

А.А. ТЕРЗЯН, Г.С. СУКИАСЯН, А.Э. АКОПЯН, А.А. ГЕВОРГЯН

К ПОСТРОЕНИЮ ОПТИМАЛЬНОЙ РАСЧЕТНОЙ СЕТКИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ПОЛЕВЫХ ЗАДАЧ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Предложен метод построения тетраэдрических сеток Делоне для расчета трехмерных магнитных полей методом конечных элементов. Метод основан на свойстве двойственности трехмерных сеток Делоне и многогранных мозаик Вороного. Метод удобен для распараллеливания.

Ключевые слова: электромагнитное поле, метод конечных элементов, трехмерные сетки Делоне, многогранники Вороного.

Введение. Решение нелинейных полевых задач методом конечных элементов сводится к построению дискретизационной сетки и нахождению на этой сетке минимума энергетического функционала путем приравнивания нулю его производных. В результате получается система уравнений с неизвестными значениями потенциала в узлах сетки, причем количество уравнений равно количеству неизвестных и количеству некраевых узлов сетки.

Сходимость процесса последовательных приближений к решению нелинейных полевых задач сильно зависит от конфигурации сетки. Скорость сходимости тем выше, чем меньше величина недиагональных элементов матрицы получающейся системы уравнений относительно диагональных, и наоборот, при плохой сетке, приводящей к увеличению указанного соотношения, процесс сходимости решения замедляется, а при критических значениях параметров сетки процесс решения и вовсе расходится [1,2]. Таким образом, для расчета магнитных полей методом конечных элементов дискретизационную сетку следует строить так, чтобы минимизировать сумму недиагональных элементов матрицы получающейся системы уравнений.

В настоящей работе показано, что при заданном наборе узлов из всех возможных сеток наилучшей (в вышесказанном смысле) является сетка Делоне [3]. Утверждение справедливо для расчета методом конечных элементов как двумерных, так и трехмерных магнитных полей.

Заметим, что триангуляция Делоне была предложена задолго до появления метода конечных элементов, и задача ее построения является одной из базовых в вычислительной геометрии [4 - 6].

1. Двумерный случай. Известно, что для двумерных треугольных сеток на скорость сходимости процесса последовательных приближений к решению нелинейных полевых задач отрицательно влияет наличие в сетке тупоугольных

треугольников. Всегда ли возможно построить сетку без тупоугольных треугольников? Ответ зависит от расположения сеточных узлов.

Рассмотрим четыре узла, расположенные в вершинах какого-нибудь выпуклого четырехугольника. Возможны два варианта:

- 1) тупые углы четырехугольника находятся друг против друга (рис.1а). Тогда короткая диагональ четырехугольника уничтожит оба тупых угла, и мы получим сетку Делоне без тупоугольных треугольников. Это очевидно и не требует каких-либо измерений. Такое расположение узлов назовем удачным;
- 2) оба тупых угла четырехугольника находятся рядом (рис. 1б). Тогда каждая диагональ четырехугольника уничтожает один тупой угол, сохранив второй. Такое расположение узлов назовем неудачным.

Как бы мы ни построили сетку на неудачно расположенных узлах, она будет содержать тупоугольный треугольник. Избавиться от тупых углов можно только добавлением дополнительных узлов на большей стороне (рис. 1в).

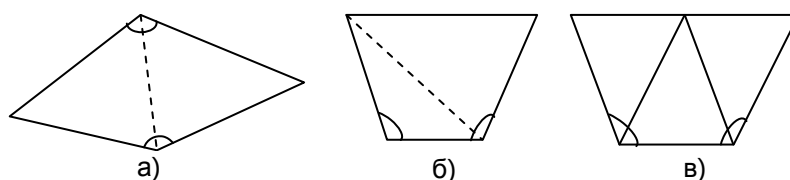


Рис. 1

Дадим общее определение неудачно расположенных узлов. Множество узлов $\{P_i\}_{i=1}^n$ называется неудачно расположенным, если существуют два концентрических круга K_r и K_R (рис.2) с близкими радиусами $0,9R < r < R$ такие, что внутри меньшего круга нет ни одного узла, а больший круг содержит, по крайней мере, четыре узла из данного множества, т.е.

$$\#(K_r \cap \{P_i\}) = 0, \quad \#(K_R \cap \{P_i\}) > 3,$$

где $\#$ означает количество точек.

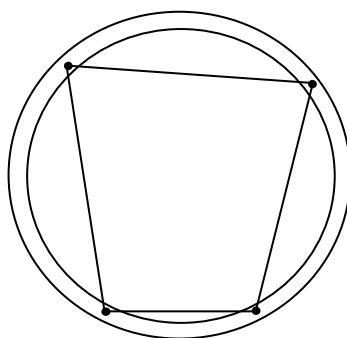


Рис. 2

Если таких кругов нет, то множество узлов называется удачно расположенным.

В [1] показано, что для двумерных треугольных сеток недиагональные элементы матрицы системы уравнений пропорциональны котангенсам внутренних углов треугольников сетки, а именно,

$$c_{ij} = -\frac{1}{2}(v_{ijm} \operatorname{ctg} \beta_m + v_{ijk} \operatorname{ctg} \beta_k), \quad (1)$$

где c_{ij} - коэффициент зависимости узлов i и j ; v - величина, обратная магнитной проницаемости; v_{ijm} - значение v внутри треугольника i,j,m ; v_{ijk} - значение v внутри треугольника i,j,k (рис. 3).

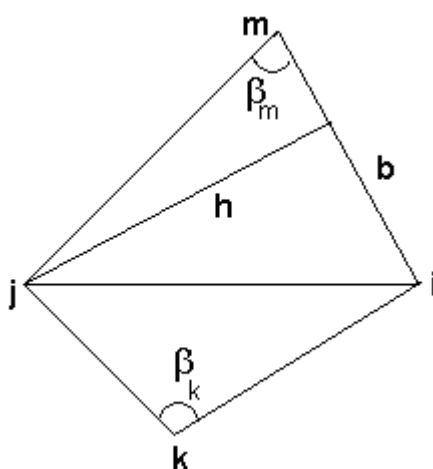


Рис. 3

Аналогичный результат для трехмерных полевых задач и соответствующих тетраэдрических сеток получен в [2].

В силу (1), чтобы минимизировать сумму недиагональных элементов матрицы получающейся системы уравнений, надо минимизировать сумму котангенсов всех внутренних углов всех треугольников сетки.

Утверждение 1. Триангуляция Делоне обладает минимальной суммой котангенсов углов всех своих треугольников среди всех возможных триангуляций с данным множеством узлов.

Вначале докажем это свойство для четырехугольника ABCD (см. рис. 4).

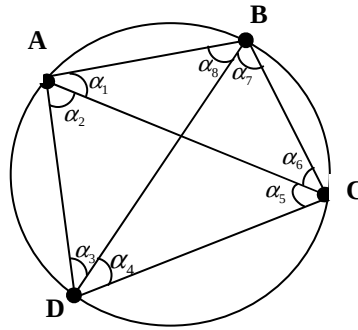


Рис. 4

Возможны две сетки: триангуляция T_{BD} с диагональю BD и треугольниками ABD и BCD и триангуляция T_{AC} с диагональю AC и треугольниками ABC и ADC . У триангуляции T_{BD} сумма S_{BD} котангенсов всех углов обоих своих треугольников равна

$$S_{BD} = \text{ctg}(\alpha_1 + \alpha_2) + \text{ctg}\alpha_3 + \text{ctg}\alpha_8 + \text{ctg}(\alpha_5 + \alpha_6) + \text{ctg}\alpha_4 + \text{ctg}\alpha_7. \quad (2)$$

У триангуляции T_{AC} сумма S_{AC} котангенсов всех углов обоих своих треугольников равна

$$S_{AC} = \text{ctg}(\alpha_3 + \alpha_4) + \text{ctg}\alpha_2 + \text{ctg}\alpha_5 + \text{ctg}(\alpha_7 + \alpha_8) + \text{ctg}\alpha_1 + \text{ctg}\alpha_6. \quad (3)$$

Если

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_5 + \alpha_6 > \pi,$$

то точка D лежит вне окружности, описанной вокруг треугольника ABC , триангуляция T_{AC} является триангуляцией Делоне и $S_{AC} < S_{BD}$.

Если же

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_5 + \alpha_6 < \pi,$$

то точка C лежит вне окружности, описанной вокруг треугольника ABD , триангуляция T_{BD} является триангуляцией Делоне и $S_{AC} > S_{BD}$. Следовательно, в обоих случаях триангуляция Делоне обладает меньшей суммой котангенсов углов.

Теперь докажем это свойство для бóльшего количества узлов. Так как количество возможных сеток конечно, то существует сетка T с минимальной суммой котангенсов углов всех своих треугольников среди всех возможных триангуляций с данным множеством узлов. Предположим, что T не является триангуляцией Делоне. Тогда существует треугольник ABD , внутри описанной окружности которого лежит узел C . Заменяя в четырехугольнике $ABCD$ диагональ

BD на AC, получим $S_{AC} < S_{BD}$, что противоречит условию минимальности сетки Т. Итак, утверждение 1 доказано.

Из обратной пропорциональности функции котангенса следует, что *при решении полевых задач методом конечных элементов триангуляция Делоне является оптимальной в смысле скорости сходимости*. Однако триангуляция Делоне не гарантирует отсутствия тупоугольных треугольников и сходимости соответствующего процесса последовательных приближений.

Для удачно расположенного множества узлов триангуляция Делоне не содержит тупоугольных треугольников и обеспечивает сходимость процесса последовательных приближений к решению нелинейных полевых задач.

Для двумерного случая задача построения триангуляции Делоне практически решена. Имеется много эффективных алгоритмов автоматического построения триангуляции Делоне, но они не работают в трехмерном случае.

2. Трехмерный случай. Вышеприведенное определение неудачно расположенных узлов можно обобщить на трехмерный случай. Множество узлов в трехмерном пространстве называется неудачно расположенным, если существуют два концентрических шара K_r и K_R с близкими радиусами $0,9R < r < R$ такие, что внутри меньшего шара нет ни одного узла, а больший шар содержит, по крайней мере, пять узлов из данного множества, т.е.

$$\#(K_r \cap \{P_i\}) = 0, \quad \#(K_R \cap \{P_i\}) > 4.$$

Однако это определение непрактично в том смысле, что для большого числа узлов, используя это определение, крайне трудно проверить, удачно расположены узлы или нет, так как число возможных шаров бесконечно.

В настоящей работе предложен метод нахождения подобластей, где узлы неудачно расположены, а также нахождения тупоугольных тетраэдров без трудоемкого процесса вычисления всех углов всех тетраэдров. Метод основан на свойстве двойственности трехмерных сеток Делоне и многогранных мозаик Вороного [5,7]. Предлагается вначале строить на данных узлах трехмерного пространства мозаику Вороного, а затем уже переходить к тетраэдрическим сеткам Делоне. Дадим соответствующие определения.

Триангуляция Делоне. Пусть $\{P_i\}_{i=1}^n$ – заданное множество точек (узлов) в трехмерном пространстве. Множество $\{D_j\}_{j=1}^m$ тетраэдров (четырехгранников, не обязательно правильных) называется триангуляцией Делоне на базе системы узлов $\{P_i\}_{i=1}^n$, если выполнены следующие условия:

- внутренности тетраэдров попарно не пересекаются;
- все вершины всех тетраэдров из системы узлов $\{P_i\}_{i=1}^n$;

- объединение $\bigcup_{j=1}^m D_j$ заполняет всю выпуклую оболочку точек $\{P_i\}_{i=1}^n$;
- для каждого тетраэдра D_j внутри описанного шара S_j нет ни одной точки из $\{P_i\}_{i=1}^n$.

Триангуляции Делоне дуальны к мозаикам Вороного. Следовательно, можно строить трехмерные триангуляции Делоне с помощью многогранных мозаик Вороного.

Трехмерные мозаики Вороного. Множество V_i точек, расстояние которых до узла P_i меньше, чем до остальных узлов P_j , $i \neq j$, называется многогранником Вороного относительно системы узлов $\{P_i\}_{i=1}^n$. Множество $\{V_i\}_{i=1}^n$ многогранников называется мозаикой Вороного на базе системы узлов $\{P_i\}_{i=1}^n$, если каждый V_i является многогранником Вороного относительно той же системы узлов. Отметим, что в отличие от сетки Делоне, состоящей из четырехгранников, в мозаике Вороного количество многогранников равно количеству базовых узлов, и количество граней отдельного многогранника может быть произвольным.

Утверждение 2. Для любой конфигурации узлов $\{P_i\}_{i=1}^n$ всегда существует (притом единственная) мозаика Вороного на базе системы $\{P_i\}_{i=1}^n$. Все элементы мозаики Вороного являются выпуклыми многогранниками.

Доказательство. Рассмотрим множество H_{ij} точек, расстояние которых до P_i меньше, чем до P_j . Множество H_{ij} есть полупространство, ограниченное плоскостью, перпендикулярной отрезку $P_i P_j$ и проходящей через середину этого отрезка. Многогранники Вороного получаются как пересечения

$$V_i = \bigcap_{j \neq i} H_{ij}.$$

Это пересечение не пусто, так как содержит, по крайней мере, точку P_i . Остается заметить, что любое пересечение полупространств всегда является выпуклым многогранником.

Виды тупоугольных тетраэдров. В отличие от плоского треугольника, который может иметь только один тупой угол, трехмерный тетраэдр может иметь несколько тупых углов. На рис. 5 изображен тетраэдр, у которого плоский угол при одном ребре (AB) является тупым. Такой тетраэдр назовем косым тупоугольным тетраэдром.

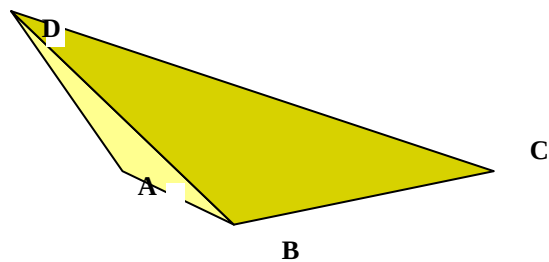


Рис. 5

На рис. 6 изображен тетраэдр, у которого плоские углы при трех ребрах (AC, AB, AD) являются тупыми. Эти ребра имеют общую вершину. Такой тетраэдр назовем “сплюснутым” тупоугольным тетраэдром.

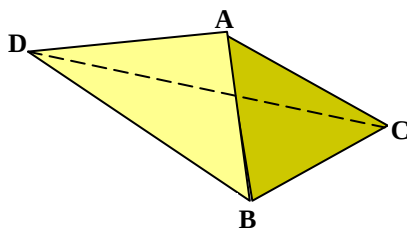


Рис. 6

Рассмотрим выпуклый многогранник, имеющий пять вершин, назовем его пятивершинником. Такой многогранник можно разбить на два или три тетраэдра. В последнем случае все три тетраэдра имеют общее ребро, лежащее внутри пятивершинника. Сумма трех плоских углов при общем ребре равна 360° . Следовательно, при разбиении пятивершинника на три тетраэдра образуются по меньшей мере два косых тупоугольных тетраэдра.

Отсюда получается следующий критерий удачного расположения узлов: если пятивершинник при триангуляции Делоне делится на два тетраэдра, то узлы расположены удачно, и оба тетраэдра остроугольные. Если же пятивершинник при триангуляции Делоне делится на три тетраэдра, то узлы расположены неудачно, и мы стоим перед дилеммой, что хуже: три косых тупоугольных тетраэдра, или два сплюснутых тупоугольных тетраэдра. Ответ: “оба хуже”, и лучше добавить на общем ребре дополнительный узел.

Реализация. Разработанные теоретические утверждения реализованы в виде компьютерной программы для автоматического обнаружения подобластей трехмерных сеток с неудачным расположением узлов. Алгоритм основан на свойстве двойственности триангуляций Делоне и многогранных мозаик Вороного.

Для данного множества узлов вначале строится мозаика Вороного. Для этого каждому узлу приписывается шар малого радиуса с центром в данном узле так,

чтобы не задевать другие узлы. Затем все шары одновременно “разбухают”, при этом их радиусы растут с равной скоростью. Когда два шара соприкасаются, их рост в данном направлении прекращается, и их центры запоминаются, как пара соседних узлов. Соединяя соседние узлы, получим, согласно свойству двойственности, трехмерную триангуляцию Делоне.

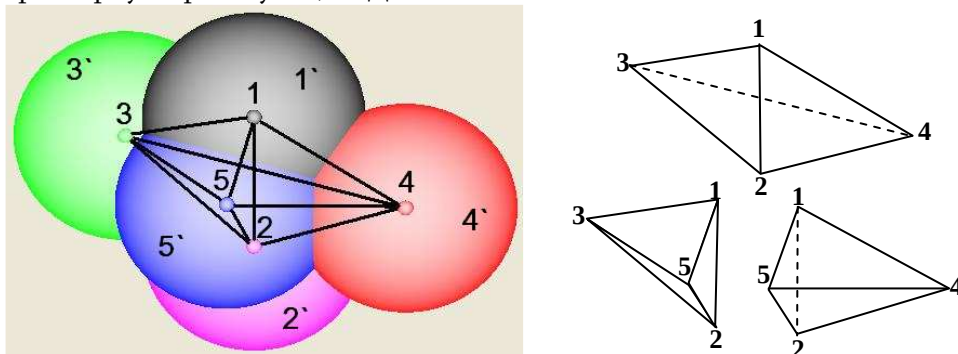


Рис. 7

Разноцветная окраска шаров на экране компьютера позволяет визуально наблюдать построение тетраэдров и обнаруживать недостатки сетки. На рис. 7 показан фрагмент работы программы, где цифрами 1,...,5 обозначены узлы тетраэдров, которые являются центрами, соответственно, шаров 1',...,5'. Видно, что все пять шаров соприкасаются друг с другом, поэтому получаются три тупоугольных тетраэдра, т.е. узлы расположены неудачно. На рисунке же 8 шары с центрами в узлах 1 и 2 не соприкасаются, поэтому получаются два остроугольных тетраэдра.

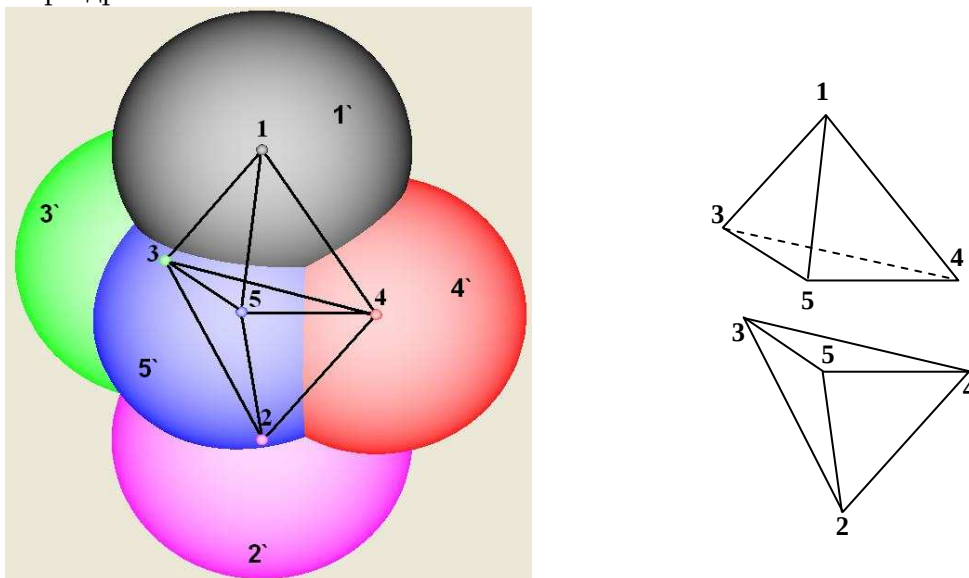


Рис. 8

Предложенный алгоритм не зависит от точности машинных вычислений, и легко распараллеливается.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Терзян А.А., Сукиасян Г.С., Пароникян А.Е.** Об углах треугольной сетки для расчета магнитных полей методом конечных элементов // Известия НАН РА и ГИУА. Сер. ТН. - 2007. - Т. 60, № 3. - С. 523-532.
2. **Терзян А.А., Сукиасян Г.С., Акопян А.Э.** Об оптимизации тетраэдральной сетки для расчета трехмерных магнитных полей методом конечных элементов // Известия НАН РА и ГИУА. Сер. ТН. - 2008. - Т. 61, № 2. - С. 305-317.
3. **Делоне Б.Н.** О пустоте сферы // Изв. АН СССР. ОМЕМ. - 1934. - №4. - С.793-800.
4. **Ruppert J. A.** Delaunay Refinement Algorithm for Quality 2-Dimensional Mesh Generation. NASA Ames Research Center // Submission to Journal of Algorithms. - 1994.
5. **Скворцов А. В.** Триангуляция Делоне и ее применение. -Томск: Изд-во ТУ, 2002.- 128 с.
6. **Галанин М.П., Щеглов И.А.** Разработка и реализация алгоритмов трехмерной триангуляции сложных пространственных областей: итерационные методы.- Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, 2006,
7. **Voronoi G.** Nouvelles applications des parameters continues a la theorie des formes quadratiques. Deuxieme Мѳmoire: Recherches sur les parrallѳloiddres primitifs // J. reine angew. Math. - 1908. - N. 134.- P. 198-287.

ГИУА(П). Материал поступил в редакцию 14.09.2010.

Հ.Ա. ԹԵՐԶՅԱՆ, Հ.Ս. ՍՈՒԳԻԱՍՅԱՆ, Ա.Է. ՀԱԿՈԲՅԱՆ, Ա.Ա. ԳԵՎՈՐԳՅԱՆ

**ՎԵՐՋԱՎՈՐ ՏԱՐԴԵՐԻ ՄԵԹՈԴԻՎ ԴԱՇՏԱՅԻՆ ԽՆԴԻՐՆԵՐԻ ԼՈՒԾՄԱՆ ՀԱՄԱՐ
ՕՊՏԻՄԱԼ ՀԱՇՎԱՐԿԱՅԻՆ ՑԱՆՑԻ ԿԱՌՈՒՑՄԱՆ ՄԱՍԻՆ**

Առաջարկված է Դելոնեի քառանիստ ցանցի կառուցման մեթոդ՝ վերջավոր տարրերի մեթոդով եռաչափ մագնիսական դաշտերի լուծման համար: Մեթոդը հիմնված է Դելոնեի եռաչափ ցանցի և Վորոնոյի բազմանիստերի երկակիության վրա: Մեթոդը հարմար է զուգահեռացման համար:

Առանցքային բառեր. էլեկտրամագնիսական դաշտ, վերջավոր տարրերի մեթոդ, Դելոնեի եռաչափ քառանիստ ցանցեր, Վորոնոյի բազմանիստեր:

H. A. TERZIAN, H. S. SUKIASYAN, A. E. HAKOBYAN, A.A. GEVORGYAN

**ON CONSTRUCTION OF OPTIMAL MESH FOR SOLUTION OF FIELD PROBLEMS BY
FINITE-ELEMENT METHOD**

A structural method of Delaunay tetrahedral mesh for numeric solution of three-dimensional nonlinear field problems by the finite-element method is proposed. The method is based on duality properties of the three-dimensional Delaunay mesh and the Voronoi polyhedrons. The method is comfortable for paralleling.

Keywords: electromagnetic field, finite-element method, three-dimensional tetrahedral Delaunay mesh, Voronoi polyhedrons.