

К ЗАДАЧЕ ОПИСАНИЯ ВОЛНОВОГО ПОЛЯ В БЛИЖНЕЙ ЗОНЕ

А.Ж. ХАЧАТРЯН*, Э.Е. ЭЛБАКЯН, А.Ф. ПАРСАМЯН, В.А. ХОЕЦЯН

Государственный инженерный университет Армении, Ереван, Армения

*e-mail: ashot.khachatrian@gmail.com

(Поступила в редакцию 28 мая 2022 г.)

Получены выражения фазы сферической волны в ближней, средней и дальней зоне наблюдения. Доказано, что в приближении Френеля сферическая волна аппроксимируется параболоидной волной, которая, в свою очередь, в приближении Фраунгофера аппроксимируется плоской волной. На основе этого рассматривается задача описания волнового поля, генерированного системой многих когерентно излучающих точечных источников. Получено выражение для распределения интенсивности в задачи интерференции для приближения ближнего поля. Показано, что распределение максимумов интенсивности определяется решением кубическим уравнением, которое в приближении Френеля переходит в линейное уравнение, которое выражает классический результат о равномерном распределении максимумов интенсивности.

1. Введение

Как известно, одной из центральных проблем теории волн, в частности, ее раздела дифракции является задача описания волнового поля в областях далеких от генерирующих, переизлучающих или поглощающих данное поле источников и поверхностей [1,2]. В общем случае, решение данной задачи представляет собой трудную математическую проблему, которую даже в приближенном виде, как правило, приходится выполнять численно [3–12]. Наиболее известными методами приближенного рассмотрения дифрагированного поля являются, так называемые, картины Френеля и Фраунгофера. Необходимо также отметить, что приближение Фраунгофера является частным случаем приближения Френеля, когда удаленность области наблюдения позволят аппроксимировать дошедшие до нее сферические волны плоскими волнами.

Обоснованность применения того или иного приближения обычно комментируется близостью или удаленностью области наблюдения от области источников. Вместе с тем хорошо известно, что такой комментарий обязательно должен быть в связке с длиной волны излучения. Т.е. если для одной длины волны данная дистанция наблюдения попадает, например, в среднюю зону наблюдения, то та же самая дистанция для другого значения длины волны может попадать, например, уже в ближнюю зону. Поэтому, в свете сказанного, в теории дифракции

помимо пространственных параметров задачи вводится также еще один, так называемый, волновой параметр. Помимо накладываемых на пространственные параметры задачи ограничений, условие применимости приближенного описания поля обосновывается также ограничением, накладываемым на значения волнового параметра. В последующем, на основе данных значений волнового параметра вводятся понятия ближней, средней и дальней волновых зон наблюдения.

Несмотря на широкую известность выше изложенного, нам все же представляется необходимым введение в теории дифракции еще одного дополнительного параметра, так называемого параметра области наблюдения, которую наряду с волновым параметром позволит более полно высветить многие аспекты дифракционной задачи. Сказанное мы будем обосновывать на примере задачи описания гармонического сферического поля в картинах Френеля и Фраунгофера, соответственно. Ясно, что многие результаты, полученные для одной сферической волны, легко могут быть перенесены на суперпозиционное поле, являющимся наложением многих сферических волн.

2. Продольные и поперечные пространственные параметры для описания сферического поля

Пусть расположение источника и точки наблюдения указываются исходящими из точки O векторами \mathbf{r} и \mathbf{R} (см. Рис.1). Тогда, как известно, для случая гармонического поля в точке наблюдения волновое поле описывается выражением

$$U(\mathbf{R}, t) = \frac{a}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}|} \cos[\omega t - k|\mathbf{R} - \mathbf{r}|], \quad (1)$$

где a есть амплитуда, а ω и k являются частотой и волновым числом волны.

Предположим, что наблюдения волнового поля (1) проводятся в окрестностях некоторой точки O' , положение которой задается, исходящим из точки O вектором \mathbf{R}_0 . Далее направление вектора \mathbf{R}_0 мы будем называть главным направлением наблюдения, $R_0 = |\mathbf{R}_0|$ — основной дистанцией наблюдения, а точку O' — центральной точкой наблюдения. Пусть положение точки

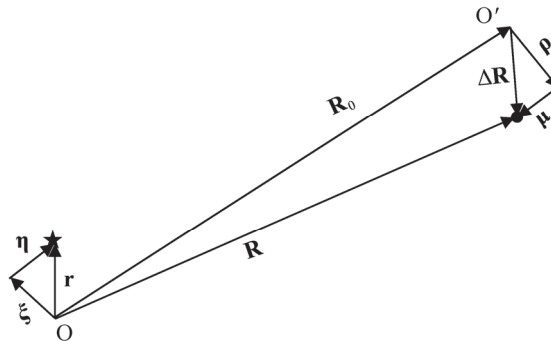


Рис.1. Продольные и поперечные пространственные параметры для задачи приближенного описания сферического поля.

наблюдения указывается исходящим из точки O' вектором $\Delta \mathbf{R}$. Тогда, как видно из Рис.1, выполняется следующее векторное соотношение:

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_0 + \Delta \mathbf{R}. \quad (2)$$

Введем продольные и поперечные по отношению к главной оси наблюдения пространственные параметры задачи:

$$\Delta \mathbf{R} = \boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\mu}, \quad \mathbf{r} = \boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\eta}, \quad (3)$$

где

$$\boldsymbol{\rho} \perp \mathbf{R}_0, \quad \boldsymbol{\xi} \perp \mathbf{R}_0 \text{ и } \boldsymbol{\mu} \parallel \mathbf{R}_0, \quad \boldsymbol{\eta} \parallel \mathbf{R}_0. \quad (4)$$

Согласно формулам (3), (4) вектора $\boldsymbol{\rho}$, $\boldsymbol{\mu}$ соответствуют поперечному и продольному смещениям точки наблюдения по отношению к центральной точке наблюдения O' . Вектора $\boldsymbol{\xi}$, $\boldsymbol{\eta}$ указывают поперечное и продольное смещение положения источника по отношению к начальной точке O . Из (2)–(4) следует, что

$$\mathbf{R} - \mathbf{r} = \mathbf{R}_0 + \Delta \mathbf{R} - \mathbf{r} = \mathbf{R}_\perp + \mathbf{R}_\parallel, \quad (5)$$

\mathbf{R}_\perp , \mathbf{R}_\parallel есть перпендикулярный и параллельный к вектору \mathbf{R}_0 вектора, причем

$$\mathbf{R}_\perp = \boldsymbol{\rho} - \mathbf{x}, \quad \mathbf{R}_\parallel = \mathbf{R}_0 + \boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\eta}. \quad (6)$$

Далее величины \mathbf{R}_\perp , \mathbf{R}_\parallel мы будем называть поперечным и продольным векторами наблюдения, а величины $\boldsymbol{\xi}$, $\boldsymbol{\rho}$ и $\boldsymbol{\mu}$, $\boldsymbol{\eta}$ поперечным и продольным векторами (пространственными параметрами задачи).

Воспользовавшись равенствами (5) запишем волновое поле (1) в следующем виде:

$$U(\mathbf{R}, t) = \frac{a}{\sqrt{R_\parallel^2 + R_\perp^2}} \cos \left[\omega t - k \sqrt{R_\parallel^2 + R_\perp^2} \right], \quad (7)$$

$R_\perp = |\mathbf{R}_\perp|$, $R_\parallel = |\mathbf{R}_\parallel|$ и разложим амплитудную и фазовую части данного выражения в ряд Тейлора по степеням отношения R_\perp / R_\parallel ;

$$\frac{a}{\sqrt{R_\parallel^2 + R_\perp^2}} = \frac{a}{R_\parallel} \left(1 - \frac{1}{2} \left(\frac{R_\perp}{R_\parallel} \right)^2 + \frac{3}{8} \left(\frac{R_\perp}{R_\parallel} \right)^4 - \frac{5}{16} \left(\frac{R_\perp}{R_\parallel} \right)^6 + \dots \right), \quad (8)$$

$$k \sqrt{R_\parallel^2 + R_\perp^2} = k \cdot R_\parallel + \sigma \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{8} \left(\frac{R_\perp}{R_\parallel} \right)^2 + \frac{1}{16} \left(\frac{R_\perp}{R_\parallel} \right)^4 - \frac{5}{128} \left(\frac{R_\perp}{R_\parallel} \right)^6 + \dots \right), \quad (9)$$

где σ есть волновой параметр задачи;

$$\sigma = \frac{R_\perp^2}{R_\parallel} k. \quad (10)$$

Используя равенства (6), легко увидеть, что при условиях

$$\rho^2 \ll R_0^2, \quad \eta^2 \ll R_0^2 \text{ и } \xi^2 \ll R_0^2, \quad \mu^2 \ll R_0^2 \quad (11)$$

отношение квадратов поперечного и продольного расстояний наблюдения также является малой величиной

$$(R_\perp / R_\parallel)^2 \ll 1. \quad (12)$$

3. Квазитоочное приближение и о приближениях Френеля и Фраунгофера

Очевидно, что при условии (12) для амплитуды сферической волны (8) может быть применено следующее приближение

$$\frac{a}{\sqrt{R_{\parallel}^2 + R_{\perp}^2}} = \frac{a}{R_{\parallel}}, \quad (13)$$

т.е. амплитуда поля определяется только лишь продольной дистанцией наблюдения. Вместе с тем условие (12) не является достаточным для пренебрежения членами степени отношения $R_{\perp} / R_{\parallel}$ разложении фазы (9), т.к. фаза волны является аргументом осцилляционной функции и, следовательно, пренебрежение каким либо членом ряда (9) может считаться обоснованным, только лишь, если он намного меньше 2π .

Как легко увидеть из (9) если

$$\sigma \sim 2\pi, \quad (14)$$

то с учетом (12) имеем:

$$\sigma \left(\frac{1}{8} \left(\frac{R_{\perp}}{R_{\parallel}} \right)^2 + \frac{1}{16} \left(\frac{R_{\perp}}{R_{\parallel}} \right)^4 - \frac{5}{128} \left(\frac{R_{\perp}}{R_{\parallel}} \right)^6 + \dots \right) \ll 2\pi, \quad (15)$$

и как следствие этого фаза волны (9) (см, также, (10)) принимает вид:

$$k\sqrt{R_{\parallel}^2 + R_{\perp}^2} = k \cdot R_{\parallel} + \frac{\sigma}{2} = k \cdot R_{\parallel} + \frac{R_{\perp}^2}{2R_{\parallel}} k. \quad (16)$$

Данное выражение есть не что иное, как фаза сферической волны в картине Френеля, а (14) является хорошо известным условием для выполнения дифракции Френеля.

Очевидно также, что если

$$\sigma \ll 2\pi, \quad (17)$$

то выражение фазы в картине Френеля (16) принимает вид выражения для фазы в картине Фраунгофера:

$$k\sqrt{R_{\parallel}^2 + R_{\perp}^2} = kR_{\parallel}. \quad (18)$$

На Рис.2 на плоскости R_{\perp} , R_{\parallel} изображено три вида эквифазной поверхности сферической волны: ее точный вид (9), ее вид в картине Френеля (16) и ее вид в картине Фраунгофере (18), а также звёздочкой указано положение источника. Для удобства мы поместили источник в начальной точке O ($\mathbf{r} = 0$), так что продольная и поперечная дистанции наблюдения имеют вид (см. (6)):

$$\mathbf{R}_{\perp} = \boldsymbol{\rho}, \quad \mathbf{R}_{\parallel} = \mathbf{R}_0 + \boldsymbol{\mu}. \quad (19)$$

Как видно из представленного рисунка в картине Френеля сферическая волна аппроксимируется параболоидной волной, которая в свою очередь в картине Фраунгофера аппроксимируется плоской волной. Из рисунка также следует, что чем ближе точка наблюдения к центральной точкой наблюдения O' , тем более адекватным становится приближенное описание поле. В пределах включающего в

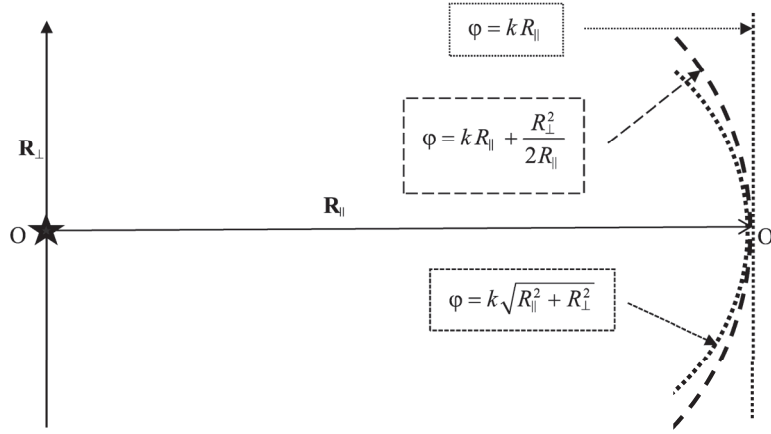


Рис.2. Эквифазные поверхности: точный вид, вид в картине Френеля и вид в картине Фраунгофера.

себя точку O' малого участка плоскости наблюдения все три поверхности, а именно сфера, параболоида и плоскость представляются почти что неразличимыми. Их различие проявляется по мере удаления от точки O' . Ясно также, что при больших отклонениях точки наблюдения от точки O' параболическая поверхность по своему топологическому виду более близка к сфере, нежели плоская поверхность.

Введем понятие волнового вектора по главной оси наблюдения в соответствии со следующим обозначением

$$\mathbf{k} = k \mathbf{R}_0 / R_0. \quad (20)$$

Используя (20), а также (4) и (6) легко увидеть, что фаза сферической волны в картине Фраунгофера может быть записана в виде:

$$k R_{\parallel} = \mathbf{k} \cdot (\mathbf{R} - \mathbf{r}). \quad (21)$$

Из условия (11) следует, что фаза сферической волны, записанная посредством продольных и поперечных пространственных параметров задачи, в картинах Френеля (16) и Фраунгофера (18) принимает вид, соответственно:

$$k \sqrt{R_{\parallel}^2 + R_{\perp}^2} = k R_{\parallel} + \frac{R_{\perp}^2}{2 R_{\parallel}} k \approx \mathbf{k} \cdot (\mathbf{R} - \mathbf{r}) + \frac{(\mathbf{p} - \mathbf{\xi})^2}{2 R_0} k, \quad (22)$$

$$k \sqrt{R_{\parallel}^2 + R_{\perp}^2} = k \cdot R_{\parallel} \approx \mathbf{k} \cdot (\mathbf{R} - \mathbf{r}). \quad (23)$$

Легко также увидеть, что в обеих картинах амплитуда волны (13) имеет один и тот же вид и определяется основной дистанцией наблюдения:

$$\frac{a}{\sqrt{R_{\parallel}^2 + R_{\perp}^2}} = \frac{a}{R_{\parallel}} \approx \frac{a}{R_0}. \quad (24)$$

Из формул (7) и (23), (24) непосредственно следует классический результат, согласно которому сферическая волна (1) в картине Фраунгофера представляет собой плоскую волну:

$$U(\mathbf{R}, t) = \frac{a}{R_0} \cos[\omega t - \mathbf{k} \cdot (\mathbf{R} - \mathbf{r})]. \quad (25)$$

Следует еще раз отметить, что такая аппроксимация сферической волны возможно только лишь в пределах малой области вблизи точки O' .

4. О ближней, средней и дальней зонах наблюдения и о приближении по полю

Проведенное выше рассмотрение относилось во многом к форме эквифазной поверхности в приближенных картинах описания поля. Вместе с тем, представляет интерес обсуждение вопроса о том, как быстро при увеличении дистанции наблюдения истинное значение фазы на сферической поверхности приближается к значению фазы волны в приближенной картине. Для этого воспользовавшись формулой (10), запишем ряд (9) фазы сферической волны в следующем виде:

$$k\sqrt{R_{\parallel}^2 + R_{\perp}^2} = k \cdot R_{\parallel} + \frac{R_{\perp}^2}{2R_{\parallel}} k - \frac{R_{\perp}^4}{R_{\parallel}^3} k \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{16} \left(\frac{R_{\perp}}{R_{\parallel}} \right)^2 + \frac{5}{128} \left(\frac{R_{\perp}}{R_{\parallel}} \right)^4 - \dots \right). \quad (26)$$

Заметим, что

$$\frac{R_{\perp}^4}{R_{\parallel}^3} k = \sigma \left(\frac{R_{\perp}}{R_{\parallel}} \right)^2 = \frac{\sigma^2}{kR_{\parallel}}. \quad (27)$$

Как легко увидеть из (26), если

$$\frac{R_{\perp}^4}{R_{\parallel}^3} k \sim 2\pi, \quad (28)$$

что в соответствии с формулами (27) и (12) равносильно выполнению строгого неравенства

$$\sigma \gg 2\pi, \quad (29)$$

то, с учетом условия (12) фаза волны принимает вид

$$k\sqrt{R_{\parallel}^2 + R_{\perp}^2} = k \cdot R_{\parallel} + \frac{R_{\perp}^2}{2R_{\parallel}} k - \frac{R_{\perp}^4}{8R_{\parallel}^3} k. \quad (30)$$

Далее представление (30) мы будем называть квазиточным выражением фазы сферической волны.

В соответствии с представленными выше результатами при выполнении условий

$$\left(\frac{R_{\perp}}{R_{\parallel}} \right)^2 \ll 1 \text{ и } \frac{R_{\perp}^2}{R_{\parallel}} k \gg 2\pi \quad (31)$$

волновое поле точечного источника (7) может быть представлено выражением

$$U(\mathbf{R}, t) = \frac{a}{R_{\parallel}} \cos \left[\omega t - k \cdot \left(R_{\parallel} + \frac{R_{\perp}^2}{2R_{\parallel}} - \frac{R_{\perp}^4}{8R_{\parallel}^3} \right) \right]. \quad (32)$$

В приближении Френеля, когда

$$\left(\frac{R_{\perp}}{R_{\parallel}}\right)^2 \ll 1 \text{ и } \frac{R_{\perp}^2}{R_{\parallel}} k \sim 2\pi, \quad (33)$$

для волнового поля применимо следующее выражение

$$U(\mathbf{R}, t) = \frac{a}{R_{\parallel}} \cos \left[\omega t - k \cdot \left(R_{\parallel} + \frac{R_{\perp}^2}{2R_{\parallel}} \right) \right]. \quad (34)$$

В приближении приближение Фраунгофера

$$\left(\frac{R_{\perp}}{R_{\parallel}}\right)^2 \ll 1 \text{ и } \frac{R_{\perp}^2}{R_{\parallel}} k \ll 2\pi, \quad (35)$$

волновое поле записывается в виде

$$U(\mathbf{R}, t) = \frac{a}{R_{\parallel}} \cos[\omega t - kR_{\parallel}]. \quad (36)$$

Как видно из формул (31), (33) и (35) во всех вышеотмеченных приближениях картин поля условие $(R_{\perp} / R_{\parallel})^2 \ll 1$ является необходимым, в то время как применимость того или иного приближения определяется значением волнового параметра $\sigma = R_{\perp}^2 k / R_{\parallel}$. Легко заметить, что значение волнового параметра зависит как от продольной дистанции наблюдения, так и от значения поперечной дистанции наблюдения. Следовательно, выполнение второго условия для каждого из приближения может быть обеспечено как изменением R_{\parallel} , так и изменением R_{\perp} . Как правило, при фиксированном значении R_{\perp} , когда изменение значения величины σ обусловлено изменением продольной дистанции наблюдения R_{\parallel} приближенный подход называют приближением по зоне наблюдения. Если наблюдения проводятся при фиксированном значении R_{\parallel} , а изменения значения σ связываются с изменением R_{\perp} , то обычно говорят о приближении по полю.

Воспользовавшись (6), (10) и (11) легко увидеть, что

$$\left(\frac{R_{\perp}}{R_{\parallel}}\right)^2 \approx \left(\frac{R_{\perp}}{R_0}\right)^2 = \frac{(\rho - \xi)^2}{R_0^2}, \quad (37)$$

$$\sigma \approx \frac{(R_{\perp})^2}{R_0} k = \frac{(\rho - \xi)^2}{R_0} k. \quad (38)$$

Как следует из данных формул при фиксированном значении длины волны, условия применимости приближенного описания определяются смещениями ξ и ρ источника и точки от главной оси наблюдения (см. Рис.1), а также расстоянием наблюдения R_0 . Заметим, что случай $R_{\perp} = 0$ будет, в частности, соответствовать ситуации, когда одновременно и источник, и точка наблюдения расположены на оси наблюдения. Следовательно, выполнение второго условия для каждого из приближений может быть обеспечено изменением поперечных к оси наблюдения смещений точки и источника.

Используя результаты работ [13,14], а также выражение фазы сферической волны в ближней зоне (30) для суперпозиционного поля системы из N точечных и когерентно излучающих источников, можно написать

$$U(\mathbf{R}, t) = \frac{a}{R_0} \sum_{j=1}^N \cos[\omega t + \boldsymbol{\mu}_j \cdot \mathbf{k} + \Delta_j + \delta_j], \quad (39)$$

где

$$\Delta_j = \frac{\xi_j^2}{2R_0} k - \frac{\boldsymbol{\rho} \cdot \boldsymbol{\xi}_j}{R_0} k, \quad (40)$$

$$\delta_j = -\frac{\xi_j^4}{8R_0^3} k + \frac{\xi_j^3 \cdot \boldsymbol{\rho}}{2R_0^3} k - \frac{\xi_j^2 \cdot \boldsymbol{\rho}^2}{4R_0^3} k + \frac{\xi_j \cdot \boldsymbol{\rho}^3}{2R_0^3} k. \quad (41)$$

Здесь ξ_j , $\boldsymbol{\mu}_j$ являются поперечными и продольными параметрами расположения источников ($\mathbf{r}_j = \xi_j + \boldsymbol{\mu}_j$, см.(3)), причем

$$\rho^2 \ll R_0^2, \quad \eta^2 \ll R_0^2 \quad \text{и} \quad \xi_j^2 \ll R_0^2, \quad \eta_j^2 \ll R_0^2. \quad (42)$$

Воспользовавшись (39), для интенсивности поля

$$I = \frac{1}{T} \int_0^T U^2(\mathbf{R}, t) dt, \quad (43)$$

где $T = 2\pi / \omega$ — период колебаний можем написать:

$$I(N) = \frac{1}{2} \left(\frac{a}{R_0} \right)^2 \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N \cos[\boldsymbol{\mu}_{ji} \cdot \mathbf{k} + \Delta_{ji} + \delta_{ji}], \quad (44)$$

где

$$\boldsymbol{\mu}_{ji} = \boldsymbol{\mu}_j - \boldsymbol{\mu}_i, \quad \Delta_{ji} = \Delta_j - \Delta_i, \quad \delta_{ji} = \delta_j - \delta_i. \quad (45)$$

Как видно из выражения (44), что при условии

$$\boldsymbol{\mu}_{ji} \cdot \mathbf{k} + \Delta_{ji} + \delta_{ji} = 2\pi n_{ji} \quad (n_{ji} = 0, \pm 1, \pm 2, \dots), \quad (46)$$

интенсивность поля принимает максимально возможное значение:

$$I_{\max}(N) = \frac{N^2}{2} \left(\frac{a}{R_0} \right)^2. \quad (47)$$

Ясно, что равенства (46) являются условиями определения максимума интенсивности в ближней зоне.

Если параметры эксперимента таковы, что для все $\delta_{ji} \ll 2\pi$, то условие (46) принимает вид

$$\boldsymbol{\mu}_{ji} \cdot \mathbf{k} + \Delta_{ji} = 2\pi n_{ji} \quad (n_{ji} = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \quad (48)$$

Данные равенства являются условием максимума в средней зоне наблюдения (приближение Френеля). В дальней зоне наблюдения (приближение Фраунгофера), когда все $\Delta_{ji} \ll 2\pi$, условие максимума (48) принимает вид

$$\boldsymbol{\mu}_{ji} \cdot \mathbf{k} = 2\pi n_{ji} \quad (n_{ji} = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \quad (49)$$

Заметим, что из малости величин $\Delta_{ji} \ll 2\pi$ автоматически следует малость $\delta_{ji} \ll 2\pi$.

5. Приближенное описание суперпозиционного поля и интерференционная картина в ближней зоне наблюдения

В свете задачи приближенного описания волнового поля затрагиваемый выше вопрос одного источников может показаться не столь несущественных. Вместе с тем для суперпозиционного поля многих источников данный вопрос имеет принципиальное значение. Рассмотрим сказанное в контексте классической задачи об интерференции поля двух источников. Как известно, задача интерференции решается в приближении Френеля, а задача для дифракционной решетки в приближении Фраунгофера (см. Рис.3). В обеих задачах требуется рассмотреть суперпозицию сферических волн, однако в случае интерференции количество источников равно двум, а в случае дифракционной решетки количество источников может достигать нескольких тысяч. Очевидно, что, по своей сути, задача интерференции является частым случаем задачи дифракционной решетки, если, конечно, последняя рассматривается в приближении Френеля.

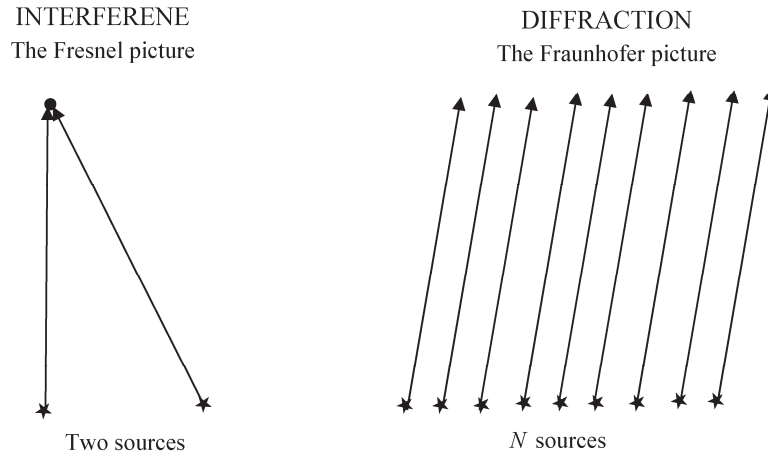


Рис.3. Интерференция волн от двух источников и дифракция волн от N источников.

На Рис.4 изображена система из периодически расположенных на оси X источников, а также представлены соответствующие рассмотрению (39) параметры задачи. Как видно из рисунка

$$\mu_p = x_p \sin \theta \text{ и } \xi_p = x_p \cos \theta. \quad (50)$$

Обозначая посредством $d > 0$ период системы, для координат излучателей можем написать:

$$x_p = x_1 + d(p-1) \quad (p=1, 2, \dots, N). \quad (51)$$

Заметим, что выбором

$$x_1 = -(N-1)d/2 \quad (52)$$

начало координат всегда может быть помещено по центру дифракционной решетки.

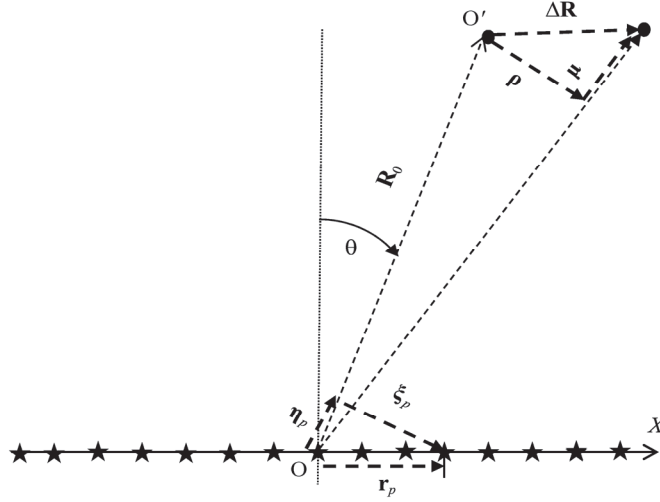


Рис.4. Продольные и поперечные пространственные параметры для задачи дифракции от N источников.

Для облегчения описания распределения интенсивности суперпозиционного поля (44), мы, не ограничивая значения величин Δ_{ji} и δ_{ji} , будем полагать выполнение условия максимума для дифракционной решетки в картине Фраунгофера (см. (49)). Кроме того, мы ограничимся случаем $\theta = 0$ (см. Рис.4), так что $\xi_p = x_p$ и $\mu_p = 0$ (см. (50)), и будем рассматривать вектор \mathbf{p} параллельным оси X . В этом случае используя (50) для (44), (45) можем написать

$$I(N) \equiv I_N(\rho) = \frac{1}{2} \left(\frac{a}{R_0} \right)^2 \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N \cos[\Delta_{ji} + \delta_{ji}], \quad (53)$$

где

$$\mu_{ji} = 0, \quad \Delta_{ji} = \frac{x_j^2 - x_i^2}{2R_0} k - \frac{(x_j - x_i)\rho}{R_0} k, \quad (54)$$

$$\delta_{ji} = -\frac{x_j^4 - x_i^4}{8R_0^3} k + \frac{(x_j^3 - x_i^3)\rho}{2R_0^3} k - \frac{3(x_j^2 - x_i^2)\rho^2}{4R_0^3} k + \frac{(x_j - x_i)\rho^3}{8R_0^3} k. \quad (55)$$

Из выражения (53) следует, что максимум интенсивности ближнего поля (53) при выполнении условия максимума интенсивности дальнего поля (49) будет определяться условиями

$$\Delta_{ji} + \delta_{ji} = 2\pi m_{ji} \quad (m_{ji} = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \quad (56)$$

Очевидно, что для произвольного значения N сумма даже для случая периодически расположенных излучателей (см. (51)) сумма (53) аналитически не может быть рассчитана. Вместе с тем представляет отдельный интерес рассмотрение, соответствующего интерференционному опыту, случая $N = 2$.

Как можно увидеть из (51), (52) в случае двух источников,

$$x_2 = -x_1 = -d/2. \quad (57)$$

Заметим, что согласно (42) применимость описания (53) предполагает, что

наблюдение проводится при условиях, когда

$$\frac{d^2}{4R_0^2} \ll 1 \text{ и } \frac{\rho^2}{R_0^2} \ll 1. \quad (58)$$

Используя (57) из (54), (55) легко определить

$$\Delta_{12} = \frac{d\rho}{R_0} k, \quad \delta_{12} = -\frac{d\rho}{R_0} k \frac{(d^2 + 4\rho^2)}{8 \cdot R_0^2}. \quad (59)$$

Подставляя (59) в (53) для интенсивности поля в ближней зоне наблюдения получим

$$I_2(\rho) = \left(\frac{a}{R_0} \right)^2 \left(1 + \cos \left[\frac{d\rho}{R_0} k - \frac{d\rho}{R_0} k \frac{(d^2 + 4\rho^2)}{8 \cdot R_0^2} \right] \right). \quad (60)$$

Полагая в (60) $\delta_{12} = 0$ и используя (59) можно получить выражение интенсивности для интерференционного опыта в картине Френеля [1,2]:

$$I_2(\rho) = \left(\frac{a}{R_0} \right)^2 \left(1 + \cos \left[\frac{d\rho}{R_0} k \right] \right). \quad (61)$$

В приближении Фраунгофере, когда полагается, что $\Delta_{12} = 0$ интенсивность поля (61) принимает вид:

$$I_2(\rho) = 2 \left(a/R_0 \right)^2. \quad (62)$$

Из выражения (59), (60) можно получить условие выполнения максимума интенсивности для интерференционной картины в ближней зоне:

$$\Delta_{12} + \delta_{12} = \frac{d\rho}{R_0} k \left(1 - \frac{(d^2 + 4\rho^2)}{8 \cdot R_0^2} \right) = 2\pi m_{12} \quad (m_{12} = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \quad (63)$$

Пренебрегая в (63) величиной $\delta_{12} \ll 2\pi$ (см. (59)) получим классический результат:

$$\Delta_{12} = \frac{d\rho}{R_0} k = 2\pi m_{12} \quad (m_{12} = 0, \pm 1, \pm 2, \dots), \quad (64)$$

описывающий распределение интенсивности в средней зоне (приближение Френеля).

Как видно из формул (59)–(61) распределение интенсивности определяется нечетными степенями по величине ρ . Это означает, что во всех зонах наблюдения распределение интенсивности является симметричным $I_2(\rho) = I_2(-\rho)$. Важно заметить, что т.к. относительно величины ρ равенство (63) является кубическим уравнением, то в ближней зоне для каждого фиксированного значения m_{12} максимум интенсивности проявляется в трех точках. Как видно из (64) в средней зоне каждому значению m_{12} соответствует одно значение ρ . На Рис.5 представлены зависимости величин Δ_{12} , δ_{12} от продольной дистанции наблюдения ρ в интерференционном опыте $\lambda = 0.64 \cdot 10^{-6} \text{ м}$, $d = 0.3 \cdot 10^{-3}$ для трех различных значений когда $R_0 = 1 \text{ м}$, 1.5 м , 2 м .

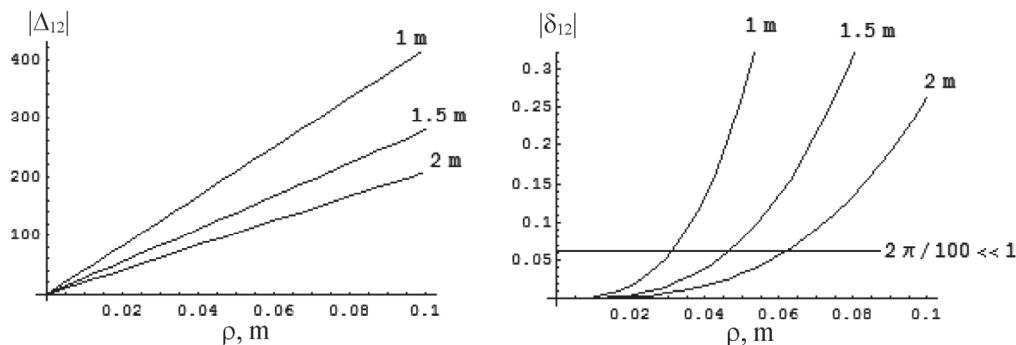


Рис.5. Зависимость величин Δ_{12} , δ_{12} от продольной дистанции наблюдения ρ в интерференционном опыте $\lambda = 0.64 \times 10^{-6}$ м, $d = 0.3 \times 10^{-3}$ для трех различных значений $R_0 = 1$ м, 1.5 м, 2 м.

На правом рисунке представлена также прямая $\delta_{12} = 2\pi/100$. Если считать, что значение $2\pi/100 \ll 1$ и, следовательно, в формулах (59), (60) и (63) данным значением δ_{12} можно пренебречь, то легко увидеть, что приближению Френеля соответствует ограниченная область значений величины ρ . Так, например, когда $R_0 = 2$ м область значений величины ρ для применения приближения Френеля (61) ограничена значениями $|\rho| \leq 0.062$ м. Ясно, что для описания распределения интенсивности при значениях $|\rho| > 0.062$ м надо руководствоваться приближением более высокого порядка (см. (60)). Заметим также, что при $|\rho| = 0.062$ величина Δ_{12} принимает значение 129.852, которое примерно в 21 раз больше 2π .

6. Заключение

Таким образом, согласно представленным в настоящей работе результатам, для применения к задаче описания суперпозиционного поля многих источников прилежного подхода, помимо рассмотрения применимости приближения к описанию поля одного источника системы, необходимо учитывать также количество излучателей системы.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. Борн, Э. Вольф. Основы оптики, Москва: Наука, 1973.
2. Г.С. Горелик. Колебания и волны, Москва: Физматлит, 2007.
3. V.A. Soifer, O. Korotkova, S.N. Khonina, E.A. Shchepakina. Computer Optics, **40**, 605 (2016).
4. L.L. Doskolovich, E.A. Bezus, D.A. Bykov, et al., Optics Express., **27**, 25814 (2019).
5. R. Gordon. J. Opt. A: Pure Appl. Opt., **8**, L1 (2006).
6. R. Castañeda, W. Toro, J. Garcia-Sucerquia. Optik, **126**, 5963 (2015).
7. L.L. Doskolovich, N.L. Kazansky, S.I. Kharitonov, V.A. Soifer. Journal of Modern Optics, **43**, 1423 (1996).
8. G. Popescu, T. Ikeda, R.R. Dasari, M.S. Feld. Opt. Lett., **31**, 775 (2006).
9. W. Zhang, H. Zhang, C.J.R. Sheppard, G. Jin. J. Opt. Soc. Am. A, **37**, 1748 (2020).

10. W. Zhang, H. Zhang, G. Jin. Optics Express, **28**, 39916 (2020).
11. Д.В. Крысанов, А.Г. Кюркчан, С.А. Маненков. Акустический журнал, **67**, 126 (2021).
12. В.П. Будак, Д.С. Ефременко, П.А. Смирнов. Светотехника, **4**, 55 (2020).
13. A.Zh. Khachatrian. J. Contemp. Phys., **56**, 313 (2021).
14. A.Zh. Khachatrian. J. Contemp. Phys., **57**, 127 (2022).

ՀԱՐԱԿԻՑ ԳՈՏՈՒՄ ԱԼԻՔԱՅԻՆ ԴԱՇՏԻ ՆԿԱՐԱԳՐՄԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ա.Ժ. ԽԱՉԱՏՐՅԱՆ, Է.Է. ԷԼԲԱԿՅԱՆ, Ա.Ն. ՊԱՐՍԱՄՅԱՆ, Վ.Ա. ԽՈԵՏՅԱՆ

Սֆերիկ ալիքի փուլի համար ստացվել են դիտման հարակից, միջին և հեռավոր գոտիներում նկարագրման արտահայտությունները: Ապացուցված է, որ Ֆրենելի մոտարկմամբ սֆերիկ ալիքը ներկայացվում է պարաբոլիդական ալիքով, որն իր հերթին Ֆրաունհոֆերի մոտավորության դեպքում մոտավորվում է հարթ ալիքով: Դրա հիման վրա դիտարկվում է բազմաթիվ կոհերենտ կետային աղբյուրների համակարգի կողմից գեներացված ալիքային դաշտի մոտավոր նկարագրության խնդիրը: Հարակից գոտու մոտավորության շրջանակներում ստացվել է ինտերֆերենցիայի խնդրի համար ինտենսիվության բաշխվածությունը: Ցույց է տրված, որ ինտենսիվության մաքսիմումների բաշխումը որոշվում է խորանարդ հավասարումով, որը Ֆրենելի մոտավորությամբ վեր է ածվում գծային հավասարման, ինչը արտահայտում է ինտենսիվության հավասարաչափ բաշխման վերաբերյալ դասական արդյունքը:

ON THE PROBLEM OF DESCRIBING THE WAVE FIELD IN THE NEAR ZONE

A.ZH. KHACHATRIAN, E.E. ELBAKYAN, A.N. PARSAMYAN, V.A. KHOETSYAN

Expressions for the phase of a spherical wave in the near, middle, and far zones of observation are obtained. It is proved that in the Fresnel approximation a spherical wave is approximated by a paraboloid wave, which, in turn, is approximated by a plane wave in the Fraunhofer approximation. Based on this, the problem of describing a wave field generated by a system of many coherently emitting point sources is considered. An expression is obtained for the intensity distribution in the interference problem for the near field approximation. It is shown that the distribution of intensity maxima is determined by solving a cubic equation, which, in the Fresnel approximation, transforms into a linear equation expressing the classical result on a uniform distribution of intensity maxima.