

РАССЕЯНИЕ ПЛОСКОЙ ВОЛНЫ НА ДИФРАКЦИОННОЙ РЕШЕТКЕ В КАРТИНЕ ФРЕНЕЛЯ

А.Ж. ХАЧАТРИАН^{1*}, А.С. АВАНЕСЯН¹,
В.Н. АГАБЕКЯН², А.Ф. ПАРСАМЯН¹

¹Государственный инженерный университет Армении, Ереван, Армения

²Институт прикладных проблем физики НАН Армении, Ереван, Армения

*e-mail: ashot.khachatrian@gmail.com

(Поступила в редакцию 9 марта 2022 г.)

В данной работе рассматривается, обычно исследуемую в приближении Фраунгофера, задачу рассеяния плоской волны на дифракционной решетке в картине Френеля. Показано, что для приближенного описания рассеянного поля необходимо введение двух волновых параметров, а именно волнового параметра по области наблюдения и волнового параметра для области расположения источников. Получены значения максимумов интенсивности дифрагированного поля в картине Френеля для углов, соответствующих максимумам интенсивности в картине Фраунгофера. Показано, что на боковых лепестках дифракционной картины интенсивность поля принимает максимально возможное значение.

1. Введение

Как известно, одной из базовых задач классической волновой теории является задача описания поля плоской волны рассеянного на системе из эквидистантно расположенных на одной прямой одинаковых щелей проколотых на плоском непрозрачном экране [1,2]. Называя также дифракционной решеткой, такая система, до сих пор остаются одними из основных рабочих элементов для многих оптических приборов. Это, конечно же, в первую очередь связано со свойством дифракционных решеток пространственно разлагать первичный пучок по его спектральному составу. Сказанное в полной мере относится к наблюдениям в прошедшем сквозь экран свете, а также в случае зеркального экрана для отраженного света.

Разновидностей возможных дифракционных решеток довольно много. Они, несмотря на давность изобретения (для оптических волн – Дэвид Риттенхаус 1786 год), по сей день остаются объектами интенсивных исследований. Так, схожие по расположению щелей одномерные, двумерные и трёхмерные дифракционные решетки могут отличаться по формам щелей. Широкий класс дифракционных решеток охватывают, так называемые, квазиодномерные и квазидвумерные системы, когда щели расположены на кривой, а не на прямой линии

или же на не являющейся плоской поверхностью поверхности (см., например, [3–8]). В последнее время возросло также внимания к, так называемым, нерегулярным дифракционным решеткам, в которых нарушена периодичность в расположении щелей или же размерные и топологические идентичности, а то и все факторы одновременно (см., например, [9–14]).

Несмотря на существующее многообразие дифракционных решеток и решаемого на их основе круга задач, очень часто при их рассмотрении обычно руководствуются следующим допущением. Так, предполагается, что поле в пределах одной щели определяется исключительно значением первичного волнового поля в области данной щели. Вместе с тем полями, приходящими в область данной щели из других щелей пренебрегается. Такое предположение во многом оправдано как в плане адекватного восприятия дифракционного опыта, так и в плане существенного упрощения возможности его описания. Действительно, пренебрежение обменными волновыми полями между щелями, по сравнению с первичным полем позволяет свести дифракционную задачу к задаче описания суперпозиционного поля системы из многих когерентных источников (щелей). Пренебрегая эффектами всевозможных переотражений поля между элементами дифракционной решетки, мы тем самым предполагаем, что волны исходящие из отдельных источников определяется исключительно их расположением в первичном поле, а также, что их взаимное расположение не является существенным.

Таким образом, рассматривая систему щелей дифракционной решетки как систему источников, генерация волн которыми вызвана наличием гармонического во времени первичного поля, дифракционная задача в известном смысле сводится к рассмотрению следующей суммы:

$$U(\mathbf{R}, t) = \sum_{p=1}^N \frac{a_p}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}_p|} \cos[\omega t - k|\mathbf{R} - \mathbf{r}_p| + \gamma_p], \quad (1)$$

где источники рассматриваются как точечные, а волны исходящие из них рассматриваются сферические. Здесь вектор \mathbf{R} указывает точку наблюдения, а вектора \mathbf{r}_p ($p = 1, 2, \dots, N$, N – количество источников) соответствуют положениям источников. Здесь величина ω есть частота волнового поля, которая связана с волновым числом k следующим соотношением: $k = \omega / v$, где v – скорость распространения волнового возмущения. Величины a_p , γ_p представляют собой амплитуду и фазы сферической волны генерированной p -ым источников. В свете вышесказанного, данные величины определяются только лишь положением источника в первичном поле.

В общем случае, для произвольного пространственного распределения системы источников, исследование значения суммы (1) от положения точки наблюдения \mathbf{R} представляет собой трудную математическую проблему. Вместе с тем, когда эксперимент проводится при определенных условиях, то для целого ряда,

когда в расположении источников присутствует некая закономерность, данная задача допускает аналитическое рассмотрение. Так, для целого ряда дифракционных задач хорошо известными методами их приближенного рассмотрения задачи являются, так называемые, картины дифракции Френеля и Фраунгофера (см., например, [15–21]). Для применимости данных приближений, как известно, необходимо выполнение определенных условий, накладываемых на пространственные и волновые параметры задачи [1,2].

Одна из классических задач теории волн, задача об интерференции двух сферических волн ($N = 2$, см. (1)) решается, как известно, в картине Френеля (см., например [22]). В случае многих источников ($N \gg 1$, см. (1)) задача обычно изначально рассматривается в приближении Фраунгофера, когда исходящие из источников сферические волны в области наблюдения могут быть аппроксимированы плоскими волнами. Как известно, в данном приближении суперпозиционное поле для системы из периодически расположенных источников рассчитывается аналитически. Так, к данному классу задач, относиться рассмотрение оптического опыта для простой дифракционной решетки или же дифракции рентгеновских лучей на кристаллических решетках (см., например, [23,24]).

В контексте вышесказанного нам представляется интересной возможность проведения аналитического рассмотрения оптического опыта для простой дифракционной решетки в картине Френеля. Сама по себе такая задача представляется интересной, в том плане, что ее рассмотрения не только в учебниках, но и в научных работах соответствующей направленности отсутствует. Данная работа состоит из Введения, четырех параграфов и заключения. §1 обсуждается поле сферического источника в картинах Френеля и Фраунгофера. В §2 нами рассматривается задача определения максимума интенсивности для суперпозиционного поля системы многих источников.

2. Волновое поле сферического источника в картинах Френеля и Фраунгофера

В пределах данного параграфа нами будет обсуждаться вопрос об исследовании суммы (1), в, так называемых, приближениях Френеля и Фраунгофера. Как отмечалось выше, выражение (1) представляет собой суперпозиционное поле, генерированного системой когерентно излучающих точечных источников. Несмотря на то, что многие излагаемые ниже результаты являются общеизвестными, мы все же сочли здесь целесообразным изложение данного вопроса в рамках подхода развитого в работах [24,25]. В рамках данного подхода выявление условий применимости того или иного приближенного описания поля представляется нам является целостным и максимально прозрачным.

Основой для приближенного описания суперпозиционного поля служит вопрос о виде сферической волны в картинах Френеля и Фраунгофера. Пусть в точке с радиус векторам \mathbf{r} имеется гармонически излучающий точечный источник. Тогда, для произвольной точки наблюдения с радиус вектором \mathbf{R} волновое поле будет описываться выражением:

$$U(\mathbf{R}, \mathbf{r}, t) = \frac{A}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}|} \cos[\omega t - k|\mathbf{R} - \mathbf{r}|], \quad (2)$$

где A есть амплитуда сферической волны. Предположим, что волновое поле (2) необходимо описывать в окрестности некоторой точки радиуса вектора \mathbf{R}_0 , а именно в точках некой площадки σ перпендикулярной вектору \mathbf{R}_0 (см. Рис.1). Далее, мы будем называть направление по вектору \mathbf{R}_0 главным направлением или осью наблюдения, а площадку σ областью или площадкой наблюдения.

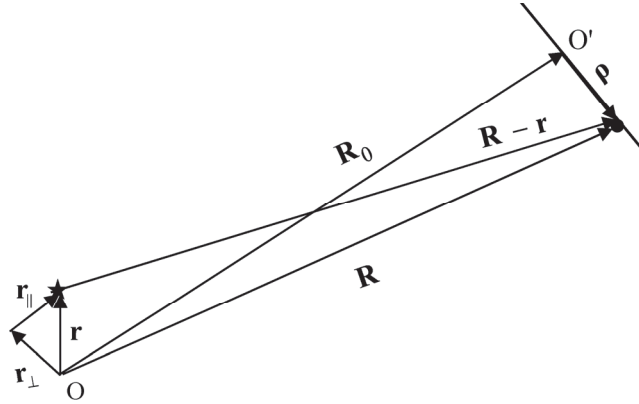


Рис.1. Пространственные параметры и область наблюдения сферического поля.

Обозначим посредством O' точку пересечения главной оси наблюдения с площадкой σ и назовём ее центральной точкой наблюдения. Введем также вектора \mathbf{r}_\perp и \mathbf{r}_\parallel , являющимися перпендикулярной и параллельной по отношению к главному направлению составляющими вектора \mathbf{r} . На Рис.1 представлен также расположенный на площадке наблюдения вектор ρ , который указывает смещение точки наблюдения от главной точки наблюдения O' . Из Рис.1 непосредственным образом следует, что

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_0 + \rho, \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_\perp + \mathbf{r}_\parallel. \quad (3)$$

В соответствии с данными равенствами задача представлена четырьмя пространственными параметрами: \mathbf{R}_0 , ρ , \mathbf{r}_\perp , \mathbf{r}_\parallel . Далее, для удобства дальнейшего изложения мы для векторов \mathbf{r}_\perp , \mathbf{r}_\parallel примем следующие обозначения:

$$\xi \equiv \mathbf{r}_\perp \text{ и } \eta \equiv \mathbf{r}_\parallel. \quad (4)$$

Заметим, что продольные пространственные параметры \mathbf{R}_0 , η всегда параллельны друг к другу, в то время как перпендикулярные к ним поперечные параметры ρ , ξ могут иметь различное направление. Используя (3), (4) легко

увидеть, что поле сферической волны (2) посредством введенных пространственных параметров записывается в виде:

$$U(\mathbf{R}, \mathbf{r}, t) \equiv U(\mathbf{R}_0, \boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, t) = \frac{A}{|\mathbf{R}_0 + \boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\eta}|} \cos[\omega t - k|\mathbf{R}_0 + \boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\eta}|]. \quad (5)$$

Предположим, что площадка σ , а также точки наблюдения на ней выбраны таким образом, что

$$\rho / R_0 \ll 1, \xi / R_0 \ll 1 \text{ и } \eta / R_0 \ll 1, \quad (6)$$

R_0, η, ρ, ξ есть модули соответствующих векторов. Помимо малости отношений (6), предположим также, что описание эксперимента производится в рамках выполнения условий:

$$w_s = \frac{\xi^2 k}{R_0} \ll 2\pi, \quad w_\sigma = \frac{\rho^2 k}{R_0} \ll 2\pi. \quad (7)$$

Данные две безразмерные величины являются волновыми параметрами рассматриваемой задачи; w_s – волновой параметр по области источника, w_σ – волновой параметр по области наблюдения.

Разлагая выражение (5) в ряд Тейлора по пространственным и волновым параметрам задачи, а также учитывая условия их малости (6), (7) можно показать, что на плоскости наблюдения поле сферической волна принимает вид [23,24]:

$$U(\mathbf{R}, \mathbf{r}, t) = \frac{A}{R_0} \cos \left[\omega t - (\mathbf{R} - \mathbf{r})\mathbf{k} + \frac{|\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\xi}|^2}{2R_0} k \right], \quad (8)$$

где \mathbf{k} есть волновой вектор по оси наблюдения

$$\mathbf{k} = k\mathbf{R}_0 / R_0. \quad (9)$$

Выражение (8) есть не что иное, как вид сферической волны в картине Френеля. Как видно из формулы (8) амплитуда поля сферической волны во всех точках площадки σ при условиях (6), (7) принимает одно и то же значения. В то же время фаза волны остается изменой, причем это изменение определяется поперечными пространственными параметрами $\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\xi}$. Действительно, используя (9) легко показать, что в выражении фазы (8) слагаемое

$$(\mathbf{R} - \mathbf{r})\mathbf{k} = (\mathbf{R}_0 - \boldsymbol{\eta})\mathbf{k}, \quad (10)$$

т.е. оно определяется продольными пространственными параметрами задачи. Обозначая посредством L расстояние между источником и плоскостью наблюдения, легко также увидеть, что

$$(\mathbf{R} - \mathbf{r})\mathbf{k} = Lk. \quad (11)$$

Величину L мы будем называть ходом волны до площадки наблюдения.

Как видно из вида сферической волны в картине Френеля (8), если пренебречь в выражении фазы последним членом, т.е. если рассматривать, что

$$\frac{|\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\xi}|^2}{2R_0} k \approx 0, \quad (12)$$

то сферическая волна будет определяться выражением:

$$U(\mathbf{R}, \mathbf{r}, t) = \frac{A}{R_0} \cos[\omega t - (\mathbf{R} - \mathbf{r})\mathbf{k}]. \quad (13)$$

Данное выражение есть вид сферической волны в картине Фраунгофера. Легко увидеть, что оно определяет плоское волновое поле, так как на площадке наблюдения, как амплитуда, так и фаза волны однородны. Действительно, используя (11) для поля (13) можем написать:

$$U(\mathbf{R}, \mathbf{r}, t) = \frac{A}{R_0} \cos[\omega t - Lk]. \quad (14)$$

Последнее означает, что в картине Фраунгофера поле сферической волны на площадке наблюдения определяется величиной хода волны, т.е. расстоянием от источника до площадки наблюдения.

Как видно из вышеизложенного для правомочности описания волнового поля в картине Фраунгофера (13) помимо условий (6), (7) необходимо также выполнение условия (12). Легко увидеть, что выполнению данного условия будут благоприятствовать следующие обстоятельства выполняемого опыта; удаленность плоскости наблюдения, близость источника и точки наблюдения к оси наблюдения, большая длина волны ($k = 2\pi / \lambda$).

3. Задача определения максимума интенсивности для суперпозиционного поля системы многих источников

Пусть имеется система из многих точечных источников, концентрированных возле некоторой точки O и положениями, определяемыми исходящими из данной точки векторами \mathbf{r}_p . Пусть положение точки наблюдения также указывается вектором \mathbf{R} с началом в точке O . Тогда суперпозиционное поле системы источников запишется в виде:

$$U(\mathbf{R}, t) = \sum_{p=1}^N \frac{A_p}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}_p|} \cos[\omega t - k|\mathbf{R} - \mathbf{r}_p|], \quad (15)$$

где мы приняли, что начальные фазы излучений у всех источников равны нулю, а амплитуды волн взяли различными.

Предположим, что требуется описание волнового поля на некоторой площадке σ , пространственное положение и ориентация которого определяется также исходящим из точки O вектором \mathbf{R}_0 . Расстояние между площадкой и точкой O равно модулю данного вектора R_0 и она перпендикулярна к нему (см. Рис.2).

В соответствии с представленными в §1 результатами, если для всех значений p ($p = 1, 2, \dots, N$) условия опыта таковы, что (см. (6))

$$\rho / R_0 \ll 1 \text{ и } \xi_p / R_0 \ll 1, \eta_p / R_0 \ll 1, \quad (16)$$

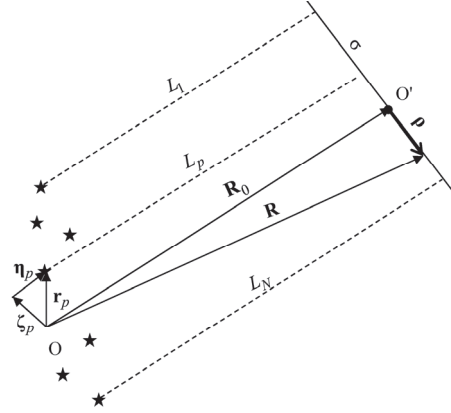


Рис.2. Пространственные параметры для задачи определения суперпозиционного поля системы многих источников.

а также (см. (7))

$$w_s = \frac{\xi_p^2 k}{R_0} \sim 2\pi, \quad w_\sigma = \frac{\rho^2 k}{R_0} \sim 2\pi. \quad (17)$$

то сумма (15) может быть рассмотрена в виде (см. (8), а также (11))

$$U(\mathbf{R}, t) = \sum_{p=1}^N \frac{A_p}{R_0} \cos \left[\omega t - kL_p + \frac{|\mathbf{p} - \xi_p|^2}{2R_0} k \right], \quad (18)$$

где $L_p = |\mathbf{R} - \mathbf{\eta}_p|$ есть расстояние от p источника до площадки наблюдения или ход волны от p -ого источника до площадки наблюдения. Данное выражение есть не что иное как вид суперпозиционного поля в картине Френеля.

Если наряду с условиями (16), (17) условия эксперимента позволяют также рассматривать, что $w_s \ll 1$, $w_p \ll 1$, т.е.

$$\frac{|\mathbf{p} - \xi_p|^2}{2R_0} k \approx 0, \quad (19)$$

то картине Френеля поля (18) переходит в картину поля Фраунгофера;

$$U(\mathbf{R}, t) = \sum_{p=1}^N \frac{A_p}{R_0} \cos[\omega t - kL_p]. \quad (20)$$

Очевидно, что картина Фраунгофера имеет более простой вид по сравнению с картиной Френеля. Действительно в картине Фраунгофера определяется ходом волн до площадки наблюдения, в то время как в картине Френеля помимо хода волн присутствуют также поперечные параметры задачи.

Несмотря на существенное упрощение, задача рассмотрения суперпозиционного поля в картинах Френеля и Фраунгофера все же остается сложной задачей. Для системы из произвольно расположенных излучателей эту задачу можно решить разве что численно. Вместе с тем, когда в расположении излучателей присутствует определенная закономерность, то задача допускает аналитическое

рассмотрение. Сказанное в полной мере относится к картине Фраунгофера. Действительно, пусть расположение излучателей таково, что разности ходов всех формирующих суперпозиционное поле волн подчиняются следующей периодической закономерности:

$$L_p = L_1 + \Delta \cdot (p-1), \quad (21)$$

где величину Δ мы, как и принято, будем называть разностью хода. Заметим, что ситуация периодической дифракционной решетки соответствует именно этому случаю (см. ниже).

При условии (21), когда все $A_p = A$, сумма (20) может быть аналитически расчитана и она имеет вид:

$$U(\mathbf{R}, t) = A \frac{\sin \left[\frac{N \cdot k}{2} \Delta \right]}{\sin \left[\frac{k}{2} \Delta \right]} \cos \left[\omega t + k \frac{N-1}{2} \Delta - k L_1 \right], \quad (22)$$

Данное выражение является всем хорошо известным (см. [1, 2]). Как следует из (22) при условии

$$\frac{k}{2} \Delta = \pi n, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (23)$$

амплитуда колебаний принимает максимально возможное значение. Используя связь $k = 2\pi / \lambda$, данное условие может быть преобразовано к виду:

$$\Delta = \lambda n. \quad (24)$$

Согласно последнему, если разность хода кратна длине волны, то в картине Фраунгофера наблюдается максимум.

Несмотря на очевидную простоту рассмотрения картины Фраунгофера, аналитическое рассмотрение картины Френеля при выполнении условия (21) все же остается проблематичным. Вместе с тем данная задача может быть значительным образом упрощена, если ограничиться случаем максимума интенсивности в картине Фраунгофера. Говоря другими словами, мы будем исследовать дифракционную картину Френеля, когда разность хода кратна длине волны, что согласно (21), (24) соответствует максимумы в картине Фраунгофера.

4. Картина Френеля для задачи прохождения плоской волны через дифракционную решетку

Следуя вышесказанному, ниже мы будем рассматривать суперпозиционное поле многих источников в картине Френеля (18), когда разность хода волн от источников до площади наблюдения кратна длине волны (21), (24). Для конкретизации задачи предположим, что дифракционная решетка представляет собой систему из проколотых на непрозрачном экране идентичных прямоугольных

отверстий. Предположим также, что отверстия расположены периодически на одной прямой линии (см. Рис.1).

Согласно Рис.3 период данной структуры равен: величины a и d являются сторонами прямоугольного отверстия, а b есть расстояние между правым и левым сторонами соседних отверстий. Если количество отверстий равно N , то легко увидеть, что длина дифракционной решетки

$$l = Na + (N - 1)b . \quad (25)$$

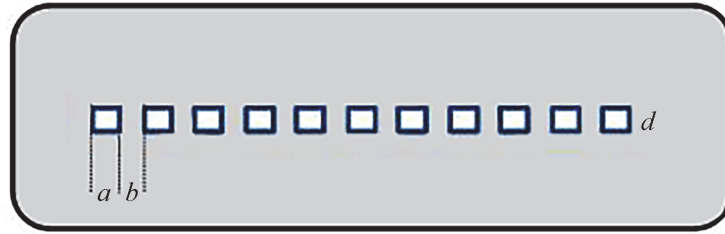


Рис.3. Модель одномерной дифракционной решетки.

Несмотря на то, что форма отверстий (щелей) выбрана в форме прямоугольника, наше рассмотрение будет базироваться на том предположении, что исходящая из одной щели в область дифракции волна является сферической. Данное предположение продиктовано следующим обстоятельством. Понятно, что существует определенная связь между формой отверстия и формой исходящей из нее волны. Очевидно также, что на данную связь будет влиять также направление падение на щель первичной волны. Вместе с тем представляется обоснованным предполагать, что по мере уменьшения размеров отверстий связь между формой щели и исходящей из нее волны будет ослабевать. Поэтому по мере удаления от щели волна будет приобретать все более и более изотропный характер.

В контексте вышесказанного естественно предполагать, что центры исходящих из щелей сферических волн совпадают с центрами прямоугольников. Пусть сквозь центры щелей проведена координатная ось. Тогда, обозначения посредством x_p координату середины p -ой можем написать:

$$x_p = x_1 + (p - 1)c , \quad (26)$$

где $c = a + b$ есть период дифракционной решетки. Легко увидеть, что выбитая в (26)

$$x_1 = -(N - 1)c/2 , \quad (27)$$

дифракционная решетка становится симметричной относительно начала координат.

Таким образом, задача дифракции плоского поля на дифракционной решетке сводится к задаче описания суперпозиционного поля системы многих точечных источников (см. Рис.4). Как видно из данного рисунка:

$$L_p = R_0 - x_p \cos \theta , \quad (28)$$

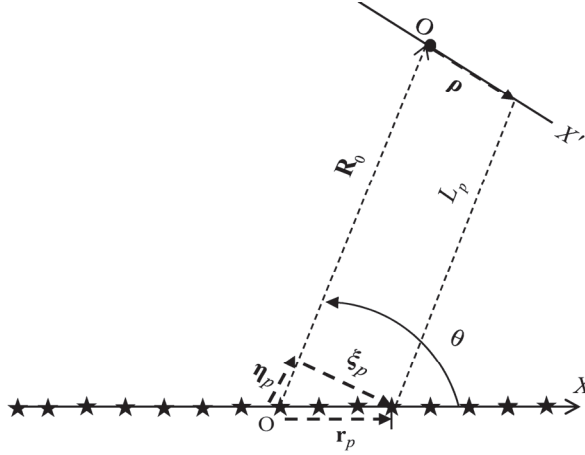


Рис.4. Система из периодически расположенных на прямой точечных излучателей.

θ есть угол между осью X и вектором \mathbf{R}_0 . Используя (26), (27) для (28) можно получить:

$$L_p = R_0 + \frac{N-1}{2} c \cos \theta - (p-1)c \cos \theta. \quad (29)$$

Из данного равенства для разности хода волн испущенных двумя соседними источниками (см. (21)) получим:

$$\Delta = L_p - L_{p-1} = -c \cos \theta. \quad (30)$$

Так как нумерация источников проведена слева на право, то при $0 \leq \theta \leq \pi/2$ разность хода отрицательна, если же $\pi/2 \leq \theta \leq \pi$, то она отрицательна. Используя (30), а также (24) можно получить классический результат о максимумах для дифракционной решетки в картине Фраунгофера:

$$c \cos \theta = \lambda n. \quad (31)$$

Здесь следует обратить особое внимание на следующее обстоятельство. Обычно в (31) число n рассматривается как $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Вместе с тем ясно, что разность хода может быть по модулю максимальной;

$$\Delta = \mp c, \quad (32)$$

только если, площадка наблюдения перпендикулярна к оси расположения источников X , т. е. когда $\theta = 0$ или $\theta = \pi$. Заметим, что когда площадка наблюдения параллельна оси источников ($\theta = \pi/2$), то тогда разность хода равна нулю. Как видно из формул (30), (32) модуль числа n должен быть ограниченным. Поэтому равенство $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ в (31) необходимо дополнить неравенством, а именно:

$$|n| \leq c / \lambda. \quad (33)$$

Как следует из данного неравенства, чем больше период системы и чем меньше длина волны, тем больше количество углов (см. (31)) соответствующих максимумам интенсивности суперпозиционного поля;

$$\cos \theta_n = \lambda n / c, \quad (34)$$

где

$$n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \text{ и } |n| \leq c / \lambda . \quad (35)$$

Используя (31) запишем разности хода (29) в следующем виде:

$$L_p = R_0 + \frac{N-1}{k} \pi n - \frac{(p-1)}{k} 2\pi n . \quad (36)$$

Подставляя (36) в (18) получим:

$$U(\mathbf{R}, t) = (-1)^{n(N-1)} \sum_{p=1}^N \frac{A_p}{R_0} \cos \left[\omega t - R_0 k + \frac{|\mathbf{p} - \boldsymbol{\xi}_p|^2}{2R_0} k \right] . \quad (37)$$

Полученная сумма выражает суперпозиционное поле в картине Френеля при условии выполнения максимума в картине Фраунгофера. Произведя сдвиг начала отсчета времени $t \rightarrow t + R_0 / v$ ($v = \omega / k$ – скорость распространения волнового возмущения) легко увидеть, что данная сумма с точности до знака принимает вид:

$$U(\mathbf{R}, t) = \sum_{p=1}^N \frac{A}{R_0} \cos \left[\omega t + \frac{|\mathbf{p} - \boldsymbol{\xi}_p|^2}{2R_0} k \right] , \quad (38)$$

где мы приняли, что амплитуды волн различных источников равны друг другу $A_p = A$.

Пусть интенсивность первичной волны падающей нормально на дифракционную решетку волны равна I . Тогда исходящая из одной щели энергия световой волны в единицу времени будет равна (см. Рис.3):

$$w = Iad . \quad (39)$$

Приравнивая данную мощность с потоком энергии сферической волны через поверхность полусферы с центром в середине щели и находящейся в области дифракции;

$$Iad = 2\pi R_0^2 \frac{1}{T} \int_0^T \left(\frac{A}{R_0} \cos \left[\omega t + \frac{|\mathbf{p} - \boldsymbol{\xi}_p|^2}{2R_0} k \right] \right)^2 dt , \quad (40)$$

где T есть период колебаний, для амплитуды сферической волны можно получить:

$$A = Iad / \pi . \quad (41)$$

Введем на площадке наблюдения σ перпендикулярную систему координат осей X' , Y' с центром в точке O' . Выберем ось X' такой, чтобы она располагалась с осью X в одной плоскости, причем при $\theta = \pi / 2$ (см. Рис.4), когда эти оси параллельны друг другу, они бы указывали одно и то же направление. Ясно, что при таком выборе ось X' она становится параллельной со всеми векторами $\boldsymbol{\xi}_p$, а сами вектора могут быть записаны в виде:

$$\boldsymbol{\xi}_p = x_p \sin \theta \mathbf{e}_{x'} , \quad (42)$$

где $\mathbf{e}_{x'}$ есть единичный безразмерный вектор, указывающий положительное

направление оси X' . Используя (42), а также рассматривая

$$\mathbf{p} = x' \mathbf{e}_{x'} + y' \mathbf{e}_{y'}, \quad (43)$$

где $\mathbf{e}_{y'}$ есть единичный безразмерный вектор, указывающий положительное направление оси Y' , легко увидеть, что

$$|\mathbf{p} - \xi_p|^2 = x'^2 + y'^2 + x_p^2 \sin^2 \theta - 2x'x_p \sin \theta. \quad (44)$$

Используя (44), а также рассматривая в нем $\theta = \theta_n$ для суперпозиционного поля (38) получим:

$$U(\mathbf{R}, t) = \sum_{p=1}^N \frac{A}{R_0} \cos \left[\omega t + \frac{x'^2 + y'^2 + x_p^2 \sin^2 \theta_n - 2x'x_p \sin \theta_n}{2R_0} k \right]. \quad (45)$$

Легко увидеть, что сдвигом начала отсчета времени;

$$t \rightarrow t - \frac{y'^2}{2vR_0},$$

зависимость данного выражения от переменной y' может быть устранена;

$$U(\mathbf{R}, t) = \sum_{p=1}^N \frac{A}{R_0} \cos \left[\omega t + \frac{x'^2 + x_p^2 \sin^2 \theta_n - 2x'x_p \sin \theta_n}{2R_0} k \right]. \quad (46)$$

Несмотря на то, что выражении (46) предполагается периодичность расположения источников, т.е. $x_p = x_1 + (p-1) \cdot c$ (см. (26)), данная сумма не поддается аналитическому вычислению. Но все же при определенных условиях на основе (46) могут быть сделаны некоторые общие суждения. Так, при малых значениях угла θ_n , когда величиной $\sin^2 \theta_n$ можно пренебречь, выражение (46) принимает вид:

$$U(\mathbf{R}, t) = \sum_{p=1}^N \frac{A}{R_0} \cos \left[\omega t - \frac{x'x_p \sin \theta_n}{R_0} k \right], \quad (47)$$

где произведена замена $t \rightarrow t - x'^2 / (2vR_0)$. Заметим, что согласно (35) при больших значениях отношения c / λ малые значения для углов θ_n возможны. Легко увидеть, что выражение (47) аналогично сумме (20) и, следовательно, она аналитически может быть рассчитана. Используя (47) легко увидеть, что непосредственно на самой оси наблюдения ($x' = 0$) амплитуда суперпозиционного поля принимает максимально возможное значение NA / R_0 .

5. Распределение поля на фронтальной плоскости наблюдения

В данном параграфе мы приводим численное рассмотрение выражения (46) при условии $\sin \theta_n = 1$, что будет соответствовать распределению суперпозиционного поля на параллельной оси дифракционной решетки фронтальной плоскости наблюдения;

$$U(\mathbf{R}, t) = \sum_{p=1}^N \frac{A}{R_0} \cos [\omega t + \delta_p], \quad (48)$$

где

$$\delta_p = \frac{x'^2 + x_p^2 - 2x'x_p}{2R_0} k. \quad (49)$$

Заметим, что в точке на самой оси наблюдения, т.е. в точке O' (см. выше) $x' = 0$.

Пусть на дифракционную решетку с периодом $c = 2$ мкм падает световая волна с длиной волны $\lambda = 0.4$ мкм, а сама дифракционная решетка имеет длину порядка $l = 0.5$ мм (см. (25), (26)). Нетрудно посчитать, что количество щелей такой решетки равно $N \approx l / c = 250$. На Рис.5 для тех различных значений $R_0 = 25, 50, 100$ см, проведена зависимость численного значения волнового параметра щели (см. (17)); $w_s^p = x_p^2 2\pi / (\lambda R_0)$, от его номера соответственно. Как видно из данного рисунка, для щелей на краях дифракционной решетки волновой параметр существенно отличен от нуля. Ясно, что вдали от центральной точки наблюдения O' существенно будет также отличаться также волновой параметр по области наблюдения $w_o^p = x'^2 2\pi / (\lambda R_0)$.

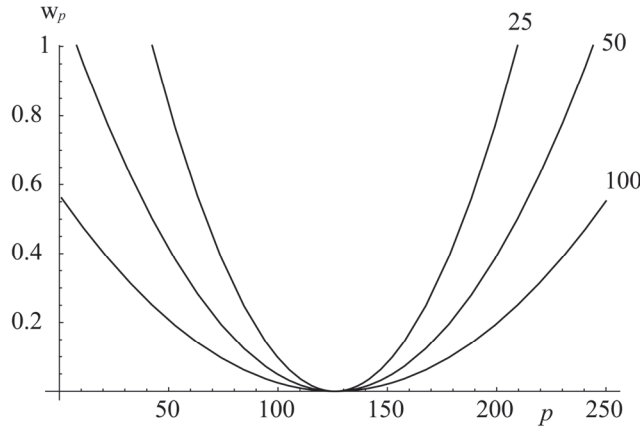


Рис.5. Зависимость волнового параметра щели от номера.

Воспользовавшись (48) для интенсивности поля картины Френеля, можем написать:

$$F_r^e = \frac{1}{2} \left(\frac{A}{R_0} \right)^2 \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \cos(\delta_i - \delta_j). \quad (50)$$

Легко увидеть, что количество членов в данной сумме равно N^2 . Заметим также, что в случае картины Фраунгофера, когда в (50) все $\delta_p = 0$, данная сумма принимает вид:

$$F_r^a = \frac{1}{2} \left(\frac{A}{R_0} \right)^2 N^2. \quad (51)$$

Используя (49), легко увидеть, что в фазах косинусов суммы квадратичная зависимость от переменной x' отсутствует;

$$\delta_i - \delta_j = \frac{x_i^2 - x_j^2}{\lambda R_0} \pi - \frac{(x_i - x_j)x'}{\lambda R_0} 2\pi. \quad (52)$$

Представляет интерес рассмотрение отношений значений интенсивностей полученных для картин Френеля и Фраунгофера, соответственно;

$$j = \frac{F_r^e}{F_r^a} = \frac{\sum_{p=1}^N \sum_{p'=1}^N \cos(\delta_p - \delta_{p'})}{N^2}. \quad (53)$$

Данную величины мы будем называть приведённой интенсивностью. Легко увидеть, что при $\delta_p \neq 0$ она меньше единицы.

На Рис. 6 приведена зависимость при приведенной интенсивности от координаты на площадке наблюдения для трех значений ее удаленности R_0 от дифракционной решетки. Как видно из данного рисунка картина Френеля существенно отличается от картины Фраунгофера, в которой распределение интенсивности на площадке наблюдения однородно и, следовательно, для нее во всех точках значение приведенной интенсивности равно единице. Для данных картин возможные близкие друг к другу значения интенсивности получаются непосредственно на самой оси наблюдения ($x' = 0$), причем чем дальше плоскость наблюдения, тем значение интенсивности на оси наблюдения приближается к максимально возможному значению. Заметим также, что в картине Френеля распределение интенсивности на площадке наблюдения не является монотонной функцией.

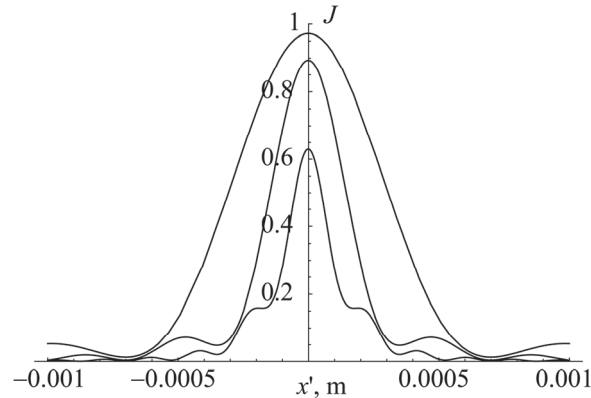


Рис.6. Зависимость приведенной интенсивности от координаты на площадке наблюдения для трех значений ее удаленности от дифракционной решетки.

6. Заключение

Таким образом, в данной работе мы исследовали задачу рассеяния плоской волны на одномерной дифракционной решетке в картине Френеля, которую обычно рассматривают в рамках приближении Фраунгофера. Мы показали, что предлагаемые в рамках данных приближений картины поля могут существенно отличаться.

ЛИТЕРАТУРА

1. **М. Борн, Э. Вольф.** Основы оптики, Москва: Наука, 1973.
2. **Г.С. Горелик.** Колебания и волны, Москва: Физматлит, 2007.
3. **W. Steurer, S. Deloudi.** Crystallography of Quasicrystals, Berlin: Springer, 2009.
4. **J.M. Vasiljevic, A. Zannotti, D.V. Timotijevic, C. Denz, D.M. Jovic.** Opt. Lett., **47**, 702 (2022).
5. **V.A. Tolmachev, E.V. Astrova, Yu.A. Pilyugina, T.S. Perova, R.A. Moore, J.K. Vij.** Optical Materials, **28**, 831 (2005).
6. **E. Yablonovitch.** Phys. Rev. Lett., **58**, 2059 (1987).
7. **А. Ярив, П. Юх.** Оптические волны в кристаллах, Москва: Наука, 1987.
8. **С.П. Палто, Л.М. Блинов, М.И. Барник и др.** Кристаллография, **56**, 667 (2011).
9. **И.В. Пейсахсон.** Оптический журнал, **64**, 53 (1997).
10. **C. Palmer.** Diffraction Grating Handbook, NY: Newport Corporation, 2014.
11. **Y. Lee, S.J. Kim, H. Park, B. Lee.** Sensors, **17**, 1726 (2017).
12. **M.P. Blanchard, A.H. Greenaway.** Applied Optics, **98**, 6692 (1999).
13. **V.A. Soifer, O. Korotkova, S.N. Khonina, E.A. Shchepakina.** Computer Optics, **40**, 605 (2016).
14. **J.M. Seifert, G.G. Hernandez-Cardoso, M. Koch, E. Castro-Camus.** Optics Express, **28**, 21737 (2020).
15. **A.G. Sedukhin, A.G. Poleshchuk.** Optics Communications, **407**, 217 (2018).
16. **В.П. Будак, Д.С. Ефременко, П.А. Смирнов.** Светотехника, **4**, 55 (2020).
17. **А.А. Ковалёв, В.В. Котляр.** Компьютерная оптика, **42**, 179 (2018).
18. **K.T. Selvan, R. Janaswamy.** IEEE Antennas and Propagation, **59**, 12 (2017).
19. **N. Stevanovic, V.M. Markovic, D. Nikezic.** Optics & Laser Technology, **90**, 90 (2017).
20. **P. Wang, Y. Xu, W. Wang, Zh. Wang.** JOSA, **15**, 684 (1998).
21. **S. Topuzoski.** Journal of Modern Optics, **66**, 1514 (2019).
22. **A.Zh. Khachatryan, Zh.R. Panosyan, Zh.B. Khachatryan.** Optik, **245**, 167682 (2021).
23. **Ч. Киттель.** Введение в физику твердого тела. Москва: Наука 1978.
24. **A.Zh. Khachatryan.** Armenian Journal of Physics, **14**, 201 (2021).
25. **A.Zh. Khachatryan.** Journal of Contemporary Physics, **56**, 313 (2021).

THE FRESNEL PICTURE OF SCATTERING OF A PLANE WAVE ON A DIFFRACTION GRATING

A.ZH. KHACHATRIAN, A.S. AVANESYAN,
V.N. AGHABEKYAN, A.F. PARSAMYAN

In this paper, we consider the problem of scattering of a plane wave by a diffraction grating in a Fresnel pattern, usually studied in the Fraunhofer approximation. It is shown that for an approximate description of the scattered field, it is necessary to introduce two wave parameters, namely, the wave parameter over the observation region and the wave parameter for the region where the sources are located. The intensity maxima of the diffracted field in the Fresnel pattern are obtained for the angles corresponding to the intensity maxima in the Fraunhofer pattern. It is shown that the field intensity on the side lobes of the diffraction pattern takes on the maximum possible value.