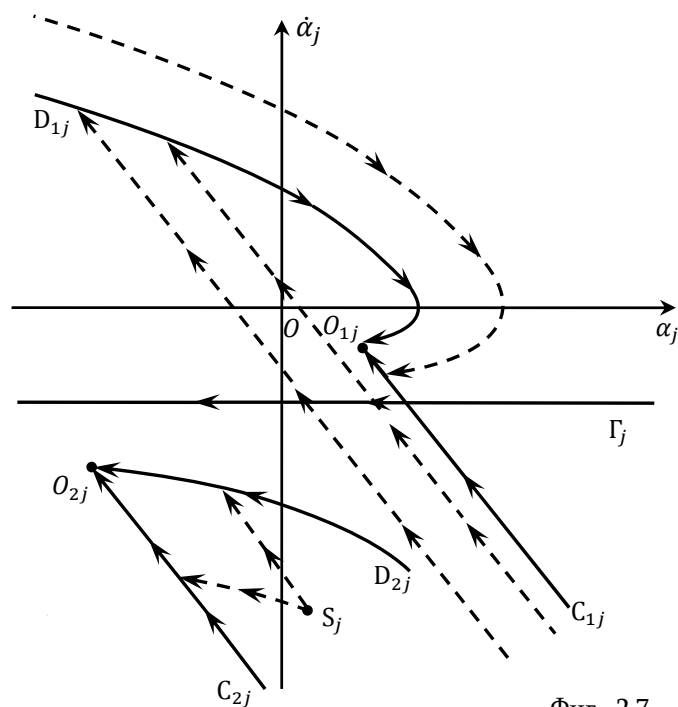
Обозначая через $v_{1j}(\alpha, \dot{\alpha})$ функцию, заданную на фазовой плоскости $(\alpha_j, \dot{\alpha}_j)$, решение задачи синтеза для рассматриваемого случая при $\dot{\alpha}_j^T > \Gamma_j$ можно представить в виде

$$v_{1j}(\alpha, \dot{\alpha}) = \begin{cases} -2u_j^0 & \text{выше линии } C_{1j}O_{1j}D_{1j} \text{ и на дуге } D_{1j}O_{1j} \\ 0 & \text{ниже линии } C_{1j}O_{1j}D_{1j} \text{ и на линии } C_{1j}O_{1j} \end{cases}, (j = 1, 2, 3) \quad (2.23)$$

В случае $\dot{\alpha}_j^T < \Gamma_j$, аналогично строится решение задачи синтеза

$$v_{2j}(\alpha, \dot{\alpha}) = \begin{cases} -2u_j^0 & \text{в области } S_j \text{ и на дуге } D_{2j}O_{2j}, \\ 0 & \text{в области } S_j \text{ и на линии } C_{2j}O_{2j} \end{cases}, (j = 1, 2, 3) \quad (2.24)$$

Здесь через S_j обозначена внутренняя открытая область на плоскости $(\alpha, \dot{\alpha})$, ограниченная между линиями $D_{2j}O_{2j}, C_{2j}O_{2j}$. Внутри области S_j решение задачи не зависит от чередования переключений управляющей функции, то есть в S_j можно двигаться по закону (2.19) и (2.20) до попадания на линии переключения $D_{2j}O_{2j}$ и $C_{2j}O_{2j}$, соответственно. После этого дальнейшее движение совершается по линии $D_{2j}O_{2j}$ или $C_{2j}O_{2j}$ до попадания в конечную точку O_{2j} ($j = 1, 2, 3$). В случае $u_j^0 = w_j^*, w_j^* > 0$ на каждой траектории значение управляющей функции \tilde{u}_j , в зависимости от положения конечной точки, равно $v_{1j}(\alpha, \dot{\alpha})$ (2.23) и $v_{2j}(\alpha, \dot{\alpha})$ (2.24) соответственно.



Фиг. 2.7

2.3 Синтез оптимального обслуживания в случае $u_j^0 < w_j^*, w_j^* > 0 (j = 1, 2, 3)$.

Рассмотрим частный случай, который также может возникнуть при решении задачи

обслуживания $u_j^0 < w_j^*, w_j^* > 0 (j=1, 2, 3)$. Фазовые траектории обслуживания (2.3), при $\tilde{u}_j = u_j^0 - w_j^*$ являются

$$\alpha_j = \alpha_j^0 + \frac{w_j^* - u_j^0}{k_j^{*2}} R_j \ln \frac{w_j^* - u_j^0 + k_j^* \dot{\alpha}_j}{w_j^* - u_j^0 + k_j^* \omega_j^0} + \frac{R_j}{k_j^*} (\omega_j^0 - \dot{\alpha}_j), (j=1, 2, 3) \quad (2.25)$$

где $\partial\alpha/\partial\dot{\alpha} = -R_j \dot{\alpha}_j / (w_j^* - u_j^0 + k_j^* \dot{\alpha}_j)$.

В области $\dot{\alpha}_j > (u_j^0 - w_j^*)/k_j^*, \omega_j^0 > (u_j^0 - w_j^*)/k_j^*$ функция $\alpha_j(\dot{\alpha}_j)$ (2.25) монотонно убывает при $\dot{\alpha}_j > 0$ и монотонно возрастает при $\dot{\alpha}_j < 0$.

В области, где $\dot{\alpha}_j < (u_j^0 - w_j^*)/k_j^*, \omega_j^0 < (u_j^0 - w_j^*)/k_j^*$, $\alpha_j(\dot{\alpha}_j)$ - монотонно убывает. Фазовые кривые семейства (2.25) имеют асимптотику $\Gamma_{j1}^1 : \dot{\alpha}_j = (u_j^0 - w_j^*)/k_j^*$ фиг. 2.8.

При $\tilde{u}_j = -(u_j^0 + w_j^*) (u_j^0 < w_j^*, w_j^* > 0)$ семейства фазовых кривых имеют вид

$$\alpha_j = \alpha_j^0 + \frac{u_j^0 + w_j^*}{k_j^{*2}} R_j \ln \frac{u_j^0 + w_j^* + k_j^* \dot{\alpha}_j}{u_j^0 + w_j^* + k_j^* \omega_j^0} + \frac{R_j}{k_j^*} (\omega_j^0 - \dot{\alpha}_j), (j=1, 2, 3) \quad (2.26)$$

где $\partial\alpha/\partial\dot{\alpha} = -R_j \dot{\alpha}_j / (w_j^* + u_j^0 + k_j^* \dot{\alpha}_j)$.

Функция $\alpha_j(\dot{\alpha}_j)$ (2.26) в области $\dot{\alpha}_j > -(u_j^0 + w_j^*)/k_j^*, \omega_j^0 > -(u_j^0 + w_j^*)/k_j^*$ монотонно убывает при $\dot{\alpha}_j > 0$ и монотонно возрастает при $\dot{\alpha}_j < 0$.

В области, где $\dot{\alpha}_j < -(u_j^0 + w_j^*)/k_j^*, \omega_j^0 < -(u_j^0 + w_j^*)/k_j^*$, $\alpha_j(\dot{\alpha}_j)$ (2.26) - монотонно убывает. Асимптотическими линиями для фазовых кривых семейства (2.26) являются $\Gamma_{j2}^1 : \dot{\alpha}_j = -(u_j^0 + w_j^*)/k_j^*$ фиг. 2.9.

Фазовыми траекториями, проходящими через точку $(\alpha_j^T, \dot{\alpha}_j^T)$ при управлении

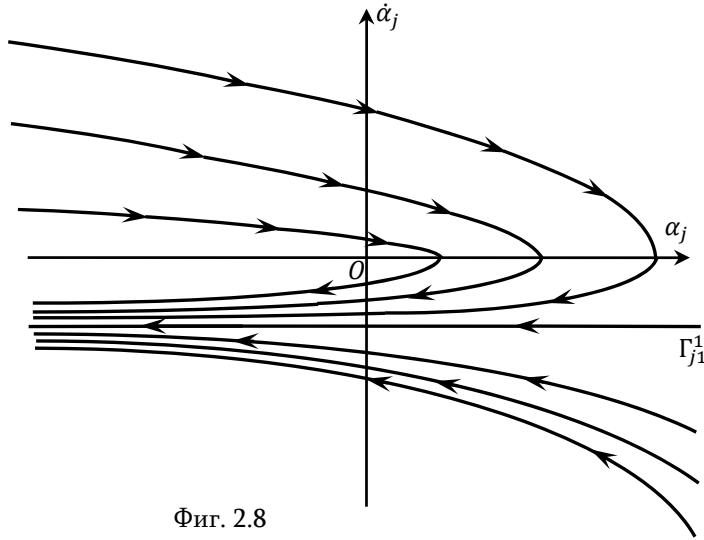
$\tilde{u}_j = (u_j^0 - w_j^*)$ и $\tilde{u}_j = -(u_j^0 + w_j^*)$ являются

$$\alpha_j = \alpha_j^T + R_j k_j^{*-2} \left[(w_j^* - u_j^0) \ln \frac{w_j^0 - u_j^0 + k_j^* \dot{\alpha}_j}{w_j^0 - u_j^0 + k_j^* \dot{\alpha}_j^T} + k_j^* (\dot{\alpha}_j^T - \dot{\alpha}_j) \right], \quad (2.27)$$

$(\tilde{u}_j = u_j^0 - w_j^*), (j=1, 2, 3)$

$$\alpha_j = \alpha_j^T + R_j k_j^{*-2} \left[(w_j^* + u_j^0) \ln \frac{w_j^0 + u_j^0 + k_j^* \dot{\alpha}_j}{w_j^0 + u_j^0 + k_j^* \dot{\alpha}_j^T} + k_j^* (\dot{\alpha}_j^T - \dot{\alpha}_j) \right], \quad (2.28)$$

$(\tilde{u}_j = -(u_j^0 + w_j^*)), (j=1, 2, 3)$



Фиг. 2.8

Из фиг. 2.8, 2.9 и формул (2.27), (2.28) следует, что в случае $u_j^0 < w_j^*$, $w_j^* > 0$ ($j = 1, 2, 3$) характер движения по фазовым траекториям (2.27) при $\tilde{u}_j = u_j^0 - w_j^*$ и движения по (2.28) при $\tilde{u}_j = -(u_j^0 + w_j^*)$ одинаков. На фиг.2.10 изображены семейства фазовых траекторий обслуживания в случае $u_j^0 < w_j^*$, $w_j^* > 0$, когда конечная точка находится выше линии $\Gamma_{j1}^1 (\dot{\alpha}_j^T > \Gamma_{j1}^1)$, ниже линии $\Gamma_{j2}^1 (\dot{\alpha}_j^T < \Gamma_{j2}^1)$ и между линиями $\Gamma_{j1}^1, \Gamma_{j2}^1 (\Gamma_{j2}^1 < \dot{\alpha}_j^T < \Gamma_{j1}^1)$ ($j = 1, 2, 3$) соответственно. При помощи функции $v_{j1}(\alpha, \dot{\alpha}), v_{j2}(\alpha, \dot{\alpha}), v_{j3}(\alpha, \dot{\alpha})$ ($j = 1, 2, 3$) решение задачи синтеза квазиоптимального обслуживания можно представить в виде

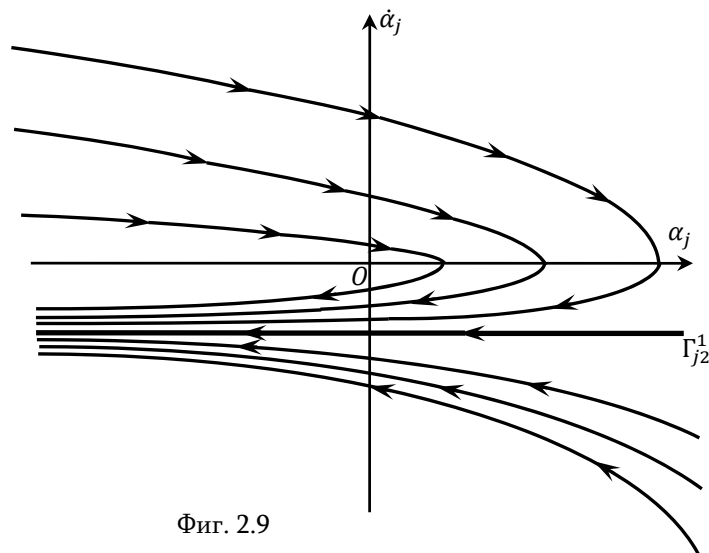
$$v_{j1}(\alpha, \dot{\alpha}) = \begin{cases} u_j^0 - w_j^* & \text{в области } S_{j1} \text{ и на дуге } E_{j1}O_{j1} \\ -(u_j^0 + w_j^*) & \text{в области } S_{j1} \text{ и на дуге } F_{j1}O_{j1} \end{cases}, (\dot{\alpha}_j^T > \Gamma_{j1}^1) \quad (2.29)$$

$$v_{j2}(\alpha, \dot{\alpha}) = \begin{cases} u_j^0 - w_j^* & \text{в области } S_{j2} \text{ и на дуге } E_{j2}O_{j2} \\ -(u_j^0 + w_j^*) & \text{в области } S_{j2} \text{ и на дуге } F_{j2}O_{j2} \end{cases}, (\dot{\alpha}_j^T < \Gamma_{j2}^1) \quad (2.30)$$

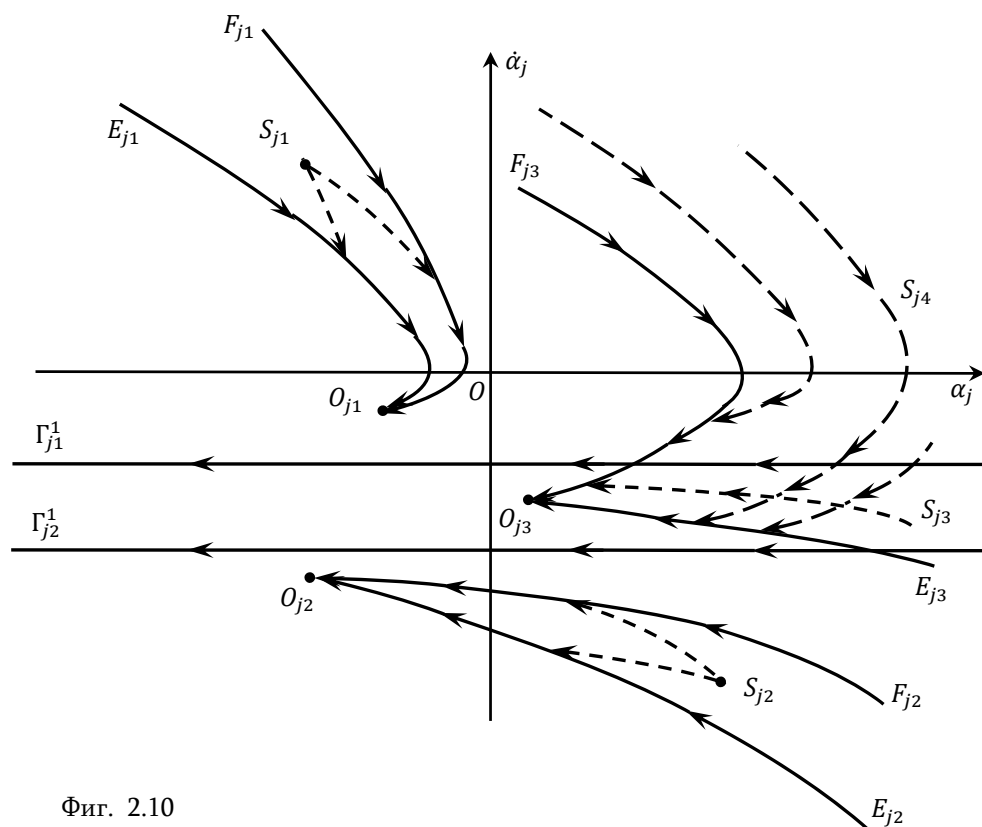
$$v_{j3}(\alpha, \dot{\alpha}) = \begin{cases} u_j^0 - w_j^* & \text{в области } S_{j3} \text{ и на дуге } E_{j3}O_{j3}, \quad (\Gamma_{j2}^1 < \dot{\alpha}_j^T < \Gamma_{j1}^1) \\ -(u_j^0 + w_j^*) & \text{в областях } S_{j3}, S_{j4} \text{ и на дуге } F_{j3}O_{j3} \end{cases} \quad (2.31)$$

Здесь $S_{j1}, S_{j2}, S_{j3}, S_{j4}$ – открытые области, ограниченные линиями $E_{j1}O_{j1}$ и $F_{j1}O_{j1}$; $E_{j2}O_{j2}$ и $F_{j2}O_{j2}$; $E_{j3}O_{j3}, F_{j3}O_{j3}$ и Γ_{j1}^1 ; $F_{j3}O_{j3}$ и Γ_{j1}^1 соответственно.

В областях $S_{j1}, S_{j2}, S_{j3}, S_{j4}$ решение задачи квазиоптимального обслуживания не зависит от чередования управляющей функции. Внутри этих областей можно двигаться по законам (2.25) и (2.26) до попадания на линии переключения, а дальше двигаться по этим линиям. Из решения следует, что в рассматриваемом случае задачи квазиоптимального обслуживания по быстродействию манипулятором конвейеров имеет решение только для тех начальных условий, которые находятся в областях $S_{j1}, S_{j2}, S_{j3}, S_{j4}$ и на линиях переключения. По аналогии с п.2.1 можно доказать, что внутри этих областей время движения не зависит от чередования выбора управляющей функций, а определяется фазовыми координатами начальной и конечной точек. В зависимости от положения конечной точки на каждой траектории значение управляющего параметра $\tilde{y}_j(t) (j = 1, 2, 3)$ (в произвольный момент времени t) равно $v_{j1}(\alpha, \dot{\alpha}), v_{j2}(\alpha, \dot{\alpha})$ или $v_{j3}(\alpha, \dot{\alpha})$ из (2.29)- (2.31).



Фиг. 2.9



Фиг. 2.10

Заключение. Построена математическая модель управляемого технологического процесса, которая состоит из адаптивного электромеханического манипулятора, конвейеров и тележки с деталями. Предполагая, что манипулятор с помощью датчика усилий, определяя по деформации упругих элементов, вес детали, на каждом этапе осуществляет квазиоптимальное по времени обслуживание непрерывной работы определенных конвейеров с учетом внешних или внутренних факторов. Составлено приближенное уравнение движения манипулятора и с помощью принципа максимума исследованы различные варианты синтеза квазиоптимального и оптимального обслуживания на каждом этапе, которые могут иметь место в рамках рассматриваемой модели. При разных соотношениях между управляющей функцией и различными факторами, построены качественные картины фазовых траекторий движения манипулятора и определены управляющие функции в зависимости от фазовых координат. На фазовой плоскости выделены те области, в рамках которых возможно оптимальное обслуживание конвейеров. В

рамках принятой модели технологического процесса возможны также другие постановки задачи обслуживания с применением манипуляционных роботов, которые могут иметь определенный интерес с точки зрения технологического назначения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Черноусько Ф.Л., Градецкий В.Г., Болотник Н.Н. Манипуляционные роботы. М.: Наука, 1989, 363 с.
2. Хватов Б.Н. Гибкие производственные системы. Расчет и проектирование. Тамбов, Изд. ТГТУ, 2007, 117с.
3. Иванов А.А. Проектирование системы автоматизированного машиностроения. Изд. «Инфра-М. Форум», 2004.
4. Соломенцев Ю.М. Технологические основы гибких производственных систем. 2000. pdf.
5. Зенкевич С.Л., Ющенко А.С. Основы управления манипуляционными роботами. М.: Изд. МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2004, 478 с.
6. Динамика управления роботами. /Под. редакцией Е.И.Юревича. М.: Наука, 1984, 336 с.
7. Козырев Ю.Г. Промышленные роботы. Справочник. М.: Машиностроение, 1988. 392 с.
8. Чиликин М.Г., Ключев В.И., Сандлер А.С. Теория автоматизированного электропривода. М.: Энергия, 1979, 615 с.
9. К. Фу, Р. Гонсалес, К. Ли Робототехника. М.: Мир, 1989. 620 с.
10. Гукасян А.А. Об одной задаче оптимального моделирования технологического процесса, обслуживаемого манипуляционным роботом. Известия АН Арм. ССР, Механика, т.39, №6, 1986, с.39-49.
11. Гукасян А.А. Об управляемости процесса многоэтапного обслуживания технологического участка манипулятора с векторным управлением. Доклады НАН Армении. 2021. Т.121. № 3. с.181-191.
12. Гукасян А.А. О математическом моделировании процесса обслуживания и условия ее управляемости. Изв. НАН РА, Механика. 2017. Т. 70. №3. С. 26-38.
13. A. A. Ghukasyan and A. Ya. Ordyan On a model of the processes of maintaining a technological area by a manipulator. IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series 991 (2018) 012026 doi: 10.1088/1742-6596/991/1/01202. 5th International Conference on Topical Problems of Continuum Mechanics with a Special Session in Honor of Alexander Manzhirrov's 60th Birthday 2–7 October 2017, Tsakhkadzor, Armenia: Accepted papers received: 15 March 2018 Published online: 13 April 2018.
14. Гукасян А.А. Обобщенная модель многоэтапного обслуживания манипулятором технологического процесса и условия управляемости. Изв. НАН РА, Механика. 2022. Т. 75. №1,2. С. 67-84.
15. Красовский Н.Н. Теория управления движением. М.: Наука, 1968, 475 с.
16. Ройтенберг Я.Н. Автоматическое управление. М.: Наука, 1978, 551 с.
17. Ли Э.Б., Маркус Л. Основы теории оптимального управления. М.: Наука, 1972, 574 с.

18. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1983, 392с.
19. Гукасян А.А., Матевосян А.Г. Об управляемом движении материальной точки с нефиксированной массой. //Известия НАН РА, Механика, №1, 2002, с.75-81.
20. Гукасян А.А., Матевосян А.Г. Задача оптимального управления движением точки переменной массы. //В сборнике научных трудов “Математический анализ и его приложения” АГПУ им. Х.Абовяна, Ереван 2003, вып.3, с.29-40.
21. Акуленко Л.Д., Болотник Н.Н. Синтез оптимального управления транспортными движениями манипуляционных роботов. // Изв. АН СССР, МТТ, №4, 1986, с.21-29.
22. Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М.: Наука, 1973. 272с.

Сведения об авторе:

Гукасян А.А. – Доктор физ.-мат. наук, профессор, ведущий научный сотрудник Института механики НАН Республики Армения, **E-mail:** ghukasyan10@yandex.com.

Поступила в редакцию 4 октября 2022