

DOI: 10.54503/0571-7132-2022.65.4-579

## ПРОСТАЯ МОДЕЛЬ ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ЗВЕЗДЫ КАК ФИГУРЫ ГЮЙГЕНСА-РОША

Г.М.КАРЕЛИН<sup>1</sup>, М.В.КОСТИНА<sup>2</sup>, П.А.ТАРАКАНОВ<sup>2</sup>,  
А.В.ДЕМЕНТЬЕВ<sup>2</sup>, Ю.В.МИЛАНОВА<sup>2</sup>

Поступила 23 октября 2022

Принята к печати 11 ноября 2022

В работе для модели вращающейся звезды как фигуры Гюйгенса-Роша получены простые аналитические формулы экваториального радиуса и относительной скорости вращения как функции абсолютного и относительного углового момента. Проведено сравнение полученных результатов с результатами численного моделирования строения вращающихся звезд, показано, что рассматриваемая аналитическая модель достаточна для описания соответствующих параметров.

**Ключевые слова:** *вращающаяся звезда: фигура Гюйгенса-Роша*

**1. Введение.** Задача о динамическом взаимодействии планеты со своей звездой в настоящее время достаточно активно изучается. Есть множество работ, посвященных миграции планет, однако в них практически никогда не учитывается эволюция самой звезды.

Основной сложностью при проведении моделирования является то, что главным механизмом, определяющим динамическую эволюцию планетной системы, является приливное взаимодействие. Но в то же время существенное влияние на динамические характеристики звезды и, как следствие, на динамическую эволюцию системы в целом оказывает перестройка внутренней структуры звезды, определяемая процессами звездной эволюции. Также существенным для решения задачи является учет вращения звезды вокруг собственной оси. Тем самым данные факторы требуется учитывать совместно, что оказывается достаточно сложной задачей, поскольку модели звездной эволюции в общем случае не "встраиваются" в систему уравнений, определяющих динамическую эволюцию планетной системы.

Попытка реализовать подобное была предпринята в работе [1], однако она оказалась сопряжена со сложностями. Полноценная модель звездной эволюции слишком сложна для быстрой и эффективной реализации, поэтому необходимо использовать какой-либо существующий пакет моделирования внутреннего строения и эволюции звезд и тем или иным способом объединять его с моделированием динамической эволюции планетной системы. В упомянутой

выше работе такое объединение удалось выполнить с использованием пакета моделирования звездной эволюции MESA, однако это привело к необходимости модификации исходных кодов пакета.

Использование готовых табличных данных, содержащих сетки заранее вычисленных моделей, также сопряжено со сложностями. Например, сетки моделей эволюции вращающихся звезд (построенные в работе [2] и других работах той же группы) являются фактически единственными существующими результатами, однако и они доступны не полностью, а опубликованные данные представляют собой таблицы с небольшой степенью дискретизации, недостаточной для использования. Открытых же кодов, реализующих учет вращения звезды при расчете моделей звездной эволюции, не существует.

В данной работе исследуется другой возможный путь: получение эмпирических и полуэмпирических зависимостей, описывающих параметры звезд и их эволюции, для последующего использования их в модели динамической эволюции планетной системы.

**2. Фигура Гюйгенса-Роша.** Широко используемой моделью вращающейся звезды является фигура равновесия Гюйгенса-Роша [3,4] (хотя это и не единственный возможный вариант, в [5] рассматривается ряд других моделей, например, аналоги эллипсоидов Маклорена для дифференциального вращения). В данной модели фигура равновесия состоит из двух компонентов [6]:

1. притягивающий точечный центр;
2. невесомая твердотельно вращающаяся оболочка.

Допустимость использования такого грубого приближения объясняется тем, что плотность в звезде быстро убывает с радиусом.

Форма вращающейся фигуры равновесия в модели Гюйгенса-Роша зависит от скорости вращения [7]:

1. неподвижная оболочка имеет сферическую форму;
2. при медленном вращении фигура близка к сфероиду (эллипсоиду вращения);
3. для случая высоких скоростей фигура становится все более сплюснутой;
4. наконец, критическая фигура вращения содержит особенность на экваторе.

По результатам вычислительных экспериментов [2] полярный радиус фигуры слабо зависит от скорости вращения звезды. Поэтому в дальнейшем пренебрежем этой зависимостью и будем считать, что полярный радиус не меняется. В отличие от полярного экваториальный радиус в большинстве случаев неизвестен и существенно зависит от скорости вращения.

Существуют улучшения данной модели [8, 9], но для текущей работы их сложность избыточна, уточнение модели, по-видимому, не дает существенного улучшения результата.

Условие равновесия для фигуры Гюйгенса-Роша в простейшей параметризации [6] заключается в том, что потенциал силы тяжести на полярном расстоянии  $\theta$  равен гравитационному потенциалу на полюсе:

$$\frac{GM}{R(\theta)} + \frac{\Omega^2 R^2(\theta) \sin^2 \theta}{2} = \frac{GM}{R_p}, \quad (1)$$

где  $G$  - гравитационная постоянная,  $M$  - масса звезды,  $R(\theta)$  - радиус звезды на полярном расстоянии  $\theta$ ,  $\Omega$  - угловая скорость вращения звезды и  $R_p$  - полярный радиус звезды.

Для радиуса  $R_e$ , соответствующего широте экватора ( $\theta = \pi/2$ ), получаем:

$$\frac{GM}{R_e} + \frac{R_e^2 \Omega^2}{2} = \frac{GM}{R_p}.$$

Угловую скорость вращения звезды можно заменить на отношение углового момента  $J$  и полярного момента инерции  $I$ :

$$\frac{GM}{R_e} + \frac{J^2 R_e^2}{2 I^2} = \frac{GM}{R_p}.$$

Введем  $F = I/MR^2$  - приведенный момент инерции (в англоязычной литературе именуемый "moment of inertia factor") - безразмерную величину, характеризующую распределение массы внутри тела, и преобразуем предыдущее соотношение:

$$\frac{GM}{R_e} + \frac{J^2}{2 F^2 M^2 R_e^2} = \frac{GM}{R_p}.$$

Решая это уравнение, получаем два корня вида

$$R_{e,1,2} = \frac{R_p}{2} \pm \frac{\sqrt{R_p} \sqrt{F^2 G M^3 R_p + 2 J^2}}{2 F \sqrt{G} M^{3/2}}.$$

Для нахождения экваториального радиуса фигуры равновесия нужен больший корень. Для него при нулевой скорости вращения экваториальный радиус будет равен полярному, как и следует ожидать (а меньший корень будет равен нулю). В итоге получаем выражение для экваториального радиуса как функции углового момента:

$$R_e = \frac{R_p}{2} + \sqrt{\frac{F^2 G M^3 R_p^2 + 2 R_p J^2}{4 F^2 G M^3}}. \quad (2)$$

**3. Критический режим вращения.** Критический режим вращения определяется равенством модулей центробежного и гравитационного потенциала на экваторе:

$$\Omega_{crit}^2 R_{e_{crit}}^2 = \frac{GM}{R_{e_{crit}}},$$

откуда находим

$$\Omega_{crit}^2 = \frac{GM}{R_{e_{crit}}^3}. \quad (3)$$

При подстановке квадрата угловой скорости в изначальное условие равновесия (1) получаем, что для критической скорости вращения экваториальный и полярный радиус относятся как:

$$R_{e_{crit}} = \frac{3 R_{p_{crit}}}{2}.$$

Подставив это отношение в условие равновесия:

$$\frac{GM}{3 R_{p_{crit}}} = \frac{2 J^2}{9 F^2 M^2 R_{p_{crit}}^2},$$

получаем аналитические выражения для критических моментов импульса и инерции как функций массы, радиуса и приведенного момента инерции:

$$J_{crit} = \frac{F}{2} \sqrt{6 G M^3 R_{p_{crit}}}, \quad (4)$$

$$I_{crit} = \frac{9 F}{2} M R_{p_{crit}}^2. \quad (5)$$

**4. Использование относительного углового момента.** Перейдем к относительному угловому моменту инерции как новой независимой переменной. Для этого введем безразмерные величины: относительный параметр вращения  $\omega$  ( $0 \leq \omega \leq 1$ ):

$$\omega = \frac{\Omega}{\Omega_{crit}}$$

и относительный угловой момент  $j$  ( $0 \leq j \leq 1$ ):

$$j = \left( \frac{J}{J_{crit}} \right) = \frac{J}{\frac{F}{2} \sqrt{6 G M^3 R_{p_{crit}}}}. \quad (6)$$

При медленном вращении оба параметра будут малы, а при режиме вращения, близком к критическому, будут близки к 1.

В общем случае  $R_p$  и  $F$  зависят от  $j$ . Как уже указывалось выше, полярный радиус слабо зависит от относительного параметра вращения (максимальное изменение: случай звезды с  $1 M_{\odot}$  - уменьшение на 5% при критической скорости вращения [4]). Поэтому в дальнейшем будем считать,

что полярный радиус всегда совпадает с полярным радиусом при критическом режиме вращения, т.е.  $R_p \equiv R_{p_{crit}}$ .

При не зависящих от вращения  $R_p$  и  $F$  выражение для экваториального радиуса в зависимости от относительного углового момента примет вид:

$$R_e(j) = \frac{R_p}{2} \left( 1 + \sqrt{1 + 3j^2} \right). \quad (7)$$

Тогда момент инерции на экваторе  $I = FMR_e$  может быть выражен через относительный угловой момент следующим образом:

$$I(j) = FMR_p^2 \frac{1}{4} \left( 1 + \sqrt{1 + 3j^2} \right)^2. \quad (8)$$

Также через относительный угловой момент можно выразить относительный параметр вращения:

$$\omega(j) = \frac{9j}{\left( 1 + \sqrt{1 + 3j^2} \right)^2}, \quad (9)$$

и отношение линейной скорости на экваторе к критической:

$$\frac{v}{v_{crit}}(j) = \frac{3j}{\left( 1 + \sqrt{1 + 3j^2} \right)^2}. \quad (10)$$

Из выражений (7) и (9) можно получить относительный угловой момент через относительную угловую скорость и отношение радиусов - "сжатие" фигуры равновесия.

$$j = \frac{4}{9} \frac{R_e^2(\omega)}{R_p^2(\omega)} \omega. \quad (11)$$

**5. Обсуждение результатов.** Таким образом, получены аналитические выражения для экваториального радиуса, относительной угловой скорости и линейной скорости на экваторе как функции относительного углового момента. Приближенные значения можно использовать как непосредственно, так и в качестве стартового приближения при численном поиске более точных значений.

Проведем сравнение этих результатов с результатами численного моделирования. Наиболее часто используемые сейчас в этой области результаты приведены в статье [2], которая, в частности, стала основой для написания второй главы в монографии [4]. Результаты сравнения приведены на рис.1 и рис.2. Для сравнения использованы модели со стандартной металличностью  $Z=0.02$  в большом диапазоне масс. Следует отметить, что в работе [2] результаты были получены путем численного моделирования 112 звездных моделей без

предоставления промежуточных результатов вычислений и исходных кодов программ, что делает их малополезными для интересующей нас задачи.

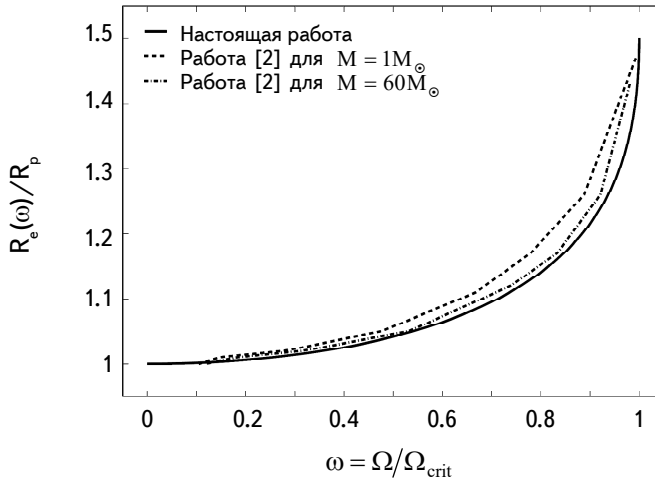


Рис.1. Сравнение зависимостей отношения экваториального и полярного радиусов от относительной угловой скорости вращения при одинаковых значениях прочих параметров с результатами моделирования в работе [2].

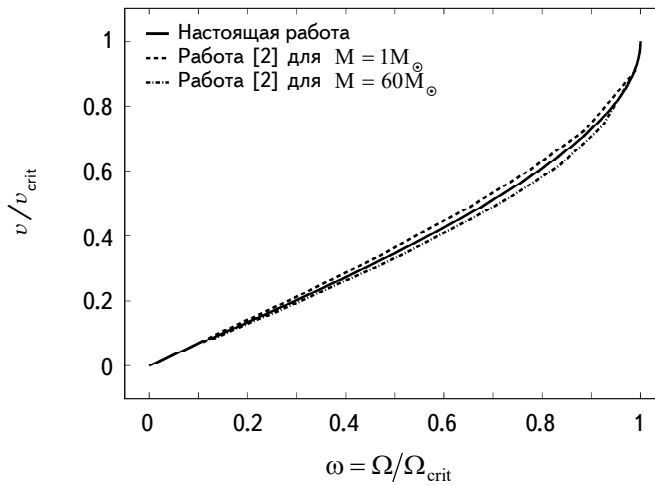


Рис.2. Сравнение зависимостей отношения линейной скорости вращения на экваторе к критической скорости от относительной угловой скорости вращения при одинаковых значениях прочих параметров с результатами моделирования в работе [2].

Приведем также сравнение со связывающим  $\omega$  и  $R_e$  аналитическим выражением

$$R(\omega, \theta) = \frac{3R_p}{\omega \sin \theta} \cos \left( \frac{\pi + \arccos(\omega \sin \theta)}{3} \right), \quad (12)$$

полученным в работе [10] путем прямого решения уравнения (1). Видно (см. рис.3), что совпадение оказывается полным.

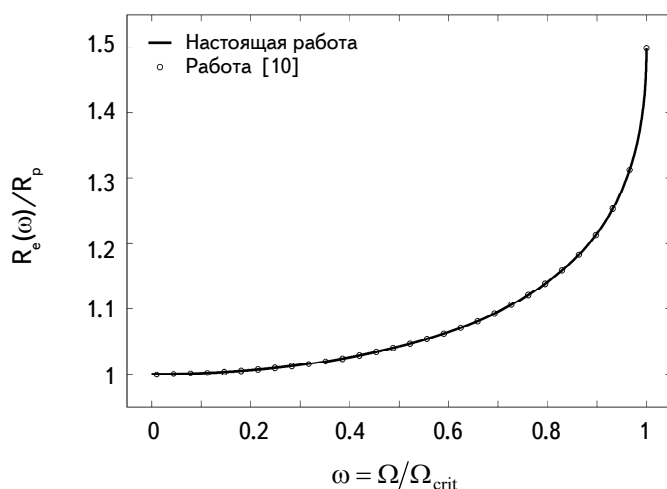


Рис.3. Сравнение зависимости отношения экваториального и полярного радиусов от относительной угловой скорости вращения при одинаковых значениях прочих параметров с аналитическим выражением, полученным в работе [10].

Тем самым для модели вращающейся звезды как фигуры равновесия Гюйгенса-Роша получены следующие результаты:

- найдены точные аналитические формулы экваториального радиуса и относительной скорости вращения как функции абсолютного и относительного углового момента;
- полученные результаты полностью согласуются с аналогичными, полученными ранее существенно отличающимся и более сложным способом - статистическим исследованием сеток моделей, поэтому могут быть использованы для последующего моделирования динамической эволюции планетных систем.

<sup>1</sup> Окинавский институт науки и технологии, Окинава, Япония

<sup>2</sup> Санкт-Петербургский государственный университет,  
Санкт-Петербург, Россия, e-mail: peter@astro.spbu.ru

## THE SIMPLE MODEL OF A ROTATING STAR AS THE HUYGENS-ROCHE FIGURE

G.M.KARELIN<sup>1</sup>, M.V.KOSTINA<sup>2</sup>, P.A.TARAKANOV<sup>2</sup>,  
A.V.DEMENTYEV<sup>2</sup>, Yu.V.MILANOVA<sup>2</sup>

In the paper, simple analytical formulas for the rotating star model as a Huygens-Roche figure are obtained for the equatorial radius and relative rotation velocity as functions of absolute and relative angular momentum. The results are compared with the results of numerical simulations of the structure of rotating stars and it is shown that the considered analytical model is sufficient to describe those parameters.

Keywords: *rotating star: Huygens-Roche figure*

## ЛИТЕРАТУРА

1. П.А.Тараканов, А.С.Артамонов, *Астрофизика*, **58**, 585, 2015, (*Astrophysics*, **58**, 550, 2015).
2. S.Ekström *et al.*, *Astron. Astrophys.*, **478**, 467, 2008.
3. A.Palacios, in "EAS Publications Series", Ed. by P.Hennebelle, C.Charbonnel, **62**, 227, 2013.
4. A.Maeder, "Physics, Formation and Evolution of Rotating Stars", *Astron. Astrophys. Library*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2008.
5. Ж.-Л.Тассуль, "Теория вращающихся звезд", М., Мир, 1982.
6. Н.П.Путьев, В.Б.Титов, К.В.Холишевников, "Фигуры равновесия небесных тел", Изд-во СПбГУ, 2002.
7. R.G.Deupree, *Astrophys. J.*, **735**, 69, 2011.
8. H.A.Folonier, S.Ferraz-Mello, K.V.Kholshevnikov, *Cel. Mech. Dyn. Astron.*, **122**, 183, 2015.
9. Z.F.Seidov, arXiv: 0407175 [astro-ph], 2004.
10. G.T. van Belle, *Astron. Astrophys. Rev.*, **20**, id. 51, 2012.