VERTEX-DISTINGUISHING EDGE COLORINGS OF SOME COMPLETE MULTIPARTITE GRAPHS

PETROS PETROSYAN
Yerevan State University
PhD in Physical and Mathematical Sciences
pet_petros@ysu.am

TIGRAN PETROSYAN
Russian-Armenian University
Master's degree student
tigran.petrosyan@student.rau.am

DOI: 10.54503/2579-2903-2022.2-136

Abstract

In graph theory, an edge coloring of a graph is a coloring of the edges, meaning an assignment of colors to edges. Edge coloring can be described as function $f: E(G) \rightarrow N$, where $E(G)$ is the set of graph edges and N is the set of natural numbers. Graph coloring has been studied as an algorithmic problem since the early 1970s. The main objective is to minimize the number of colors while coloring a graph. The smallest number of colors required to color a graph G with specified conditions is called chromatic number of that graph and is denoted by $\chi'(G)$. By a result of Holyer [1], the determination of the chromatic index is an NP −hard optimization problem. The NP-hardness give rise to the necessity of using heuristic algorithms. In particular, we are interested in upper bounds for the chromatic index that can be efficiently realized by a coloring algorithm.

A proper edge coloring of a graph G is a mapping $f: E(G) \longrightarrow Z_{\geq 0}$ such that $f(e) \neq f(e')$ for every pair of adjacent edges e and e' in G. A proper edge coloring f of a graph G is called vertex-distinguishing if for any different vertices $u, v \in V(G)$, $S(u, f) \neq S(v, f)$, where $S(v, f) = \{f(e) \mid e = uv \in E(G)\}$. The minimum number of colors required for a vertex-distinguishing proper edge coloring of a simple graph G is denoted by $\chi'_{vd}(G)$. The $VDP - coloring$ has been considered in many papers. It was introduced and studied by Burris and Schelp in [2] and, independently, as observability of a graph, by Cerny et al., Hornãk and Sotãk [3]. The $VDP - coloring$ is computed for some families of graphs such as complete graphs, complete bipartite graphs and cycles. A graph G is called *complete r-partite* ($r \geq 2$) if it's vertices can be partitioned into r non-empty independent sets $V_1, \dots, V_r$ such that each vertex in V_i is adjacent to all the other vertices in V_j for $1 \leq i < j \leq r$. A complete split graph is a graph consisting of a clique and an independent set of vertices in which each vertex of the clique is adjacent to each vertex of the independent set.

In this work we provide lower and upper bounds on $\chi'_{vd}(G)$ for some complete multipartite graphs and for complete split graphs.

Keywords and phrases: Edge coloring, Vertex-distinguishing coloring, Chromatic index, Complete Multipartite graph, Complete split graph.

ՈՐՈՇ ԼՐԻՎ ԲԱԶՄԱԿՈՂՄԱՆԻ ԳՐԱՖՆԵՐԻ ԳԱԳԱԹ-ՏԱՐԲԵՐԱԿՈՂ ԿՈՂԱՅԻՆ ՆԵՐԿՈՒՄՆԵՐ

ՊԵՏՐՈՍ ՊԵՏՐՈՍՅԱՆ
Երևանի պետական համալսարան,
ֆիզիկամաթեմատիկական գիտությունների թեկնածու
pet_petros@ysu.am

ՏԻԳՐԱՆ ՊԵՏՐՈՍՅԱՆ
Հայ-ռուսական (Սլավոնական) համալսարանի
մագիստրոս
tigran.petrosyan@student.rau.am

Համառոտագիր

Գրաֆների տեսության մեջ կողային ներկում է կոչվում կողերի ներկումը, այսինքն՝ գրաֆի յուրաքանչյուր կողին գույնի համապատասխանեցումը: Կողային ներկումը կարելի է ներկայացնել $f{:}\,E(G) \to N$ ֆունկցիայի միջոցով, որտեղ $E(G)$-ով նշանակվում է գրաֆի կողերի բազմությունը, N –ով բնական թվերի բազմությունը: Գրաֆների ներկման խնդիրները, որպես ալգորիթմիկ խնդիրներ, սկսել են դիտարկվել 1970-ականներից: Հիմնական նպատակն է նվազագույնի հասցնել օգտագործվող գույների քանակը: Գույների փոքրագույն քանակը, որոնց միջոցով կարելի է իրականցնել գրաֆի կողային ներկում, կոչվում է քրոմատիկ համար և նշանակվում $\chi'(G)$: Holyer [1]-ի կողմից ապացուցվել է, որ քրոմատիկ թվի որոշումը NP-բարդ օպտիմիզացիայի խնդիր է: Այդ պատճառով էվրիստիկ ալգորիթմների կարիք է առաջանում: Հեղինակի խնդիրն է՝ գտնել քրոմատիկ թվի վերին սահմաններ, որոնք կարելի է արդյունավետ ձևով ստանալ՝ օգտագործելով համապատասխան ներկման ալգորիթմներ:

G գրաֆի համար ճիշտ կողային ներկում է կոչվում $f{:}\,E(G) \longrightarrow Z_{\geq 0}$ արտապատկերումը, որտեղ $f(e) \neq f(e')$ կամայական կից $e, e' \in E(G)$ կողերի համար: Դիցուք, f-ը G գրաֆի ճիշտ ներկում է, և $v \in V(G)$: f ներկման դեպքում կամայական $v \in V(G)$ գագաթի համար $S(v, f)$-ով կնշանակենք v գագաթին կից կողերի գույների բազմությունը: f ճիշտ ներկումը կանվանենք գագաթ-տարբերակով, եթե գրաֆի կամայական երկու գագաթների համար $u, v \in V(G)$, $S(u, f) \neq S(v, f)$: Նվազագույն գույների քանակը, որոնց միջոցով կարելի է ստանալ գագաթ-տարբերակող կողային ներկում, կոչվում է քրոմատիկ թիվ և նշանակվում $\chi'_{vd}(G)$: G գրաֆը կանվանենք r –կողմանի գրաֆ, եթե նրա գագաթների բազմությունը կարելի է ներկայացնել $V_1, \ldots, V_r$

բազմությունների միավորման տեսքով, որտեղ V_i-ին պատկանող յուրաքանչյուր գագաթ միացված է V_j-ին պատկանող բոլոր գագաթներին $(1 \leq i < j \leq r)$: G գրաֆը կոչվում է տրոհվող լրիվ գրաֆ, եթե այդ գրաֆի գագաթների $V(G)$ բազմությունը կարելի է տրոհել մեկուսացված գագաթների և լրիվ գրաֆի գագաթների, որտեղ մեկուսացված գագաթներից յուրաքանչյուրը միացված է լրիվ գրաֆի բոլոր գագաթներին:

Տվյալ աշխատանքում ստացվել են որոշ ստորին և վերին սահմաններ՝ բազմակողմ և տրոհվող գրաֆների գագաթ-տարբերակող կողային ներկումների քրոմատիկ թվերի համար:

Բանալի բառեր և բառակապակցություններ. եզրերի ճիշտ գունավորում, vertex-discriminating գունավորում, գագաթը տարբերող քրոմատիկ ինդեքս, ամբողջական բազմակողմ գրաֆիկ, ամբողջական պառակտված գրաֆիկ:

ВЕРШИННО-РАЗЛИЧАЮЩИЕ РЁБЕРНЫЕ РАСКРАСКИ НЕКОТОРЫХ ПОЛНЫХ МНОГОДОЛЬНЫХ ГРАФОВ

ПЕТРОС ПЕТРОСЯН
Ереванский государтственный университет,
кандидат физ.-мат. наук
pet_petros@ysu.am

ТИГРАН ПЕТРОСЯН
Российско-Армянский Университет,
магистрант
tigran.petrosyan@student.rau.am

Аннотация

В теории графов рёберной раскраской называется раскраска рёбер графа, то есть при раскраске графа всем рёбрам соответствуют метки или так называемые цвета. Для графа G функция $f: E(G) \to N$ называется рёберной раскраской графа G, где $E(G)$-множество рёбер графа, а N-множество натуральных чисел. Рёберную раскраску графов стали рассматривать как алгоритмическую проблему начиная с 1970-ых годов. Главной задачей в теории раскрасок графов является нахождение минимального количества цветов, используемых в раскраске графа. Минимальное количество цветов, необходимое для раскраски графа при определённых условиях, называется хроматический индекс и обозначается через $\chi'(G)$. По результатам исследования Holyer-а, нахождение хроматического индекса графа является NP-сложной задачей оптимизации. Из-за NP-сложности данной задачи возникает необходимость нахождения эвристических алгоритмов. В частности, авторов интересует нахождение верхних оценок для хроматического индекса раскраски графов путём эффективной реализации раскраски.

Рёберная раскраска f графа G называется правильной, если для любых смежных рёбер $e, e' \in E(G)$, $f(e) \neq f(e')$. Если f – правильная раскраска графа G и $v \in V(G)$, то обозначим через $S(v,f)$ множество цветов рёбер, инцидентных вершин v. Правильная раскраска f графа G называется вершинно-различающей, если для любых различных вершин $u, v \in V(G)$, $S(u,f) \neq S(v,f)$. Наименьшее число цветов, необходимое для вершинно-различающей рёберной раскраски графа G называется вершинно-различающим хроматическим индексом и обозначается $\chi'_{vd}(G)$. Граф G, вершины которого можно представить в виде объединения r независимых, непустых множеств вершин $V_1, \ldots, V_r$, таких, что каждая вершина из V_i смежна со всеми вершинами из V_j для $1 \leq i < j \leq r$, называется полный r −дольный граф. Полным расщепляемым графом называется граф, в котором вершины можно разбить на клику и независимое множество вершин, каждая из которых соединена со всеми вершинами клика.

В данной работе найдены верхние оценки вершинно-различающего хроматического индекса для некоторых полных многодольных графов.

Ключевые слова и словосочетания: правильная рёберная раскраска, вершинно-различающая раскраска, вершинно-различающий хроматический индекс, полный многодольный граф, полный расщепляемый граф.

Introduction

All graphs considered in this paper are finite and simple, and we use West's book [6] for terminologies and notations not defined here. Problems in which we are interested are particular cases of the big variety of ways of labeling a graph. Let $G = (V, E)$ be a graph of order n with the vertex set $V = V(G)$ and the edge set $E = E(G)$. A k-edge coloring of a graph G is an assignment of k colors to the edges of G. Let $f(e)$ be the color of the edge e. Denote by $S(v, f) = \{f(e) \mid e = uv \in E(G)\}$ the multiset of colors assigned to the set of edges incident to v. The coloring f is proper if no two adjacent edges are assigned the same color and vertex-distinguishing proper coloring (abbreviated $VDP - coloring$), if it is proper and $S(u, f) \neq S(v, f)$ for any two distinct vertices u and v.

The minimum number of colors required to find a $VDP - coloring$ of a graph G without isolated edges and with at most one isolated vertex is called the $vertex - distinguishing\ proper\ edge\ coloring\ number$ (abbreviated $VDP - coloring\ number$) and denoted by $\chi_{vd}{}'(G)$.

The $VDP - coloring$ has been considered in many papers. It was introduced and studied by Burris and Schelp in [2] and, independently, as observability of a graph, by Cerny et al. [3], Hornãk and Sotãk [4,5]. In [2,4], the $VDP - coloring$ is also computed for some families of graphs, such as complete graphs K_n, bipartite complete graphs $K_{m,n}$, paths P_n, and cycles C_n. The following results has been proved by Burris and Schelp [2].

Theorem 1. *Let n be any natural number. Then*

$$\chi_{vd}{}'(K_n) = \{n\ \ if \quad n\ \ is\ \ odd;\ n+1\ \ if \quad n\ \ is\ \ even..$$

Theorem 2. *Let m and n be any natural numbers. Then*

$$\chi_{vd}{}'(K_{m,n}) = \{n+1\ \ if \quad n > m \geq 2;\ n+2\ \ if \quad n = m \geq 2..$$

The original motivation of study is generalizing results for $VDP - coloring$ of some special types of complete graphs.

Main results

A complete split graph $CS(n, m)$ is a graph on n vertices consisting of a clique with n vertices and an independent set of m vertices in which each vertex of the clique is adjacent to each vertex of the independent set.

Theorem 3. *For any complete split graph* $G = CS_{n,m}$ *we have*

$$\{\chi'_{vd}\left(CS_{n,m}\right) = m+n,\ \ if\, m+n\, is\, odd, m+n \leq \chi'_{vd}\left(CS_{n,m}\right) \leq m+n+1,\ \ if\, m+n\, is\, even.$$

Proof. Note that $CS(n, m)$ can be considered as complete multipartite graph $K_{m,1,1,\dots,1}$ with m 1-vertex partitions and with a m-vertex partition. Let $V(CS(n, m)) = V_C \cup V_S$ be the vertex set of split graph, where $V_C = \{v_0, v_1, \dots, v_{n-1}\}$ is the vertex set of clique and $V_S = \{v_n, v_{n+1}, \dots, v_{m+n-1}\}$ is the vertex set of independent set and let

$E\big(CS(n,m)\big) = \{v_i v_j \mid v_i, v_j \in V_C; 0 \le i < j < n\} \cup \{v_i v_j \mid v_i \in V_S, v_j \in V_C; 0 \le i < n, n \le j < m+n\}$ be the edge set of our graph.

For each edge $v_i v_j \in E(CS_{n,m})$, define a color $f(v_i v_j)$ as follows:

$$f(v_i v_j) = \{(i+j) \ mod \ (m+n) \ if \quad m+n \ is \ odd; \ (i+j) \ mod \ (m+n+1) \ if \quad m+n \ is \ even$$

By the definition of f,

1. $if \quad m+n$ is odd

$$S(v_i, f) = \{[1, m+n] \setminus \{2i \ mod \ (m+n)\} \ if \quad v_i \in V_C \ (0 \le i < n) \ \cup_{j \in [0,n-1]} \{(i+j) \ mod \ (m+n)\} \ if \quad v_i \in V_S \ (n \le i < n+m)$$

2. $if \quad m+n$ is even

$$S(v_i, f) = \{[1, m+n+1] \setminus \{2i \ mod \ (m+n+1)\} \ if \quad v_i \in V_C \ (0 \le i < n) \ \cup_{j \in [0,n-1]} \{(i+j) \ mod \ (m+n+1)\} \ if \quad v_i \in V_S \ (n \le i < n+m)$$

The visualtisation of coloring for split graph $CS_{4,3}$ using specified algorithm is presented in **Fig. 1**.

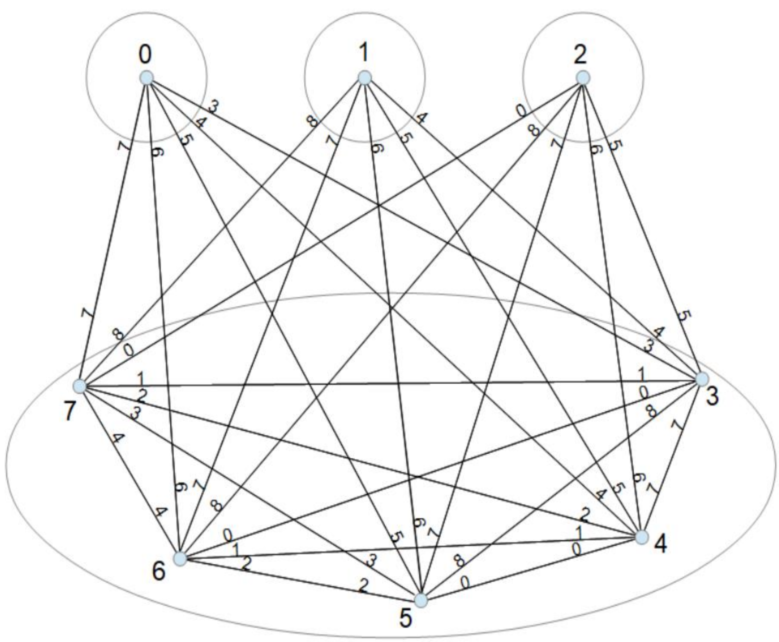

Fig. 1 VDP-coloring of split graph $CS_{4,3}$.

It is easy to see that edges incident to independent set vertices have different color sets. For edges incident to each clique vertex v_i we use all the colors despite for color $2i \ mod \ (m+n)$ in case $m+n$ is odd and $2i \ mod \ (m+n+1)$ in case $m+n$ is even. The exceptional color is different for each pair of clique vertices because It is taken by odd modulo in both cases. Thus, we constructed $VDP - coloring$, using less than $m+n+1$ colors. The minimum number of colors required for VDP-coloring for complete split graph $CS_{n,m}$ is $m+n$.

Theorem 4. *For any different natural numbers* $n_1, n_2, \dots n_k$.

1. $if \quad \sum_{i=1}^{k} \quad n_i$ is even

$$n_1 + n_2 + \ldots + n_{k-1} + 1 \leqslant \chi_{vd}{}'(K_{n_1,n_2,\ldots,n_k}) \leqslant n_1 + n_2 + \ldots + n_k;$$

2. $if \quad \sum_{i=1}^{k} \quad n_i$ is odd.

$$n_1 + n_2 + \ldots + n_{k-1} + 1 \leqslant \chi_{vd}{}'(K_{n_1,n_2,\ldots,n_k}) \leqslant n_1 + n_2 + \ldots + n_k + 1$$

Proof. Suppose that $n_1 < n_2 < \ldots < n_k$. Denote set of $n_k - partition$ vertices by $W_{n_k} = \{w_0, w_1, \ldots w_{n_k} - 1\}$, set of $n_{k-1} - partition$ vertices by $W_{n_{k-1}} = \{w_{n_k}, w_{n_k+1}, \ldots w_{n_k+n_{k-1}-1}\}$, ... vertices of $n_1 - partition$ with colors $W_{n_1} = \{w_{n_k+n_{k-1}+\ldots+n_2}, \ldots w_{n_k+n_{k-1}+\ldots+n_2+n_1-1}\}$. Let $V(G) = W_{n_k} \cup W_{n_{k-1}} \cup \ldots \cup W_{n_1}$ be the vertex set of graph G and $E(G) = \{uv \mid u \in W_{n_i}, v \in W_{n_j} \ (1 <= i < j <= k)\}$ be the set of graph edges. Denote $N = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$.

For each edge $w_i w_j \in E(K_{n_1,n_2,\ldots,n_k})$, define a color $f(w_i w_j)$ as follows.

$f(w_i w_j) = \ \{(i + j) \ mod \ N \ if \quad \sum_{i=1}^{k} \quad n_i \ is \ even; \ (i + j) \ mod \ (N + 1) \ if \quad \sum_{i=1}^{k} \quad n_i \ is \ odd$

By the definition of f we have.

$S(v_i, f) = \{\cup_{w \notin W_{n_i}} \{(v_i + w) \ mod \ N\} \ (v_i \in W_{n_i}) \ if \quad \sum_{i=1}^{k} \quad n_i \ is \ even; \cup_{w \notin W_{n_i}} \{(v_i + w) \ mod \ (N + 1)\} \ (v_i \in W_{n_i}) \ if \quad \sum_{i=1}^{k} \quad n_i \ is \ odd.$

Sets of edge colors incident to each partition are sets of sequential numbers taken by modulo N in case $\sum_{i=1}^{k} \quad n_i$ is even and by modulo $N + 1$ in case $\sum_{i=1}^{k} \quad n_i$ is odd. In both cases the sequential set of numbers is taken by modulo of odd number, which means that set of color for each vertex is different. Sets of edge colors for $n_1 - partition$ vertices must be different by the definition of $VDP - coloring$, so we need to use at least $n_2 + n_3 + \ldots + n_k + 1$ colors.

Preposition 1. *For any different natural numbers m and n we have*

$$max(m, n) + m + n + 1 \leqslant \chi_{vd}{}'(K_{m,m,n,n}) \leqslant max(m, n) + m + n + 3.$$

Proof. Consider the two pairs of $m - partition$ and $n - partition$ as complete bipartite graphs $K_{m,n}$. By Theorem 2. there is a VDP-coloring for $K_{m,n}$ with $max(m, n) + 1$ colors. Let's label our graphs using the same $max(m, n) + 1$ colors. Now let's consider the two constructed bipartite graphs $K_{m,n}$ as complete bipartite graph $K_{m+n,m+n}$. By Theorem 2, there is a $VDP - coloring$ for that graph, using $m + n + 2$ colors. As a result, we constructed a $VDP - coloring$ for our graph that is using $max(m, n) + m + n + 3$ colors.On the other hand, for the $VDP - coloring$ of our graph we need to use at least $max(m, n) + m + n + 1$ colors, as the sets of colors incident to different vertices must be different.

The visualisation of specified coloring is presented in **Fig. 2**.

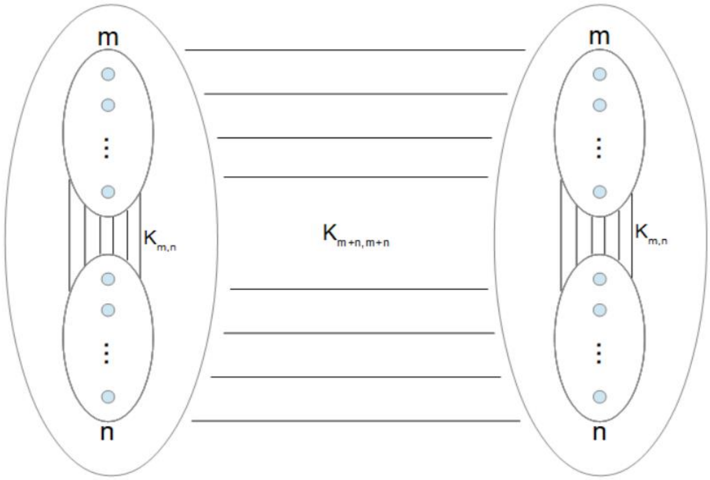

Fig 2. Visualisation of VDP-coloring for graph $K_{m,m,n,n}$

Preposition 2. *Let n and k be any natural numbers. Then for any complete 2^k-partite graph $K_{n,n,\dots,n}$, we have*

$$(2^k - 1)n + 2 \leq \chi_{vd}{}'(K_{n,n,\dots,n}) \leq (2^k - 1)n + 2k$$

Proof. Let's consider each pair of n-partitions as complete bipartite graphs $K_{n,n}$ and construct VDP-coloring for each of them by *Theorem 2.*, using the same $n+2$ colors. Then consider each pair of bipartite graphs $K_{n,n}$ as bipartite complete graphs $K_{2n,2n}$ and construct VDP-coloring for them by *Theorem 2.*, using the same $2n+2$ colors. We continue this process until we have complete bipartite graph $K_{n2^{k-1},n2^{k-1}}$ for which we have a $VDP - coloring$ that is using exactly $2^{k-1}n + 2$ colors. Thus, we constructed a $VDP - coloring$ of $K_{n,n,\dots,n}$ graph, using $(1 + 2 + \dots + 2^{k-1})n + k = (2^k - 1)n + 2k$ colors. We need to use at least $(2^k - 1)n + 2$ colors for $VDP - coloring$ of our graph.

References

1. *Holyer, I.*: The NP-completeness of edge-colouring. SIAM J. Comput. 10, 718-720 (1981)
2. *Burris, A.C., Schelp, R.H.:* Vertex-distinguishing proper edge-colorings. J. Graph Theory 26, 73-82 (1997)
3. *Cerny, J., Hornak, M., Sotak, R.:* Observability of a graph. Math. Slovaca 46, p. 21-31 (1996)
4. *Hornak, M., Sotak, R.:* Observability of complete multipartite graphs with equipotent parts. Ars Comb. 41, 289-301 (1995)
5. *Hornak, M., Sotak, R.:* Asymptotic behavior of the observability of Q_n, Discrete Math. 176, 139-148 (1997)
6. *West D.B.:* Introduction to Graph Theory, Prentice-Hall, New Jersey, 2001.