

## КОМПТОНОВСКОЕ РАССЕЯНИЕ В ПЛОСКИХ СРЕДАХ: ПОЛЯРИЗАЦИЯ ИЗЛУЧЕНИЯ И НЕЗАВИСИМОСТЬ ОТ АЗИМУТА. II. РЕЗУЛЬТАТЫ ВЫЧИСЛЕНИЙ

Д.И.НАГИРНЕР, С.И.ГРАЧЕВ

Поступила 29 октября 2021

Принята к печати 3 мая 2022

Во второй части работы выводятся окончательные формулы, позволяющие рассчитывать усредненные по азимуту функции перераспределения по частоте, направлению и поляризации при комптоновском рассеянии в плоской стационарной среде. Средние по азимуту от наиболее сингулярного слагаемого ФП выражены через эллиптические интегралы первого рода. Приводятся примеры усреднений.

**Ключевые слова:** *перенос излучения: параметры Стокса: комптоновское рассеяние: функции перераспределения по частоте*

**Введение.** Во второй части работы конкретизируются формулы, которые позволяют усреднять по азимуту функции перераспределения (ФП) по частоте, направлению интенсивности и параметра Стокса линейной поляризации при комптоновском рассеянии. Разделяются части ФП, для усреднения которых достаточно применить обычные квадратурные формулы, и сингулярные части, требующие осторожности. Интегралы от этих сингулярных частей выражены через эллиптические интегралы первого рода. Приводятся примеры усреднения ФП интенсивности, обсуждается зависимость результатов от косинуса угла падения фотона при рассеянии.

Нумерация разделов работы сквозная. Ссылки на формулы первой части [1] даются с прибавлением перед номером I.

### 5. Способы вычисления интегралов.

5.1. *Интеграл от сингулярного слагаемого.* В двух первых пунктах дается способ вычисления интеграла

$$\mathcal{L}(x, x_1, \eta, \eta_1) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{d\varphi}{Q} \int_{\gamma_*(x, x_1, \mu)}^{\infty} f_e(\gamma) d\gamma. \quad (1)$$

Несмотря на то, что  $Q$  от  $\gamma$  не зависит, при перестановке порядка интегрирования в повторном интеграле существенную роль играет зависимость нижнего предела внутреннего интеграла в (1) от азимута. В результате после

перестановки порядка внутренних интеграл по  $\varphi$  будет иметь конкретные пределы. Обозначим их временно  $\varphi_*$  и  $\varphi_0$ ,  $\varphi_* < \varphi_0$ , т.е. рассмотрим интеграл

$$\mathcal{R} = \frac{1}{\pi} \int_{\varphi_*}^{\varphi_0} \frac{d\varphi}{Q} = \frac{1}{\pi} \int_{\varphi_*}^{\varphi_0} \frac{d\varphi}{\sqrt{x^2 + x_1^2 - 2xx_1\eta\eta_1 - 2xx_1\sqrt{1-\eta^2}\sqrt{1-\eta_1^2}\cos\varphi}}. \quad (2)$$

Воспользуемся формулой 2.571.5 из справочника [2]

$$\begin{aligned} \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{\alpha - \beta \cos x}} &= \frac{2}{\sqrt{\alpha + \beta}} F\left(\arcsin \sqrt{\frac{(\alpha + \beta)(1 - \cos x)}{2(\alpha - \beta \cos x)}}, \sqrt{\frac{2\beta}{\alpha + \beta}}\right) = \\ &= \frac{2}{\sqrt{\alpha + \beta}} \left[ \mathbf{K}\left(\sqrt{\frac{2\beta}{\alpha + \beta}}\right) - F\left(\frac{\pi - x}{2}, \sqrt{\frac{2\beta}{\alpha + \beta}}\right) \right], \end{aligned} \quad (3)$$

где  $\alpha > \beta$  - произвольные положительные числа, а  $F(x, k)$  и  $\mathbf{K}(k) = F(\pi/2, k)$  - неполный и полный эллиптические интегралы первого рода.

Обозначим для краткости (напомним обозначения  $a = 1 - \eta\eta_1$  и  $b = \sqrt{1 - \eta^2}\sqrt{1 - \eta_1^2}$ )

$$k = 2 \frac{\sqrt{xx_1 b}}{A}, \quad A = \sqrt{x_*^2 + 2xx_1(a + b)}. \quad (4)$$

Тогда интеграл (2) выразится через эти величины и пределы в виде

$$\mathcal{R} = \frac{2}{\pi A} \left[ F\left(\frac{\pi - \varphi_*}{2}, k\right) - F\left(\frac{\pi - \varphi_0}{2}, k\right) \right]. \quad (5)$$

Для точного написания интегралов, воспользуемся выражениями для пределов, выведенными в разделе 4.

**5.2. Интегралы в четырех случаях.** Здесь формулы конкретизируются для четырех случаев.

Случай I.  $Z > a + b$ . Формула для этого случая согласно (I.51) приобретает вид

$$\frac{\pi A}{4} \mathcal{L}(x, x_1, \eta, \eta_1) = \int_{\gamma_*^-}^{\gamma_*^+} f_e(\gamma) d\gamma F\left(\frac{\pi - \varphi_0}{2}, k\right) + \mathbf{K}(k) \int_{\gamma_*^+}^{\infty} f_e(\gamma) d\gamma. \quad (6)$$

Внутренние интегралы выражаются через эллиптические:

$$\begin{aligned}
\int_{\varphi}^{\pi} \frac{d\varphi}{Q} &= \int_{\varphi}^{\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{x^2 + x_1^2 - 2xx_1(\eta\eta_1 + \sqrt{1-\eta^2}\sqrt{1-\eta_1^2}\cos\varphi)}} = \\
&= \int_0^{\pi-\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{x^2 + x_1^2 - 2xx_1(\eta\eta_1 - \sqrt{1-\eta^2}\sqrt{1-\eta_1^2}\cos\varphi)}} = \\
\int_0^{\pi-\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{x^2 + x_1^2 - 2xx_1(\eta\eta_1 - \sqrt{1-\eta^2}\sqrt{1-\eta_1^2}) - 4xx_1\sqrt{1-\eta^2}\sqrt{1-\eta_1^2}\sin^2\frac{\varphi}{2}}} &= \\
&= 2 \int_0^{(\pi-\varphi)/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{A^2 - k^2 A^2 \sin^2\varphi}}.
\end{aligned} \tag{7}$$

При переходе к последнему интегралу сделана замена  $\varphi \rightarrow 2\varphi$ .

Отметим, что на нижнем пределе первого внешнего интеграла  $\gamma = \gamma_*^-$  нижний предел внутреннего интеграла равен верхнему  $\varphi_- = \pi$ , так что эллиптический интеграл равен нулю и с нуля начинается внутренний интеграл. На верхнем пределе  $\gamma = \gamma_*^+$  соответственно  $\varphi_- = 0$  и внутренний интеграл обращается в полный эллиптический, а при больших  $\gamma$  он уже не меняется.

Случай II.  $|\eta - \eta_1| < Z < a + b$ . В этом случае см. (I.52)

$$\begin{aligned}
\frac{\pi A}{4} \mathcal{L}(x, x_1, \eta, \eta_1) &= \int_{\gamma_{min}}^{\gamma_*^-} f_e(\gamma) d\gamma \left[ F\left(\frac{\pi - \varphi_-}{2}, k\right) - F\left(\frac{\pi - \varphi_+}{2}, k\right) \right] + \\
&+ \int_{\gamma_*^-}^{\gamma_*^+} f_e(\gamma) d\gamma F\left(\frac{\pi - \varphi_-}{2}, k\right) + \mathbf{K}(k) \int_{\gamma_*^-}^{\infty} f_e(\gamma) d\gamma.
\end{aligned} \tag{8}$$

Внутренний интеграл в среднем повторном преобразуется точно так же, как и в предыдущем пункте. Преобразование же первого внутреннего интеграла отличается. Рассмотрим его отдельно. Замену  $\varphi \rightarrow \pi - \varphi$  сделаем сразу:

$$\begin{aligned}
\int_{\varphi_-}^{\varphi_+} \frac{d\varphi}{Q} &= \int_{\pi-\varphi_+}^{\pi-\varphi_-} \frac{d\varphi}{\sqrt{x^2 + x_1^2 - 2xx_1(\eta\eta_1 - \sqrt{1-\eta^2}\sqrt{1-\eta_1^2}\cos\varphi)}} = \\
&= 2 \int_{(\pi-\varphi_+)/2}^{(\pi-\varphi_-)/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{A^2 - k^2 A^2 \sin^2\varphi}}.
\end{aligned} \tag{9}$$

На нижнем пределе первого интеграла  $\gamma = \gamma_{min}$  значения углов совпадают  $\varphi_- = \varphi_+$ , так что и здесь внутренний интеграл начинается с нуля. На верхнем пределе  $\gamma = \gamma_*^-$  угол  $\varphi_+ = \pi$  и вычитаемый эллиптический интеграл обращается в нуль. Во втором повторном интеграле на нижнем пределе  $\gamma = \gamma_*^-$  угол  $\varphi_-$ ,

естественно, тот же, что и на верхнем пределе первого, а на верхнем пределе угол  $\varphi_-$  обращается в нуль, а неполный интеграл в полный, который при больших  $\gamma$  не меняется.

Случай III.  $a-b=1-\eta\eta_1-\sqrt{1-\eta^2}\sqrt{1-\eta_1^2}<Z=\frac{|x-x_1|}{xx_1}<|\eta-\eta_1|=\sqrt{a^2-b^2}$ .

$$\begin{aligned} \frac{\pi A}{4} \mathcal{L}(x, x_1, \eta, \eta_1) = & \int_{\gamma_{min}}^{\gamma_+^+} f_e(\gamma) d\gamma \left[ F\left(\frac{\pi-\varphi_-}{2}, k\right) - F\left(\frac{\pi-\varphi_+}{2}, k\right) \right] + \\ & + \int_{\gamma_-^+}^{\gamma_-^-} f_e(\gamma) d\gamma \left[ \mathbf{K}(k) - F\left(\frac{\pi-\varphi_+}{2}, k\right) \right] + \mathbf{K}(k) \int_{\gamma_+^+}^{\infty} f_e(\gamma) d\gamma. \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь, напротив, первый внутренний интеграл преобразуется, как в случае II, а второй немного иначе. Замены  $\varphi \rightarrow \pi - \varphi$  и  $\varphi \rightarrow \varphi/2$  можно сделать сразу:

$$\int_0^{\varphi_+} \frac{d\varphi}{Q} = 2 \int_{(\pi-\varphi_+)/2}^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{A^2 - k^2 A^2 \sin^2 \varphi}} = \frac{2}{A} \left[ \mathbf{K}(k) - F\left(\frac{\pi-\varphi_+}{2}, k\right) \right]. \quad (11)$$

Пояснения для этого случая почти те же, что и для предыдущего, но воспроизведем и их. В первом интеграле на нижнем пределе  $\varphi_- = \varphi_+$ , на верхнем  $\varphi_- = 0$  и уменьшаемое слагаемое становится полным эллиптическим интегралом. На верхнем пределе второго интеграла  $\varphi_+$  обращается в нуль и вычитаемое исчезает.

Случай IV.  $Z = \frac{|x-x_1|}{xx_1} < 1 - \eta\eta_1 - \sqrt{1-\eta^2}\sqrt{1-\eta_1^2} = a-b$ . Здесь

$$\frac{\pi A}{4} \mathcal{L}(x, x_1, \eta, \eta_1) = \int_{\gamma_-^+}^{\gamma_+^+} f_e(\gamma) d\gamma \left[ \mathbf{K}(k) - F\left(\frac{\pi-\varphi_+}{2}, k\right) \right] + \mathbf{K}(k) \int_{\gamma_+^+}^{\infty} f_e(\gamma) d\gamma. \quad (12)$$

Здесь на нижнем пределе внешнего первого интеграла  $\varphi_+ = 0$ , а на верхнем  $\varphi_+ = \pi$ , так что подынтегральная функция начинается с нуля, как и во всех случаях, а потом вычитаемое слагаемое пропадает.

**5.3. Интегралы от произведений ФП с функциями углов поворота.** Как видно из выражения для матрицы рассеяния (I.34) с учетом линейной поляризации, непосредственно усредняется только ФП интенсивности, остальные ФП входят в матрицу с угловыми множителями. Интегралы вычисляются одновременно от этих произведений. Не вызывают опасений произведения регуляризованных частей ФП и угловых множителей. Не имеет сингулярного слагаемого ФП  $R_j$ , располагающаяся в побочной диагонали матрицы. Однако в элемент, стоящий в правом нижнем углу, сингулярное слагаемое входит, причем одинаково в оба слагаемых. Поэтому усреднять надо будет произведение  $(1/Q)\cos 2(\chi_1 - \chi)$ . Сингулярность слагаемого  $1/Q$  наступает, когда  $\mu \rightarrow 1$ , т.е. при рассеянии вперед, но тогда углы  $\chi$  и

$\chi_1$  равны, так что косинус обращается в единицу. Можно вычесть эту единицу, тогда множитель при  $1/Q$  в сингулярной точке будет равен нулю и при компенсационном добавлении единицы усреднение этого слагаемого уже будет выполнено.

Таким образом, матрицу, подлежащую усреднению по азимуту, можно представить в виде следующей суммы:

$$\begin{aligned} & \frac{2}{Q} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + R_a \begin{pmatrix} 1 & \cos 2\chi \\ \cos 2\chi_1 & \cos 2\chi \cos 2\chi_1 \end{pmatrix} + R_c \begin{pmatrix} 0 & \cos 2\chi \\ \cos 2\chi_1 & 2\cos 2(\chi_1 - \chi) \end{pmatrix} + \\ & + \begin{pmatrix} \tilde{R}_b & 0 \\ 0 & (\tilde{R}_U - 2R_c) \cos 2(\chi_1 - \chi) \end{pmatrix} - \frac{2}{Q} [1 - \cos 2(\chi_1 - \chi)] \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (13)$$

Фактически необходимо усреднить пять величин, затем ко второй и пятой прибавить первую:

$$\begin{aligned} & \frac{2}{Q}, \quad R_a + \tilde{R}_b, \quad (R_a + R_c) \cos 2\chi, \quad (R_a + R_c) \cos 2\chi_1, \\ & \frac{4}{Q} \sin^2(\chi_1 - \chi) + R_a \cos 2\chi \cos 2\chi_1 + (\tilde{R}_U + 2R_c) \cos 2(\chi_1 - \chi). \end{aligned} \quad (14)$$

#### 6. Примеры вычислений усредненных ФП в зависимости от энергии.

Сначала приведем результаты расчетов усреднения по азимуту при закрепленных частотах и косинусах углов в зависимости от энергии электронов  $\gamma$ .

На рис.1-3 представлены графики усредненных сингулярной  $2/Q$  и несингулярной  $\tilde{R}$  частей ФП интенсивности. Значения косинусов полярных углов рассеянного и падающего фотонов приняты  $\eta = 0.6$  и  $\eta_1 = 0.4$ . При таких значениях  $a = 0.76$ ,  $b = 0.8\sqrt{0.84} = 0.73321$ ,  $|\eta - \eta_1| = 0.2$ . В качестве частоты рассеянного фотона принято значение  $x = 5.0$ , а для частоты падающего - три тройки значений  $x_1$ . Среднее значение в каждой тройке соответствует

одной из трех границ между случаями: I и II  $x_1 = \frac{x}{1+x(a+b)} = 0.59059$ , II и

III  $x_1 = \frac{x}{1+|\eta - \eta_1|x} = 2.5$ , III и IV  $x_1 = \frac{x}{1+(a-b)x} = 4.4094$ . Два других немного отстоят от них с обеих сторон границы. Напомним, что полная усредненная ФП равна сумме усредненных сингулярной и несингулярной частей, но сингулярная часть должна еще добавляться к другому усредненному элементу главной диагонали матрицы рассеяния.

На рис.1 и 3а даются полные графики до определенных энергий, а на остальных трех - части в увеличенном масштабе.

Отметим характерные черты усреднения, проявившиеся на рисунках. Начиная с предельного значения  $\gamma = \gamma_{\text{lim}}$  ( $\gamma_{\text{lim}} = \gamma_*^-$  в случаях I и II,  $\gamma_{\text{lim}} = \gamma_*^+$  в случаях III и IV), усредненное сингулярное слагаемое перестает зависеть от

$\gamma$ , что отражает тот факт, что  $Q$  не зависит от энергии электронов, но при  $\gamma < \gamma_{\text{lim}}$  перемена порядка интегралов приводит к зависимости их пределов от  $\gamma$ . На этой же энергии происходит нарушение гладкости кривых, очень заметное у сингулярного слагаемого, но слабо выраженное у несингулярного в случаях I и II. После этой энергии усредненное несингулярное слагаемое после небольшого роста убывает.

Аналогичное нарушение гладкости происходит на  $\gamma$  с противоположными индексами  $+$  и  $-$  в случаях II и III (в случае III у несингулярного слагаемого оно также почти незаметно), но его нет в случаях I и IV, так как в этих случаях нет минимума функции  $\gamma_*$  и поэтому нет перехода от наличия двух пределов интеграла по азимуту к одному.

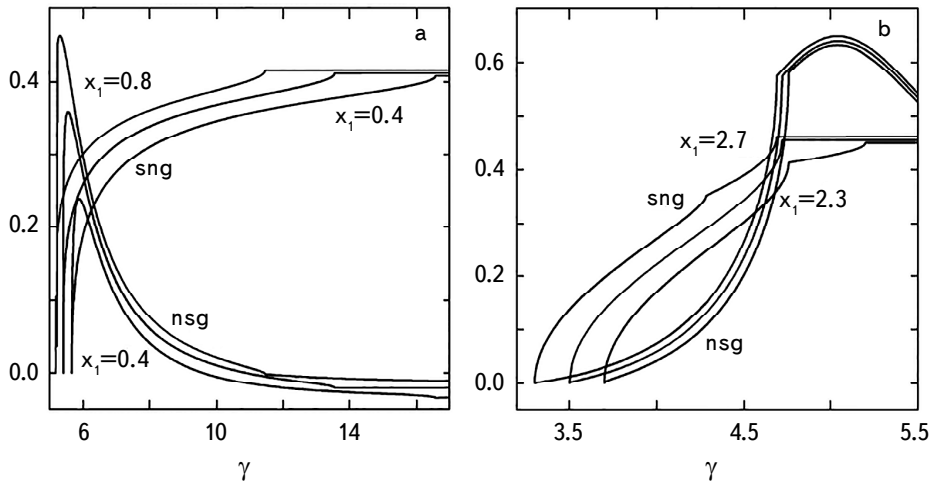


Рис.1. Усредненные по азимуту сингулярная  $2/Q$  (sng) и несингулярная  $\tilde{R}$  (nsg) части ФП при  $x_1 = 0.4, 0.59059, 0.8$  (a) и  $x_1 = 2.3, 2.5, 2.7$  (b) (указаны только крайние значения).

Расчетами проверено точное выполнение соотношения

$$R(x_1, x, \mu, \gamma) = R(x, x_1, \mu, \gamma + x - x_1), \quad (15)$$

которое остается верным и после усреднения по азимуту. Очевидно также, что справедливо соотношение, выражающее симметрию ФП по отношению к косинусам углов, так как при перемене их порядка косинус угла рассеяния не изменяется.

Ясно, что при усреднении по распределениям энергии электронов мелкие нарушения гладкости будут нивелированы, так что усредненные ФП будут гладкими. Из рисунков также видно, что при меньших частотах  $x_1$  ФП оказывается более компактной или даже более резкой, а с увеличением частоты становится более широкой. Это связано, как известно, с различием

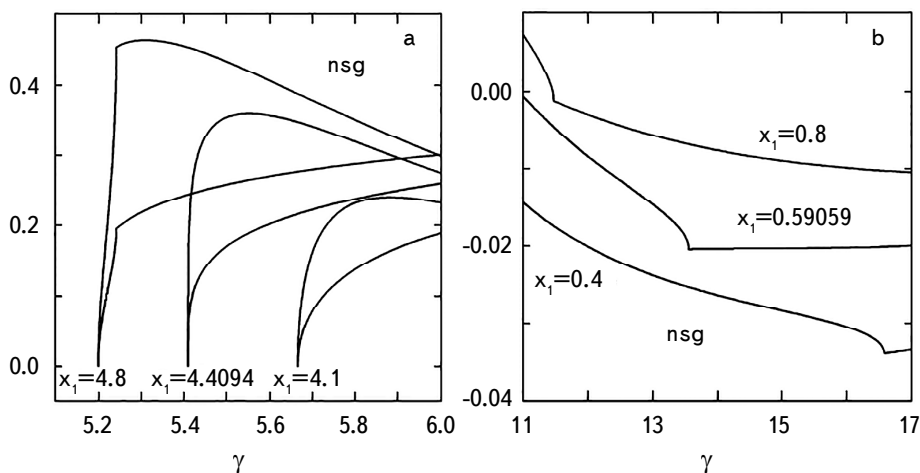


Рис.2. Увеличенные области нарушения гладкости кривых рис.1а. Здесь а: область  $\gamma_+^+$ , б: область  $\gamma_-^+$ .

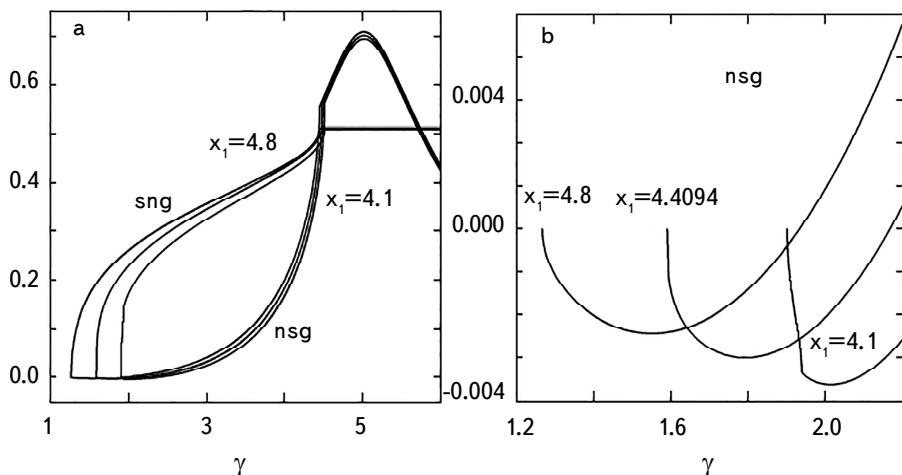


Рис.3. а: То же, что и на рис.1 при  $x_1 = 4.1, 4.4094$  и  $4.8$ . б: Увеличенная область нарушения гладкости.

величины передаваемой энергии от электронов к фотонам при больших и малых частотах и энергиях электронов.

В других примерах расчетов закрепим частоты, один из косинусов, именно  $\eta_1$ , и энергию  $\gamma$ , и рассчитаем зависимость усредненных ФП от другого косинуса.

## 7. Зависимость усредненных ФП от косинуса.

### 7.1. Случаи при закрепленных $x$ , $x_1$ и $\eta_1$ . После закрепления этих

трех параметров, интегралы находим в зависимости от  $\eta$  при различных энергиях электронов. Разграничим случаи для этой ситуации.

Рис.4 демонстрирует зависимости границ случаев (более толстые кривые), а также величин  $a$  и  $b$  от  $\eta$  при закреплённом значении  $\eta_1$ . Границы  $a+b$  и  $a-b$  вместе образуют эллипс с четырьмя точками касания со сторонами квадрата  $[-1, 1] \times [0, 2]$ : (слева направо)  $(-1, 1+\eta_1)$ ,  $(-\eta_1, 2)$ ,  $(\eta_1, 0)$  и  $(1, 1-\eta_1)$ . Оси эллипса совпадают с диагоналями квадрата, его полуоси равны  $\sqrt{1 \pm |\eta_1|}$ , площадь  $\pi\sqrt{1-\eta_1^2}$ . При  $\eta_1 = 0$  получилась бы окружность, а при  $\eta_1 = \pm 1$  - отрезок, соединяющий вершины квадрата. Зависимость  $a$ , естественно, получается прямолинейной,  $b$  - верхней полуокружностью, а  $\sqrt{a^2-b^2}$  - в виде ломаной прямой с поворотом на прямой угол в точке  $(\eta_1, 0)$ . Границы разделяют области, при попадании в которые осуществляются соответствующие случаи, их номера указаны римскими цифрами. Если  $Z > 2$ , это только случай I. Если  $\eta_1 > 0$ , то при  $1+\eta_1 < Z < 2$  с изменением  $\eta$  от  $-1$  до  $1$  происходит переход от случая I к случаю II и обратно. При  $1-\eta_1 < Z < 1+\eta_1$  случаи сменяются в последовательности IV-III-II-I, а при  $0 < Z < 1-\eta_1$  - в последовательности IV-III-II-III-IV. При точном попадании  $Z = 1+\eta_1$  и  $Z = 1-\eta_1$  остаются укороченные последовательности, соответственно, II-I и IV-III-II. Если же  $\eta_1 < 0$ , то вся картинка отражается на оси ординат, средние границы меняются местами и поэтому получаются последовательности в обратном порядке случаев: при  $Z > 2$  по-прежнему единственно случай I, при  $1-\eta_1 < Z < 2$  I-II-I, при  $1+\eta_1 < Z < 1-\eta_1$  I-II-III-IV, наконец, при  $0 < Z < 1+\eta_1$ , как и при  $\eta_1 > 0$ , IV-III-II-III-IV. И здесь при  $Z = 1-\eta_1$  и  $Z = 1+\eta_1$  выпадает случай I, но с противоположных концов начала последовательностей. Если минус, то I-II вместо I-II-I, если плюс, то II-III-IV вместо I-II-III-IV.

**7.2. Интегралы по азимуту в зависимости от  $\eta$ .** При закреплённых значениях  $x$ ,  $x_1$ ,  $\eta_1$  находим зависимость интегралов, представляющих усредненные ФП, от косинуса  $\eta$ . Приведем подробные формулы для интегралов в различных случаях в соответствии со сказанным в связи с рис.4:

а) Если  $Z > 2$ , то вариант I при всех  $-1 \leq \eta \leq 1$ :

$$\int_0^\pi d\varphi \int_{\gamma_*(x, x_1, \mu)}^\infty R f_e(\gamma) d\gamma = \int_{\gamma_*^-}^{\gamma_*^+} f_e(\gamma) d\gamma \int_{\varphi_-}^\pi R d\varphi + \int_{\gamma_*^+}^\infty f_e(\gamma) d\gamma \int_0^\pi R d\varphi. \quad (16)$$

Напомним

$$\gamma_*^\pm = \gamma_*(x, x_1, \eta\eta_1 \pm b), \quad \varphi_- = \varphi_-(x, x_1, \gamma, \eta, \eta_1) = \arccos\left(\frac{a - xx_1 Z^2/D_0}{b}\right). \quad (17)$$



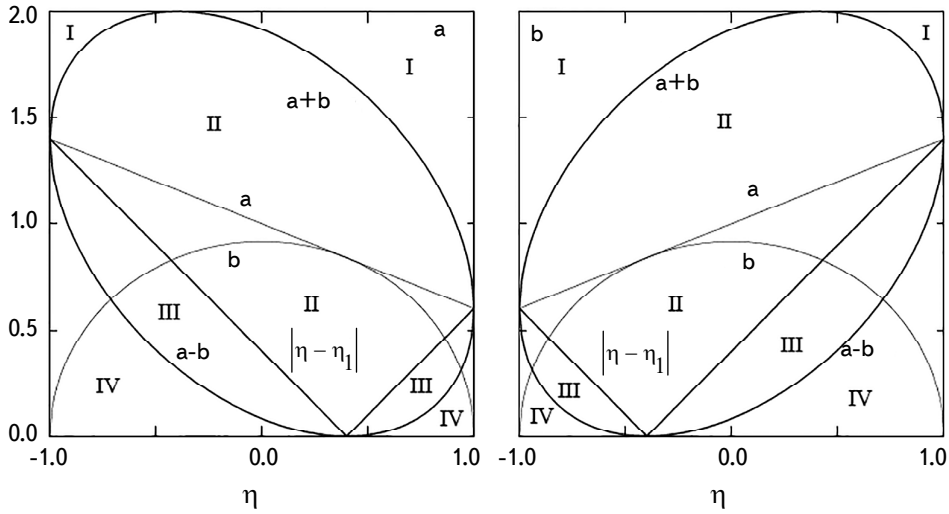


Рис.4. Кривые  $a + b$ ,  $a$ ,  $b$ ,  $\sqrt{a^2 - b^2} = |\eta - \eta_1|$  и  $a - b$  при а)  $\eta_1 = 0.4$  и б)  $\eta_1 = -0.4$  в зависимости от  $\eta$ .

б) Если  $1 + |\eta_1| < Z < 2$ , то I при  $-1 \leq \eta \leq \eta_*^-$  и  $\eta_*^+ \leq \eta \leq 1$ :

$$\int_0^\pi d\varphi \int_{\gamma_*(x, x_1, \mu)}^\infty Rf_e(\gamma) d\gamma = \int_{\gamma_*^-}^{\gamma_*^+} f_e(\gamma) d\gamma \int_{\varphi_-}^\pi R d\varphi + \int_{\gamma_*^+}^\infty f_e(\gamma) d\gamma \int_0^\pi R d\varphi, \quad (18)$$

и II при  $\eta_*^- < \eta < \eta_*^+$ :

$$\int_0^\pi d\varphi \int_{\gamma_*(x, x_1, \mu)}^\infty Rf_e(\gamma) d\gamma = \int_{\gamma_{min}}^{\gamma_*^-} f_e(\gamma) d\gamma \int_{\varphi_-}^{\varphi_+} R d\varphi + \int_{\gamma_*^-}^{\gamma_*^+} f_e(\gamma) d\gamma \int_{\varphi_-}^\pi R d\varphi + \int_{\gamma_*^+}^\infty f_e(\gamma) d\gamma \int_0^\pi R d\varphi. \quad (19)$$

Здесь  $\gamma_{min}$  задается формулой (см. I.40)

$$\gamma_{min} = \gamma_*(x_*, q_{min}) = \frac{2 + x_* + |x_*|}{2} = 1 + (x - x_1 + |x - x_1|)/2 = \max(1, 1 + x - x_1), \quad (20)$$

$$\eta_*^\pm = \eta_1(1 - Z) \pm \sqrt{1 - \eta_1^2} \sqrt{Z(2 - Z)}, \quad \varphi_+ = \varphi_+(x, x_1, \gamma, \eta, \eta_1) = \arccos\left(\frac{a - D_0/xx_1}{b}\right). \quad (21)$$

В предельных точках один из вариантов пропадает.

с) Если  $1 - |\eta_1| < Z < 1 + |\eta_1|$  и  $\eta_1 > 0$ , то IV при  $-1 \leq \eta \leq \eta_*^-$ :

$$\int_0^\pi d\varphi \int_{\gamma_*(x, x_1, \mu)}^\infty Rf_e(\gamma) d\gamma = \int_{\gamma_*^+}^{\gamma_*^-} f_e(\gamma) d\gamma \int_0^{\varphi_+} R d\varphi + \int_{\gamma_*^-}^\infty f_e(\gamma) d\gamma \int_0^\pi R d\varphi. \quad (22)$$

При  $\eta_*^- \leq \eta_1 - Z$  - III:

$$\int_0^\pi d\varphi \int_{\gamma_*(x, x_1, \mu)}^\infty Rf_e(\gamma) d\gamma = \int_{\gamma_{min}}^{\gamma_*^+} f_e(\gamma) d\gamma \int_{\varphi_-}^{\varphi_+} R d\varphi + \int_{\gamma_*^+}^{\gamma_*^-} f_e(\gamma) d\gamma \int_0^{\varphi_+} R d\varphi + \int_{\gamma_*^-}^\infty f_e(\gamma) d\gamma \int_0^\pi R d\varphi. \quad (23)$$

При  $\eta_1 - \mathcal{Z} \leq \eta \leq \eta_*^+$  - II:

$$\int_0^\pi d\varphi \int_{\gamma_*(x, x_1, \mu)}^\infty Rf_e(\gamma) d\gamma = \int_{\gamma_{min}}^{\gamma_*^-} f_e(\gamma) d\gamma \int_{\varphi_-}^{\varphi_+} R d\varphi + \int_{\gamma_*^-}^{\gamma_*^+} f_e(\gamma) d\gamma \int_{\varphi_-}^\pi R d\varphi + \int_{\gamma_*^+}^\infty f_e(\gamma) d\gamma \int_0^\pi R d\varphi. \quad (24)$$

При  $\eta_*^+ \leq \eta \leq 1$  - I:

$$\int_0^\pi d\varphi \int_{\gamma_*(x, x_1, \mu)}^\infty Rf_e(\gamma) d\gamma = \int_{\gamma_*^-}^{\gamma_*^+} f_e(\gamma) d\gamma \int_{\varphi_-}^\pi R d\varphi + \int_{\gamma_*^+}^\infty f_e(\gamma) d\gamma \int_0^\pi R d\varphi. \quad (25)$$

Напротив, если при таких же  $\mathcal{Z}$  косинус  $\eta_1 < 0$ , то I при  $-1 \leq \eta \leq \eta_*^-$ :

$$\int_0^\pi d\varphi \int_{\gamma_*(x, x_1, \mu)}^\infty Rf_e(\gamma) d\gamma = \int_{\gamma_*^-}^{\gamma_*^+} f_e(\gamma) d\gamma \int_{\varphi_-}^\pi R d\varphi + \int_{\gamma_*^+}^\infty f_e(\gamma) d\gamma \int_0^\pi R d\varphi. \quad (26)$$

При  $\eta_*^- \leq \eta \leq \eta_1 + \mathcal{Z}$  - II:

$$\int_0^\pi d\varphi \int_{\gamma_*(x, x_1, \mu)}^\infty Rf_e(\gamma) d\gamma = \int_{\gamma_{min}}^{\gamma_*^-} f_e(\gamma) d\gamma \int_{\varphi_-}^{\varphi_+} R d\varphi + \int_{\gamma_*^-}^{\gamma_*^+} f_e(\gamma) d\gamma \int_{\varphi_-}^\pi R d\varphi + \int_{\gamma_*^+}^\infty f_e(\gamma) d\gamma \int_0^\pi R d\varphi. \quad (27)$$

При  $\eta_1 + \mathcal{Z} \leq \eta \leq \eta_*^+$  - III:

$$\int_0^\pi d\varphi \int_{\gamma_*(x, x_1, \mu)}^\infty Rf_e(\gamma) d\gamma = \int_{\gamma_{min}}^{\gamma_*^+} f_e(\gamma) d\gamma \int_{\varphi_-}^{\varphi_+} R d\varphi + \int_{\gamma_*^+}^{\gamma_*^-} f_e(\gamma) d\gamma \int_{\varphi_-}^\pi R d\varphi + \int_{\gamma_*^-}^\infty f_e(\gamma) d\gamma \int_0^\pi R d\varphi. \quad (28)$$

При  $\eta_*^+ \leq \eta \leq 1$  - IV:

$$\int_0^\pi d\varphi \int_{\gamma_*(x, x_1, \mu)}^\infty Rf_e(\gamma) d\gamma = \int_{\gamma_*^+}^{\gamma_*^-} f_e(\gamma) d\gamma \int_0^{\varphi_+} R d\varphi + \int_{\gamma_*^-}^\infty f_e(\gamma) d\gamma \int_0^\pi R d\varphi. \quad (29)$$

д) Если  $0 < \mathcal{Z} \leq 1 - |\eta_1|$ , то при  $-1 \leq \eta \leq \eta_*^-$  вариант IV, при  $\eta_*^- \leq \eta \leq \eta_1 - \mathcal{Z}$  - III, при  $\eta_1 - \mathcal{Z} \leq \eta \leq \eta_1 + \mathcal{Z}$  - II, при  $\eta_1 + \mathcal{Z} \leq \eta \leq \eta_*^+$  - снова III, и наконец, при  $\eta_*^+ \leq \eta \leq 1$  - опять IV. При крайнем значении  $\mathcal{Z} = 0$ , т.е. при равенстве частот  $x_1 = x$ , остается один вариант IV, причем при всех  $-1 \leq \eta \leq 1$

$$\gamma_*(x, x, \mu) = \frac{1}{2} \sqrt{2q} \sqrt{1 + \frac{2}{q}} = \sqrt{1 + \frac{q}{2}} = \sqrt{1 + \frac{1-\mu}{2} x^2} = \sqrt{1 + \frac{a-b \cos \varphi}{2} x^2}, \quad (30)$$

$$\gamma_*^\pm = \sqrt{1 + \frac{a \mp b}{2} x^2}.$$

7.3. *Характерные значения косинуса  $\eta$ .* Кривые, изображенные на рис.4, отражают переход от одного случая к другому. При этом возникает несколько характерных точек косинуса  $\eta$ , некоторые из них очевидны, другие объясняются поведением кривых зависимости предела  $\gamma_*$  от азимута  $\varphi$ .

Уже принятие одних только частот  $x > x_1$  (этого достаточно в силу равенства (15)) определяет характерные величины  $x_* = x - x_1$ ,  $\mathcal{Z} = x_*/xx_1$ , а также значения

$\gamma_{min} = \gamma_*(x, x_1, x_*/xx_1) = 1 + x_*$ ,  $\gamma_{dv} = \gamma_*(x, x_1, -1) = \frac{1}{2} \left[ x_* + \sqrt{4 + x_*^2 + 2xx_1 + \frac{x_*^2}{xx_1}} \right]$  и значение  $\gamma_*(x, x_1, 1) = \infty$ .

Добавление значения  $\eta_l$  определяет точки пересечения уровня  $\mathcal{Z}$  с кривыми рис.4 и тем самым последовательность перехода от одного случая к другому с изменением косинуса  $\eta$ . Эти значения уже использованы в предыдущем пункте:  $\gamma_*^\pm$  и  $\eta_l^\pm = 1 \pm \mathcal{Z}$ .

Наконец, закрепление значения энергии  $\gamma$  показывает, где это значение совпадает со значениями кривых зависимости  $\gamma_*$  от азимута. При  $\gamma_{min} < \gamma < \gamma_{dv}$  имеют смысл два значения  $\mu_\pm$ . Каждое из них порождает два соответствующих значения косинуса:  $\eta_\pm^\pm$ . Нижние знаки показывают исходное значение  $\mu$ , а верхние - знак в формуле:

$$\eta_\pm^\pm = \eta_l \mu_\pm \pm \sqrt{1 - \eta_l^2} \sqrt{1 - \mu_\pm^2}, \quad \eta_\pm^\pm = \eta_l \mu_\pm \pm \sqrt{1 - \eta_l^2} \sqrt{1 - \mu_\pm^2}. \quad (31)$$

При  $\gamma > \gamma_{dv}$  появляется только одно значение  $\mu_+$ , так что и косинусов образуется одна пара  $\eta_+^\pm$ .

Рис.5 построен для  $x = 5$ ,  $x_1 = 4$ . Этих двух значений достаточно для рис.5а. На нем даны кривые зависимости  $q_\pm$  и  $\mu_\pm$  от энергии  $\gamma$  в пределах от  $\gamma_{min} = 2$  до  $\gamma_{dv} = \gamma_*(x, x_1, -1) = 5.1111$ . При последнем значении косинус  $\mu_-$  обращается в -1, а  $q_+ = 2xx_1 = 40$ . Соответственно  $q_- = x_*^2/q_+ = 1/40 = 0.0125$ ,  $\mu_+ = 1 - 1/(2x^2x_1^2) = 1 - 1/800 = 0.99875$ . С ростом энергии асимптотически  $q_+ \sim 2z^2$ ,  $q_- \sim x_*^2/2z^2$ ,  $\mu_+ \sim 1 - x_*^2/2xx_1z^2$ .

При параметрах рис.5а  $\eta_*^- = 0.093818$ ,  $\eta_l^- = 0.35$ ,  $\eta_l^+ = 0.45$ ,  $\eta_*^+ = 0.66618$ .

Рис.5б демонстрирует зависимость от энергии (в тех же ее пределах)

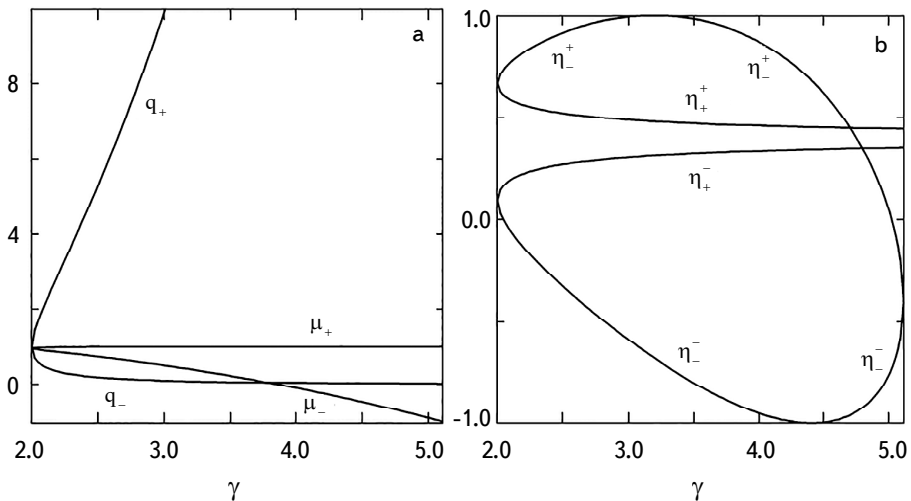


Рис.5. Зависимость от  $\gamma$  величин  $q_\pm$ ,  $\mu_\pm$  (а) и  $\eta_\pm^\pm$  (б) при  $x = 5$ ,  $x_1 = 4$  и  $\eta_l = 0.4$ .

косинусов  $\eta_{\pm}^{\pm}$  при тех же частотах и  $\eta_1 = 0.4$ . Поскольку при  $\gamma = \gamma_{min}$  косинусы  $\mu^{\pm}$  равны, то, как видно из рисунка, равны как  $\eta_+^+ = \eta_-^+ = \eta_1[1 - 1/xx_1] + \sqrt{1 - \eta_1^2} \sqrt{2/xx_1 - 1/x^2 x_1^2}$ , так и  $\eta_+^- = \eta_-^- = \eta_1[1 - 1/xx_1] - \sqrt{1 - \eta_1^2} \sqrt{2/xx_1 - 1/x^2 x_1^2}$ . На  $\gamma = \gamma_{dv}$ , где  $\mu_-$  обращается в  $-1$ , косинусы  $\eta_{\pm}^{\pm}$  сливаются на значении  $-\eta_1$ . При больших  $\gamma$  эти косинусы принимают крайние значения:  $\eta_+^+ = 1$ ,  $\eta_-^- = -1$ , что не показано на рисунке. Эти косинусы достигают крайних значений также при  $\gamma_1^{\pm} = \gamma_*(x, x_1, \pm \eta_1)$ , именно:  $\eta_+^+ = 1$  при  $\gamma = \gamma_1^+$  и  $\eta_-^- = -1$  при  $\gamma = \gamma_1^-$ . Объяснение заключается в том, что при росте  $q_+$  от 1 при  $\gamma = \gamma_{min}$  к бесконечности при  $\gamma \rightarrow \infty$  эта величина непременно пройдет и через значения  $xx_1(1 \pm \eta_1)$ , что произойдет как раз при  $\gamma = \gamma_1^{\pm} = \gamma_*(x, x_1, \pm \eta_1)$ , тогда и  $\mu_{\pm} = \pm \eta_1$ , и  $\eta_{\pm}^{\pm} = \eta_1 \mu_{\pm} \pm \sqrt{1 - \eta_1^2} \sqrt{1 - \mu_{\pm}^2} = \pm 1$ . Линейные приращения к  $\gamma = \gamma_1^{\pm}$  порождают линейные же приращения к  $q_+ = xx_1(1 \pm \eta_1)$ , а они в свою очередь дают линейные приращения косинусам  $\mu = \pm \eta_1$ . Последние приращения, как легко показать, приводят к квадратичным отклонениям косинуса  $\eta_-$  от его крайних значений, что хорошо проявляется на рисунке. Два других косинуса изменяются непрерывно и асимптотически при  $\gamma \rightarrow \infty$  ведут себя согласно  $\eta_+^{\pm} \sim \eta_1 \pm \sqrt{1 - \eta_1^2} \frac{|x_*|}{z \sqrt{xx_1}}$ , т.е. медленно стремятся к общей константе.

Еще одна особенность рисунка состоит в пересечении кривых.

Рис.6 построен для других частот  $x = 2$ ,  $x_1 = 0.45$  и косинуса  $\eta_1 = 0.1$ . На нем даны те же зависимости, что и на рис.5. Диапазон изменения энергии очень мал  $[\gamma_{min}, \gamma_{dv}] = [2.55, 2.5549]$ . Как и на рис.5, на правом конце этого промежутка  $\mu_- = -1$  и  $\eta_-^{\pm} = -\eta_1 = -0.1$ , но в остальном характер кривых отличается. При всех энергиях наибольшим является  $\eta_+^+$ , а наименьшим  $\eta_+^-$  и нет пересечения кривых.

Явление пересечения кривых зависимости характерных косинусов от энергии требует разъяснения.

**7.4. Условия пересечения кривых.** Из рисунка видно, что в определенных точках оказывается  $\eta_-^+ = \eta_+^+$  и  $\eta_-^+ = \eta_+^-$ . Записав эти равенства через выражения (31) и возведя два раза в квадрат, придем к уравнению четвертой степени относительно энергии

$$\gamma^4 - 2x_* \gamma^3 + (x_*^2 - 2 - 2\gamma) \gamma^2 + 2x_*(1 + \gamma) \gamma + 1 - x_*^2 + \frac{x_*^2}{xx_1} \gamma + \gamma(2 + \gamma) = 0, \quad (32)$$

$$\gamma = xx_1(1 - \eta_1^2).$$

В уравнение входят три параметра: частоты  $x$ ,  $x_1$  и параметр  $\gamma$ , в котором скрыт косинус  $\eta_1$ . Уравнение можно рассматривать и как уравнение второго порядка относительно  $\gamma$  и находить зависимость косинуса  $\eta_1$  от энергии.

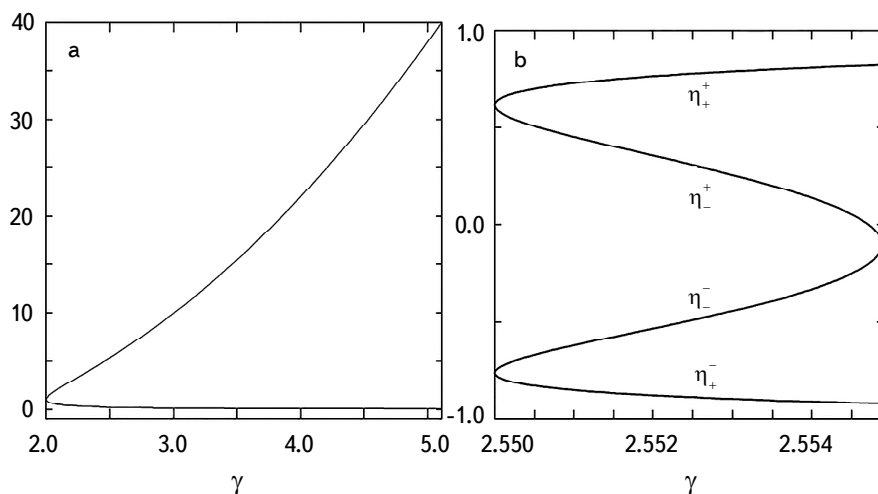


Рис.6. Зависимость от  $\gamma$  величин  $q_{\pm}$ ,  $\mu_{\pm}$  (а) и  $\eta_{\pm}^{\pm}$  (б) при  $x=2$ ,  $x_1=0.45$  и  $\eta_1=0.1$  ..

Для данных рис.5б получаются решения уравнения  $\gamma=4.7012$  и  $\gamma=4.7953$  и два отрицательных, не имеющих физического смысла.

Опустив подробное исследование уравнения (32), рассмотрим его частные решения. Уравнение имеет очевидные решения при  $\eta_1 = \pm 1$ . Тогда  $\gamma = 0$  и уравнение сильно упрощается:

$$\gamma^4 - 2x_*\gamma^3 + (x_*^2 - 2)\gamma^2 + 2x_*\gamma + 1 - x_*^2 = 0. \quad (33)$$

Легко проверить, что решениями являются  $\gamma = \pm 1$  и  $\gamma = x_* \pm 1$ .

Аналитически находятся также корни при  $\eta_1 = 0$ . Эти корни в силу симметрии по косинусу  $\eta_1$  (в уравнение входит его квадрат) оказываются кратными, т.е. многочлен четвертой степени представляется в виде

$$\begin{aligned} (\gamma - \gamma_+)^2 (\gamma - \gamma_-)^2 &= (\gamma^2 - 2\gamma^+ \gamma + \gamma_+^2)(\gamma^2 - 2\gamma^- \gamma + \gamma_-^2) = \\ &= \gamma^4 - 2(\gamma_+ + \gamma_-)\gamma^3 + (\gamma_+^2 + \gamma_-^2 + 4\gamma^+ \gamma_-)\gamma^2 - 2\gamma^+ \gamma_- (\gamma_+ + \gamma_-)\gamma + \gamma_+^2 \gamma_-^2. \end{aligned} \quad (34)$$

Сравнение с исходным выражением дает сумму и произведение корней:

$$\gamma_+ + \gamma_- = x_*, \quad \gamma_+ \gamma_- = -(1 + x x_1), \quad (35)$$

что достаточно, чтобы их найти:

$$\gamma_{\pm} = \frac{x_* \pm r_0}{2}, \quad r_0 = \sqrt{(x + x_1)^2 + 4}. \quad (36)$$

Вблизи нуля, т.е. при малых  $|\eta_1| \ll 1$ , корни расходятся:

$$\gamma \sim \gamma_+ \pm \frac{x_*}{r_0} |\eta_1|, \quad \gamma \sim \gamma_- \mp \frac{x_*}{r_0} |\eta_1|. \quad (37)$$

Еще один простой частный случай - с равными частотами, т.е. с  $x_* = 0$ . Уравнение превращается в полный квадрат

$$\gamma^4 - 2(1 + \gamma)\gamma^2 + (1 + \gamma)^2 = (\gamma^2 - 1 - \gamma)^2 = 0, \quad (38)$$

его решения тоже двукратные и равны  $\gamma = \pm\sqrt{1 + \gamma}$ .

Посмотрим, при каких условиях могут получиться те или иные частные значения энергии как решения уравнения. Например, когда может оказаться  $\gamma = \gamma_{min}$ . Подставив  $\gamma = \gamma_{min} = 1 + (x_* + |x_*|)/2$ , получим упрощенное уравнение (32) и из него найдем  $\eta_1$ :

$$\begin{aligned} \gamma(-2xx_1|x_*| + xx_1\gamma + x_*^2) &= 0, \quad -2Z + 1 - \eta_1^2 + Z^2 = 0, \\ \eta_1^2 &= 1 + Z^2 - 2Z, \quad \eta_1 = \pm(1 - Z). \end{aligned} \quad (39)$$

Минимальное значение энергии получается при  $\eta_1 = \pm 1$  и  $\eta_1 = \pm(1 - Z)$ .

Еще одним интересным значением энергии является  $\gamma_{dv}$ . Подставив его в (32), получим

$$\gamma \left[ (4x^2x_1^2 - x_*^2)^2 + 8xx_1\gamma(x_*^2 + 2xx_1(\gamma - 2xx_1)) \right] = 0 \quad (40)$$

или после подстановки выражения для  $\gamma$  и деления на  $x^4x_1^4$

$$(Z^2 - 4)^2 + 16(1 - \eta_1^2) + 8(Z^2 - 4)(1 - \eta_1^2) = [(Z^2 - 4) + 4(1 - \eta_1^2)]^2 = (Z^2 - 4\eta_1^2)^2 = 0. \quad (41)$$

Таким образом, значение  $\gamma = \gamma_{dv}$  получается при  $\eta_1 = \pm Z/2$ .

Оба решения  $\eta_1 = \pm(1 - Z)$  и  $\eta_1 = \pm Z/2$  возможны только при  $Z < 2$ , откуда вытекает кардинальная роль именно этого условия. Рисунки подтверждают этот вывод: при данных рисунков соответственно  $Z = 1/20 = 0.05$  и  $Z = 1.72222$ .

**7.5. Влияние последовательного увеличения энергии.** На рис.7 представлены кривые, отражающие зависимость от косинуса полярного угла  $\eta$  усредненных по азимуту сингулярной (а) и несингулярной (б) частей ФП интенсивности при закрепленных частотах  $x=2$ ,  $x_1=0.45$  и косинусе  $\eta_1 = 0.1$  при различных энергиях электронов, указанных при кривых.

При принятых значениях частот определяются параметры  $x_* = 1.55$ ,  $xx_1 = 0.9$ ,  $Z = 1.7222$ ,  $\gamma_{min} = 2.55$ ,  $\gamma_{dv} = 2.5549$ . Усредненная сингулярная часть с увеличением  $\gamma$  изменяется монотонно. При  $\gamma = \gamma_{min}$  все ФП равны нулю. Даже с небольшим отлчием от этого минимального значения, при  $\gamma = 2.551$  сингулярная часть существенно увеличивается. При энергиях между минимальным 2.55 и разделительным 2.5549 значениями получаются четыре характерные значения косинуса. На рисунке с  $\gamma = 2.551$  это  $\eta_+^- = -0.84975$ ,  $\eta_-^- = -0.61979$ ,  $\eta_+^+ = 0.45123$ ,  $\eta_+^+ = 0.72784$ , а при  $\gamma = 2.5525$  это  $\eta_+^- = -0.88738$ ,  $\eta_-^- = -0.48920$ ,  $\eta_+^+ = 0.30586$ ,  $\eta_+^+ = 0.77890$ . В крайних точках усредненная ФП обращается в нуль, а в средних - претерпевает разрыв гладкости. При  $\gamma = \gamma_{dv}$  средние точки сливаются и разрыв исчезает. Такое состояние продолжается до значения  $\gamma = \gamma_1^- = \gamma(x, x, -\eta_1) = 2.5941$ , при котором

левый конец кривой поднимается к положительному значению. При  $\gamma = \gamma_1^+ = \gamma(x, x, \eta_1) = 2.6428$  левый конец уходит вверх, а правый поднимается от нуля. При всех следующих (бóльших) значениях энергии имеются две характерные точки  $\eta_+^-$  и  $\eta_+^+$ , в которых нарушается гладкость кривых. Между этими точками кривые, как и при  $\gamma < \gamma_{dv}$ , обращены выпуклостью вниз, а вне их все кривые сливаются. Последний факт объясняется тем, что при всех таких энергиях и косинусах получается одинаковый промежуток изменения азимута  $[0, \pi]$  и интеграл по азимуту становится равным полному эллиптическому интегралу, который зависит только от  $\eta$ , причем несильно. С ростом энергии длина промежутка с выпуклостью уменьшается.

Кривые усредненной несингулярной части ФП лежат ниже сингулярной, а ход изменения несингулярной части после усреднения значительно сложнее, что объясняется более сложной зависимостью несингулярной части ФП от ее параметров (сингулярная часть формально не зависит от энергии). Сначала кривые поднимаются от нуля до некоторого наивысшего положения при  $\gamma \approx 2.56$ , затем опускаются до положения при  $\gamma \approx 6$ , заходят в отрицательную область и снова поднимаются до нуля. Нарушения гладкости происходят на тех же энергиях и в тех же точках, что и сингулярные. При двух наименьших значениях энергии между особыми точками кривые выпуклы вниз, а на крайних точках кривые опускаются до нуля. Точки нарушения гладкости сливаются при той же энергии  $\gamma_{dv}$ . При энергии  $\gamma_1^-$  левый конец кривой отрывается от нуля, а при  $\gamma_1^+$  отрывается и правый. При бóльших энергиях снова появляются точки, в которых нарушается гладкость, но между ними выпуклость обращена вверх.

Другой вариант зависимости от  $\eta$  усредненных по азимуту частей ФП представлен на рис.8. Здесь принято, как на рис.5b,  $x = 5$ ,  $x_1 = 4$ ,  $\eta = 0.4$ . Кривые располагаются очень близко друг к другу, поэтому у кривых указаны не все значения энергии, а некоторые в сокращенном виде. Так 3.2 означает  $\gamma_*(x, x_1, \eta_1) = 3.2003$ , 4.4 -  $\gamma_*(-\eta_1) = 4.4074$ . Два значения, при которых происходят совпадения косинусов: 4.7 обозначает 4.7012, при котором  $\eta_-^+ = \eta_+^+ = \eta_1^+ = 0.45$ , и 4.8, т.е. 4.7953, при котором  $\eta_-^- = \eta_+^- = \eta_1^- = 0.35$ .

Проследим и здесь эволюцию кривых.

Сингулярные части отличаются тем, что у них происходит нарушение гладкости в виде выемки между двумя значениями  $\eta$ , близкими у всех кривых и расположенными по обе стороны от  $\eta \approx 0.4$ . После выхода из указанной выемки сингулярные части испытывают еще один пик, а затем сливаются в одну почти прямую линию, что является проявлением той же независимости  $Q$  от энергии. Между кривыми с  $\gamma = 4.5$  и  $\gamma = 10$  видны две кривые, соответствующие  $\gamma = 4.7$  и 4.8, у которых эти значения не указаны ввиду невозможности поместить цифры между кривыми. Кривые же с  $\gamma = 6$

и 7 на рис.8b можно заметить только в пределах выемки, остальные их части закрыты кривой с  $\gamma = 10$ . Размеры выемки, как и на рис.7a, уменьшаются с ростом энергии.

У несингулярных частей нарушения гладкости в местах выемки сингулярных частей, если и можно заметить, то только с большим трудом. Заметные нарушения несингулярных частей наблюдаются ближе к крайним значениям косинуса, справа они начинаются при  $\gamma > 3.2$  и заканчиваются при  $\gamma > 5$ .

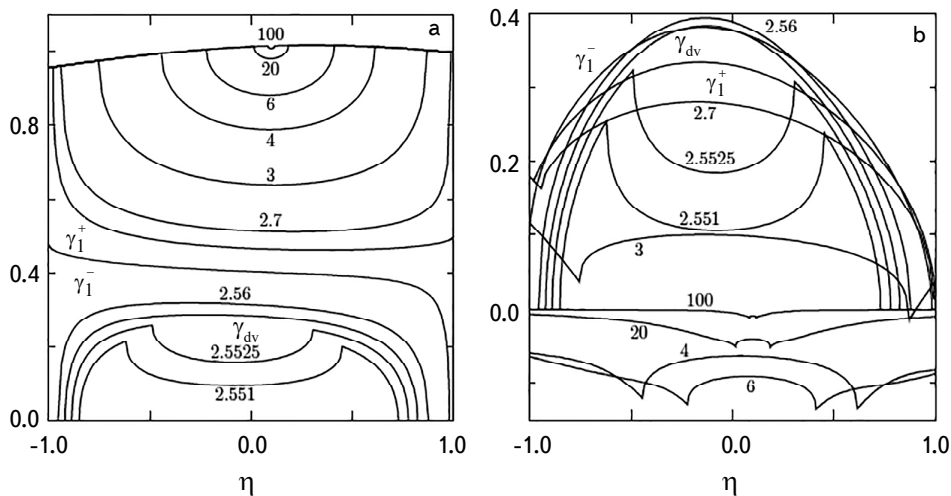


Рис.7. Усредненные сингулярная и несингулярная части ФП в зависимости от косинуса  $\eta$  при разных энергиях.

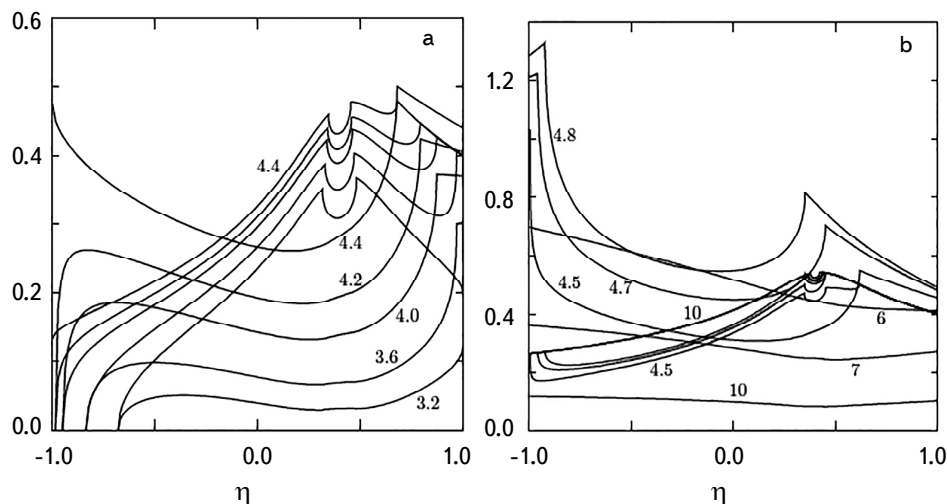


Рис.8. Усредненные сингулярная и несингулярная части ФП при  $z = 0.05$  и различных  $\gamma$  в зависимости от  $\eta$ .



Слева такие пики наблюдаются при  $4.5 < \gamma \leq 4.8$ . При  $\gamma < \gamma_*(-\eta_1)$  обе усредненные части начинаются с общих нулевых значений при возрастающих с увеличением  $\gamma$  значениях  $\eta$ . При приближении к  $\gamma_*(-\eta_1)$  обращение в нуль при  $\eta$ , приближающемся к  $-1$ , становится таким крутым, что его невозможно изобразить на рисунке. При  $\gamma \geq \gamma_*(-\eta_1)$  кривые начинаются при  $\eta = -1$  с разных значений, поэтому на рис.8а пограничное значение указано у обеих частей ФП. С ростом энергии кривые поднимаются все выше, причем сингулярная часть в своей негладкой области выше несингулярной. Начиная с  $\gamma = 4.4$  и кончая  $\gamma = 4.8$ , кривые несингулярных частей с ростом энергии поднимаются, а затем, напротив, опускаются и при  $\gamma \rightarrow \infty$  стремятся к нулю.

Процесс усреднения был проверен для других ФП с учетом поворотов базисных ортов, но результаты этих расчетов здесь не приводятся.

8. *Заключение.* Таким образом, в работе, исходя из общего релятивистского кинетического уравнения, описывающего многократное комптоновское рассеяние, показано, что в случае плоской горизонтально однородной среды достаточно двух параметров Стокса для описания линейной поляризации излучения. Предложена также процедура усреднения функций перераспределения по азимуту, причем усредненная сингулярная часть ФП выражена через эллиптические интегралы первого рода. Показано, как избежать потерь точности при вычислении фазовой матрицы, т.е. матрицы функций перераспределения по частоте, направлению и поляризации с учетом поворота от внутреннего базиса к внешнему и обратно. Приведены примеры расчетов усредненных сингулярной и несингулярной частей ФП интенсивности.

Результаты могут быть применены при расчетах образования спектров и поляризации излучения релятивистских астрофизических объектов, таких как джеты активных ядер галактик, короны аккреционных дисков и другие.

Санкт-Петербургский государственный университет,  
e-mail: dinagirner@gmail.com

## COMPTON SCATTERING IN PLANE MEDIA: POLARIZATION OF RADIATION AND AZIMUTH INDEPENDENCE. II. RESULTS OF CALCULATIONS

D.I.NAGIRNER, S.I.GRACHEV

In the second part of paper the final formulas are deduced which can be used for averaging redistribution functions (RF) on azimuth under the Compton scattering

in plane stationary media. Redistribution on frequency and direction of intensity and the Stokes parameter of linear polarization is considered. Azimuth averages of the most singular parts of RF are expressed in terms of elliptical integrals of the first kind. The examples of averaging are given.

Keywords: *radiative transfer: Stokes parameters: Compton scattering: frequency redistribution functions*

## ЛИТЕРАТУРА

1. Д.И.Нагирнер, С.И.Грачев, Астрофизика, **65**, 1, 2022.
2. И.С.Градштейн, И.М.Рыжик, Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, М., Наука, с.1108.