

## ВРЕМЯ КВАНТОВОГО ТУННЕЛИРОВАНИЯ УМЕРЕННО СИНГУЛЯРНОГО ПОТЕНЦИАЛА: МЕТОД РЕГУЛЯРИЗАЦИИ

А.Ж. МУРАДЯН\*

Ереванский государственный университет, Ереван, Армения

\*e-mail: muradyan@ysu.am

(Поступила в редакцию 17 марта 2022 г.)

В квантовой механике сингулярность потенциала как правило сперва удаляется, искомые величины вычисляются для регуляризованного потенциала, а затем в полученных выражениях делается обратный предельный переход. В настоящей работе метод регуляризации применяется в квантовом туннелировании потенциала степенного вида  $V(x) = V_0 / |x|^\alpha$ . Обратный предельный переход при этом оказывается возможным для диапазона степени  $0 < \alpha < 1$ . Вычислены время туннелирования и время отражения волнового пакета. Показано, что парадокс МакКолла-Хартмана, известный для обычных потенциальных барьеров, также справедлив для умеренно сингулярного потенциала. Представлена математическая структура неординарного формирования парадокса.

### 1. Введение

Сингулярные точки не входят в область определения потенциальной энергии [1–3]. В то же время квантовое туннелирование подразумевает переход через точку сингулярности. Поэтому нужно установить правила для осуществления этого перехода. Существуют два подхода к решению этой проблемы: метод регуляризации [4–7] и метод согласования волновой функции и ее производной по обе стороны от особой точки потенциала [8–11]. Первый из них, который и будет использован в настоящей работе, заменяет сингулярную форму на регулярную с обрезанной сингулярной частью, для которой обычными правилами квантовой механики вычисляются коэффициенты пропускания и отражения. Затем, уже в выражениях этих коэффициентов, производится обратный предельный переход, сужающий ширину усеченной части потенциала до нуля.

Обобщением сингулярного вида кулоновского потенциала является степенная функция  $V(x) = V_0 / |x|^\alpha$  [12,13], квантовое туннелирование через которой и будет рассмотрено в настоящей работе. Отметим, что аналогичная задача была рассмотрена нами в [13,14] методом согласования волновой функции по обе стороны от особой точки. Были получены нестандартные, нелогичные с физической точки зрения закономерности. Например, что вероятность туннелирования ненулевая в пределе нулевой энергии падающей на барьер частицы. Известно также (например, [15]), что одномерный потенциал степенного вида может быть полностью прозрачным для туннелирования при  $\alpha = 1$  и  $\alpha = 2$ , и это для

определенных значений мощности  $V_0$ .

В настоящей работе квантовое туннелирование сингулярного потенциала рассматривается методом регуляризации. Полученные здесь закономерности согласуются с обычными представлениями о квантовом туннелировании и, тем самым, радикально отличаются от ранее полученных методом сравнения решений с двух сторон особой точки. Также изучается проблема времени квантового туннельного. В последние годы этому уделяется особое внимание, камнем преткновения для которого является парадокс МакКолла-Хартмана, утверждающий насыщающую зависимость времени туннелирования от ширины потенциального барьера.

## 2. Формулировка задачи

Регуляризованный вариант потенциала  $V(x) = V_0 / |z|^\alpha$  выберем в виде

$$u(z) = \left( \frac{u_0}{(|z| + \xi)^\alpha} - \frac{u_0}{(z_0 + \xi)^\alpha} \right) \theta(z_0 - |z|), \quad (1)$$

где координата  $z$  и «мощность» потенциала  $u_0$  нормированы на произвольную длину  $L$  и на «энергию отдачи»  $E_{\text{rec}} = \hbar^2 / 2mL^2$  соответственно,  $\theta(z_0 - |z|)$  – единичная функция Хевисайда,  $z_0 \gg 1$  и  $\xi \ll 1$ . Потенциал (1) простирается в широком диапазоне  $[-z_0, z_0]$  и восстанавливает сингулярность в начале координат путем предельного перехода  $\xi \rightarrow 0$ .

Область определения функции (1) разделим на четыре части, нумеруя латинскими цифрами I, ..., IV (Рис.1). В краевых областях I и IV частица свободна, а стационарные волновые функции записываются в стандартной форме

$$\psi_I(z) = e^{i\sqrt{\varepsilon}z} + r e^{-i\sqrt{\varepsilon}z}, \quad (2)$$

$$\psi_{IV}(z) = t e^{i\sqrt{\varepsilon}z}, \quad (3)$$

где  $r$  и  $t$  – коэффициенты отражения и прохождения соответственно. Энергия стационарного состояния  $\varepsilon$  нормирована на энергию  $E_{\text{rec}}$ .

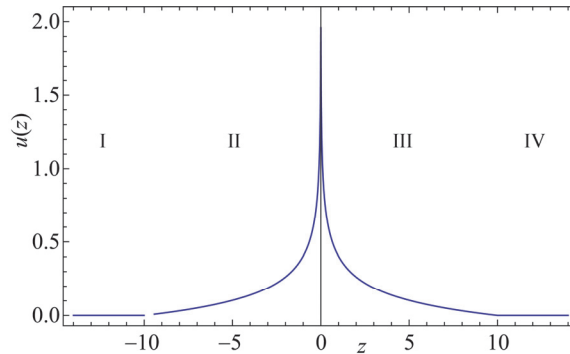


Рис.1. Вид регуляризованного потенциала (1) ( $u_0 = 1$ ,  $\alpha = 0.2$ ,  $z_0 = 10$ ,  $\xi = 0.01$ ).

В области  $\Pi$  ( $-z_0 \leq z \leq 0$ ) стационарное уравнение Шредингера имеет вид

$$\frac{d^2 \psi(z)}{dz^2} + \left( \varepsilon - \left( \frac{u_0}{(-z + \xi)^\alpha} - \frac{u_0}{(z_0 + \xi)^\alpha} \right) \right) \psi(z) = 0. \quad (4)$$

Оно для произвольного значения степени  $\alpha$  не имеет точного аналитического решения (частные случаи  $\alpha = 1$  и  $\alpha = 2$ , когда таковые имеются, будут рассмотрены в отдельном сообщении). Приближенное решение ищем в виде произведения двух функций,

$$\psi(z) = f(z)w(z), \quad (5)$$

требуя, чтобы первая удовлетворяла некоторому частичному уравнению, полученному из (4) после подстановки (5), а именно, уравнению

$$\frac{d^2 f(z)}{dz^2} - \frac{u_0}{(-z + \xi)^\alpha} f(z) = 0. \quad (6)$$

Оно точно решается и линейно независимые решения могут быть записаны в виде

$$f_1(z) = \left( \frac{1}{2 - \alpha} \right)^{\frac{1}{2 - \alpha}} \Gamma\left( \frac{1 - \alpha}{2 - \alpha} \right) u_0^{\frac{1}{2(2 - \alpha)}} \sqrt{-z + \xi} I_{-1/(2 - \alpha)} \left( \frac{2\sqrt{u_0}}{2 - \alpha} (-z + \xi)^{\frac{2 - \alpha}{2}} \right), \quad (7)$$

$$f_2(z) = \left( \frac{-1}{2 - \alpha} \right)^{\frac{1}{2 - \alpha}} \Gamma\left( \frac{3 - \alpha}{2 - \alpha} \right) u_0^{\frac{1}{2(2 - \alpha)}} \sqrt{-z + \xi} I_{1/(2 - \alpha)} \left( \frac{2\sqrt{u_0}}{2 - \alpha} (-z + \xi)^{\frac{2 - \alpha}{2}} \right), \quad (8)$$

где  $\Gamma(\cdot)$  – гамма функция,  $I_\nu(\cdot)$  – модифицированная функция Бесселя. Заметим, что выражения (7), (8) не применимы в вышеуказанных частных случаях  $\alpha = 1$  и  $\alpha = 2$ .

Подстановка (5) в (4) с учетом (6) для фактор-функции  $w(z)$  приводит к уравнению

$$\frac{d^2 w(\bar{z})}{d\bar{z}^2} + 2\mu(\bar{z})w(\bar{z}) + \varepsilon w(\bar{z}) = 0, \quad (9)$$

где  $\bar{z} = -z + \xi$ ,  $\mu(\bar{z}) = f^{-1}(\bar{z})f'(\bar{z})$ . Для поиска удовлетворительного для рассматриваемой задачи решения уравнения (9) следует выяснить поведение функции  $\mu(\bar{z})$  во всей области переменной  $\bar{z}$ , а также иметь ввиду, что выражения (7) и (8) корректно представляют решения уравнения Шредингера (4) в области малых значений переменной  $\bar{z}$ , т.е., в окрестности точки сингулярности  $z = 0$ .

Ход функции  $\mu(\bar{z})$  для функции  $f_1(z)$  представлен на Рис.2. В области малых значений аргумента, слева от точки максимума, функция меняется быстро, но поскольку она идет к нулю, конкретный вид спада имеет малое значение для общего решения  $\psi(z)$ . Поэтому основное требование к приближительной искомым форме  $\mu(\bar{z})$  исходит из области умеренных и больших значений аргумента,

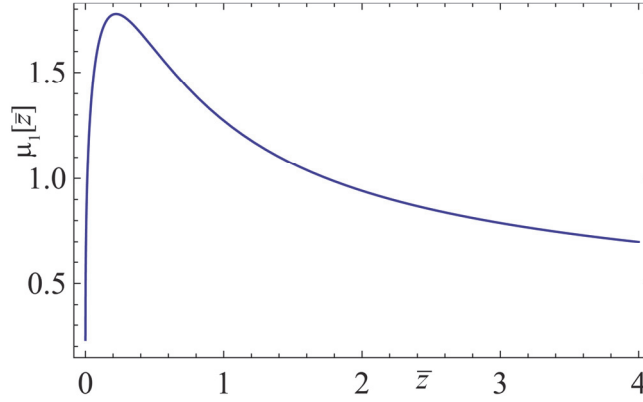


Рис.2. Коэффициент-функция  $\mu(\bar{z})$  уравнения (9) при  $f(z) = f_1(z)$  ( $u_0 = 1$ ,  $\alpha = 0.7$ ).

т.е. из правой от максимума части. А там  $\mu(\bar{z})$  меняется медленно, точнее, падает по медленному закону  $\mu(\bar{z}) \approx u_0 / \bar{z}^{\alpha/2}$ . Это дает нам основание при решении (9) считать  $\mu_1$  постоянным, а после решения эту постоянную заменить на его точный вид  $\mu(\bar{z})$ .

Ход функции  $\mu(\bar{z})$  для второго решения  $f_2(z)$  представлен на Рис.3. В этом случае быстрые изменения также происходят в области малых значений аргумента, но в отличие от предыдущего случая, функция стремится к бесконечности. Хотя в дальнейшем, для умеренных и больших  $\bar{z}$ , функция  $\mu_2(\bar{z})$  медленно падает, его использования в виде общего решения становится проблематичным. Поэтому для решения уравнения (9) мы выбираем  $\mu(\bar{z}) = \mu_1(\bar{z})$ . В результате общее решение записывается в виде

$$\begin{aligned} \psi_{II}(z) \approx & \sqrt{-z + \xi} I_{-1/(2-\alpha)} \left( \frac{2\sqrt{u_0}}{2-\alpha} (-z + \xi)^{\frac{2-\alpha}{2}} \right) \\ & \times \left\{ a_2 \exp \left[ \left( -\mu_{II}(z) - i\sqrt{\varepsilon - \mu_{II}^2(z)} \right) (-z + \xi) \right] \right. \\ & \left. + b_2 \exp \left[ \left( -\mu_{II}(z) + i\sqrt{\varepsilon - \mu_{II}^2(z)} \right) (-z + \xi) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (10)$$

где  $a_2$  и  $b_2$  – неизвестные постоянные.

Полученное приближенное решение (10) из-за неприменимости выражения (7) в области больших  $z$  следует проверить на асимптотическое поведение. Простой анализ показывает, что амплитуда (10) в асимптотике растет по закону

$$(-z + \xi)^{\frac{\alpha}{4}} \exp \left[ \frac{\alpha\sqrt{u_0}}{2-\alpha} (-z + \xi)^{\frac{2-\alpha}{2}} \right],$$

причем все это дополнительно требует выполнение условия  $\alpha < 1$ . Чтобы уточнить формулу (10) и обеспечить постоянную амплитуду в асимптотике больших

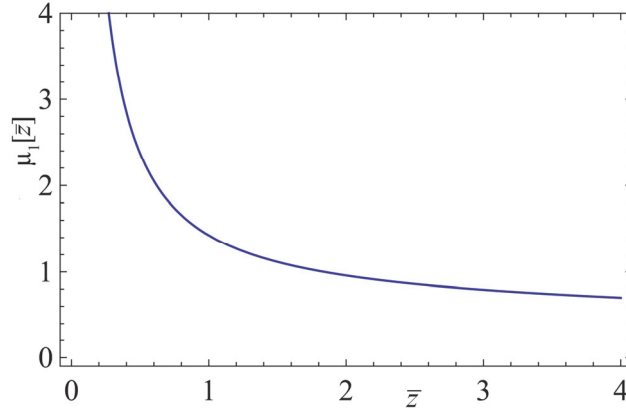


Рис.3. Коэффициент-функция  $\mu(\bar{z})$  уравнения (9) при  $f(z) = f_2(z)$  (значения параметров те же, что и на Рис.1).

$\bar{z}$ , ее следует умножить на обратную функцию роста, представленную выше. В результате приближенное решение уравнения (4), содержащее все основные количественные характеристики точного решения, принимает вид

$$\begin{aligned} \psi_{II}(z) = & \sqrt{-z + \xi} (1 - z + \xi)^{-\frac{\alpha}{4}} I_{-\frac{1}{2-\alpha}} \left( \frac{2\sqrt{u_0}}{2-\alpha} (-z + \xi)^{\frac{2-\alpha}{2}} \right) \\ & \times \exp \left[ \left( -\mu_{II}(z) - \frac{\alpha\sqrt{u_0}}{2-\alpha} (-z + \xi)^{-\frac{\alpha}{2}} \right) (-z + \xi) \right] \\ & \times \left\{ a_2 \exp \left[ \left( i\sqrt{\varepsilon - \mu_{II}^2(z)} \right) (-z + \xi) \right] + b_2 \exp \left[ \left( -i\sqrt{\varepsilon - \mu_{II}^2(z)} \right) (-z + \xi) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (11)$$

Уравнение Шредингера в области III ( $0 \leq z \leq z_0$ ) получается из (3) заменой  $-z \rightarrow z$ . Поэтому все вышеприведённые рассуждения о принятых приближениях сохраняют свою силу и общее решение в правосторонней области потенциала записывается в виде

$$\begin{aligned} \psi_{III}(z) = & \sqrt{z + \xi} (1 + z + \xi)^{-\frac{\alpha}{4}} I_{-\frac{1}{2-\alpha}} \left( \frac{2\sqrt{u_0}}{2-\alpha} (z + \xi)^{\frac{2-\alpha}{2}} \right) \\ & \times \exp \left[ \left( -\mu_{III}(z) - \frac{\alpha\sqrt{u_0}}{2-\alpha} (z + \xi)^{-\frac{\alpha}{2}} \right) (z + \xi) \right] \\ & \times \left\{ a_3 \exp \left[ \left( i\sqrt{\varepsilon - \mu_{III}^2(z)} \right) (z + \xi) \right] + b_3 \exp \left[ \left( -i\sqrt{\varepsilon - \mu_{III}^2(z)} \right) (z + \xi) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (12)$$

где  $a_3$  и  $b_3$  – новые неизвестные постоянные.

На дальних крилях потенциальной кривой решения (11) и (12), подобно синусоидальной функции свободного движения, колеблется с постоянной амплитудой.

### 3. Квантовая проницаемость потенциального барьера

Волновая функция частицы и ее производная для регуляризованного потенциала непрерывны и конечны во всем диапазоне определения. Для завершения решения обратимся к стандартным условиям сшивания в граничных точках  $z = -z_0$ ,  $z = 0$  и  $z = z_0$ . Они дают шесть линейных уравнений относительно шести неизвестных коэффициентов, включая искомые коэффициенты прохождения  $t$  и отражения  $r$ , которые легко решаются с помощью вычислительного пакета Mathematica. Их выражения слишком громоздки, чтобы их воспроизвести в тексте статьи.

Численные расчеты со сколь угодно малым конечным значением  $\xi > 0$  показывают стандартные зависимости от параметров потенциала и туннелирующей частицы. В связи с этим заметим, что условие единичной вероятности  $|t|^2 + |r|^2 = 1$  (при  $0 < \alpha < 1$ ) выполняется точно для произвольных значений энергии частиц  $\varepsilon$ , но резко теряет легитимность для относительно высоких значений «мощности» потенциала  $u_0$ , начиная с  $u_0 \approx 4$ .

После восстановления сингулярности потенциальной энергии предельным переходом  $\xi \rightarrow 0$  коэффициент квантового туннелирования равняется нулю: умеренно сингулярный потенциал непроницаем в методе регуляризации.

### 4. Групповое время задержки квантового туннелирования

Другим важным аспектом рассматриваемой проблемы, мало изученным особенно экспериментально, является время квантового туннелирования [13,16–19]. Это связано не только с тем, что время в формализме квантовой механики не является динамической переменной, но и с существованием парадокса МакКолла-Хартмана [20,21]. Согласно последнему, время подбарьерного туннелирования волнового пакета, представляющего движение частицы, постепенно замедляет рост в зависимости от ширины барьера, а в пределе широких барьеров оно вовсе перестает расти, как это показано на Рис.4.

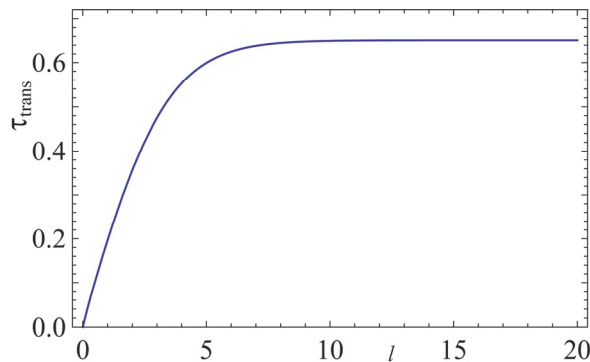


Рис.4. Время подбарьерного туннелирования в зависимости от ширины барьера. График имеет иллюстративную цель и построен для прямоугольного потенциала. Высота барьера  $u_0 = 1$  и энергия частицы  $\varepsilon = 0.85$  нормированы на энергию отдачи  $E_{rec}$ , а время туннелирования – на  $\hbar / E_{rec}$ .

Для вычисления времени туннелирования выберем метод стационарной фазы. Он определяет момент времени, когда максимум волнового пакета частицы покидает потенциальную область относительно момента входа в потенциал, и тем самым вводит понятие групповой скорости волнового пакета частицы. Это время, наиболее непосредственно связанное с классическим смыслом времени прохождения частицей области потенциала, также использовался в работах Мак-Колла и Хартмана.

Входной точкой потенциала является точка  $z_{in} = -z_0$ . Стационарная волновая функция частицы в области  $I$  имеет фазу  $\sqrt{\varepsilon} z - \varepsilon t$ . Следим за нулевым значением этой фазы, приписывая ее к спектральному максимуму волнового пакета. Пространственное распределение начального волнового пакета выберем в виде

$$\psi(z, \tau = 0) = A \sin\left(\frac{z + z_0}{b}\right) \exp(i p_0 z), \quad -z_0 \leq z \leq -z_0 + \pi b, \quad (13)$$

где  $A$  – нормировочный коэффициент,  $b$  и  $p_0$  – начальная протяженность и средний импульс волнового пакета соответственно.

Движение максимума волнового пакета к точке  $z = -z_0$  определяется производной по энергии условия  $\sqrt{\varepsilon} z - \varepsilon \tau = 0$ , то есть уравнением  $z / 2\sqrt{\varepsilon} - \tau = 0$ . Из этого непосредственно следует выражение

$$\tau_{in} = -\frac{z_0}{2\sqrt{\varepsilon}}, \quad (14)$$

которое определяет момент входа максимума волнового пакета в точку  $z = -z_0$ .

Групповая скорость при этом равна  $v_{group} = 2\sqrt{\varepsilon}$ , а  $\varepsilon \approx p_0^2$ .

За потенциальным барьером, в области  $IV$ , волновая функция частицы имеет вид (3). Факторизуя фазовую часть коэффициента прохождения соотношением  $t = |t| \exp(i\phi(\varepsilon))$ , условие стационарной фазы (нулевое значение производной фазы волны при значении  $\varepsilon \approx p_0^2$ ) записывается в виде  $d(\phi(\varepsilon) + \sqrt{\varepsilon} z - \varepsilon \tau) / d\varepsilon = 0$ , откуда для момента выхода максимума волнового пакета из точки  $z = z_0$  следует выражение

$$\tau_{out} = \frac{z_0}{2\sqrt{\varepsilon}} + \frac{d\phi(\varepsilon)}{d\varepsilon}. \quad (15)$$

В результате искомое время прохождения потенциальной области в подходе стационарной фазы, как разность моментов (15) и (14), определяется формулой

$$\tau_{group} = \frac{z_0}{\sqrt{\varepsilon}} + \frac{d\phi(\varepsilon)}{d\varepsilon}. \quad (16)$$

Численные расчеты этой времени проведены стандартным пакетом Mathematica. Замечательно, что  $\tau_{group}$  имеет конечное значение в пределе вос-

становления сингулярности потенциальной энергии для всех значений параметров задачи, допускаемых моделью. Оно монотонно падает в зависимости от энергии частицы  $\varepsilon$  и практически безразличен к граничному значению координаты  $z_0$ .

Повышенный интерес представляют время подбарьерного туннелирования потенциального барьера, поскольку парадокс МакКолла-Хартмана относится именно к этому режиму. Входная и выходная точки подбарьерного туннелирования определяются из условия  $u(z) = \varepsilon$  и даются равенством  $z_{out} = -z_{in} = (u_0 / \varepsilon)^{1/\alpha}$ . Ширина подбарьерной области управляется параметром  $u_0$  при сохранении  $\varepsilon$  и  $\alpha$  фиксированными. График искомой зависимости представлен на Рис. 5. Парадоксу МакКолла-Хартмана соответствует горизонтальный участок графика. В отличие от стандартной ситуации с прямоугольным барьером, в рассматриваемом случае умеренно сингулярного потенциала область насыщения имеет конечную длину, после чего время туннелирования снова монотонно растет вместе с шириной подбарьерной области.

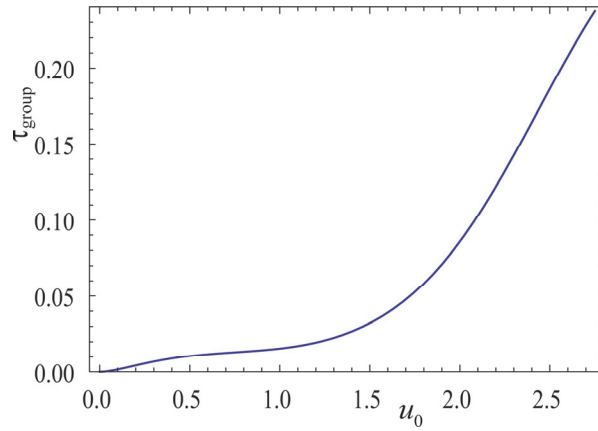


Рис.5. Время подбарьерного туннелирования умеренно сингулярного потенциала в зависимости от ширины подбарьерной области  $d = z_{out} - z_{in} = 2(u_0 / \varepsilon)^{1/\alpha}$ . Изменение  $d$  осуществляется изменением  $u_0$  при фиксированных значениях  $\varepsilon$  и  $\alpha$  ( $\alpha = 0.7$ ,  $z_0 = 4.8\pi$ ,  $\varepsilon = 10$ ).

Разберемся, как же формируется такой «контринтуитивный» характер времени туннелирования. Для этого обратимся к подходу [22], где объяснение парадоксу дано в случае туннелирования прямоугольного потенциала. Анализ ситуации начинается с отслеживания эволюции самой фазы волны. Для этого стационарная волновая функция области потенциала разлагается в интеграл Фурье по волновым числам  $q$ :

$$\psi_{\varepsilon}(-z_0 \leq z \leq z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{\varepsilon}(q) \exp(iqz) dq. \quad (17)$$

Это семейство монохроматических волн  $\exp(iqz - i\varepsilon\tau)$  со всеми возможными

волновыми числами  $q$  и единой энергией  $\varepsilon$ . Для каждой из них время прохождения нулевой фазы  $qz - \varepsilon\tau = 0$  от начальной точки  $z_{in} = -z_0$  до конечной точки  $z_{out} = z_0$  определяется последовательностью равенств

$$\tau_{\text{phase}} = \tau_{\text{out}} - \tau_{\text{in}} = \frac{q}{\varepsilon}(z_{\text{out}} - z_{\text{in}}) = \frac{2z_0}{\varepsilon}q. \quad (18)$$

Согласно последнему, волны с положительными волновыми числами (сонаправленные с волной, падающей на барьер) имеют положительное фазовое время прохождения барьера, а волны с отрицательными волновыми числами – отрицательное время. Время, образованное назад распространяющимися волнами, вычитается из времени, формируемого вперед распространяющимися волнами. Итоговый результат, формируемый как время туннелирования, определяется соотношением «мощностей» положительной и отрицательной составляющих частей спектра волновых векторов (Рис.6). Это и обуславливает насыщаемый характер фазового времени туннелирования [22].

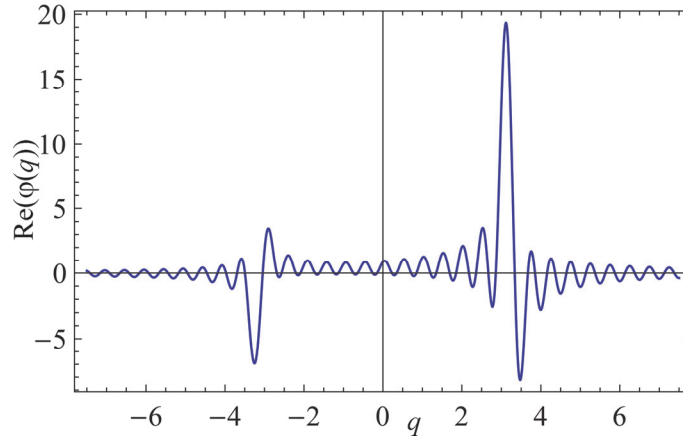


Рис.6. Реальная часть распределения стационарной волновой функции туннелирующей частицы по волновому числу  $q$ . Мнимая часть также асимметрична в пользу положительных  $q$ . Параметры те же, что и на Рис.5. С ростом энергии падения частицы на барьер расстояние между пиками распределения монотонно увеличивается, левостороннее распределение ослабевает, а правостороннее усиливается.

Указанный механизм действует также в рассматриваемом случае регулярized сингулярного потенциала.

Условие определения времени групповой задержки (16), являющееся производной по энергии условия определения фазового времени туннелирования, сохраняет все свойства последнего и приводит к парадоксу, впервые отмеченному МакКоллом и впоследствии количественно проанализированному Хартманом.

Групповое время задержки отражения волнового пакета от потенциального барьера определяется по той же схеме, что и групповое время задержки туннелирования с естественной заменой  $te^{i\sqrt{\varepsilon}z}$  на  $re^{-i\sqrt{\varepsilon}z}$  и с учетом того факта, что

как входной, так и выходной точкой волнового пакета является точка  $z = -z_0$ . Проведенные численные расчеты подтверждают известный для регулярных потенциалов результат о равенстве этих двух времен.

## 5. Заключение

Рассмотрено квантовое туннелирование умеренно-сингулярного потенциала по методу регуляризации. Коэффициенты прохождения и отражения, групповое время прохождения области потенциала и время отражения от потенциала рассчитаны в рамках определенного аналитического приближения. Полученные закономерности в некоторой степени напоминают результаты, полученные ранее для прямоугольного потенциала, но область насыщения времени подбарьерного туннелирования в зависимости от ширины потенциального барьера (парадокс МакКолла-Хартмана) имеет конечную длину. Объяснение данного контринтуитивного поведения времени туннелирования дано исходя из структуры спектра волновых чисел волновой функции частицы.

Работа выполнена при финансовой поддержке Комитета по науке МОНКС РА в рамках Лаборатории исследования и моделирования квантовых явлений ЕГУ.

## ЛИТЕРАТУРА

1. **K.M. Case.** Phys. Rev., **80**, 797 (1950).
2. **K. Meetz.** Nuovo Cimento, **34**, 690 (1964).
3. **W.M. Frank, D.J. Land, R.M. Spector.** Rev. Mod. Phys., **43**, 36 (1971).
4. **R. Loudon.** Am. J. Phys., **27**, 649 (1959).
5. **L.K. Haines, D.H. Roberts.** Am. J. Phys., **37**, 1145 (1969).
6. **R. Loudon.** Proc. Roy. Soc. A, **472**, 20150534 (2016).
7. **G.A. Muradyan.** J. Contemp. Phys., **54**, 333 (2019).
8. **W. Fisher, H. Laschke, P. Muller.** J. Math. Phys., **36**, 2313 (1995).
9. **D.M. Gitman, I.V. Tyutin, B.L. Voronov.** Self-adjoint extensions in quantum mechanics, Birkhouser, 2012.
10. **B. Simon.** J. Math. Phys., **41**, 3523 (2000).
11. **I. Tsutsui, T. Fulop, T. Cheon.** J. Phys. A, **36**, 275 (2003).
12. **M.V. Andrews.** Am. J. Phys., **44**, 1064 (1976).
13. **A.Zh. Muradyan.** J. Contemp. Phys., **56**, 91 (2021).
14. **A. Muradyan, G. Muradyan.** arXiv:2008.12957 (2020).
15. **S.P. Maydanyuk.** Ann. Phys., **316**, 440 (2005).
16. **J.T. Cushing.** Found. Phys., **25**, 269 (1995).
17. **R. Ramos, D. Spierings, I. Racicot, A.M. Steinberg.** Nature, **583**, 529 (2020).
18. **S. Yusofsani, M. Kolesik.** Phys. Rev. A, **101**, 052121 (2020).
19. **C. Hofmann, A. Bray, W. Koch, H. Ni, N.I. Shvetsov-Shilovski.** Eur.Phys. J. D, **75**, 208 (2021).

20. **L.A. MacColl.** Phys. Rev., **40**, 621 (1932).
21. **T.E. Hartman.** J. Appl. Phys., **33**, 3427 (1962).
22. **A.Zh. Muradyan, G. Muradyan.** arXiv:2108.03054 (2021).

ՉԱՓԱՎՈՐ-ԵԶԱԿԻ ՊՈՏԵՆՑԻԱԼԻ ՔՎԱՆՏԱՅԻՆ ԹՈՒՆԵԼԱՑՄԱՆ  
ԺԱՄԱՆԱԿԸ. ԿԱՆՈՆԱՎՈՐՄԱՆ ՄԵԹՈԴ

Ա.Ժ. ՄՈՒՐԱԴՅԱՆ

Քվանտային մեխանիկայում, որպես կանոն, պոտենցիալի եզակիությունը նախ հեռացվում է, պահանջվող մեծությունները հաշվարկվում են այս կանոնավորված պոտենցիալի համար, ապա ստացված արտահայտություններում կատարվում է հակադարձ սահմանային անցում: Սույն աշխատանքում կանոնավորման մեթոդը կիրառվում է  $V(x) = V_0 / |x|^\alpha$  աստիճանային տեսքի պոտենցիալի համար, որի պայմաններում հակադարձ սահմանային անցումը հնարավոր է լինում աստիճանի  $0 < \alpha < 1$  միջակայքում: Հաշվված են ալիքային փաթեթի թունելացման և անդրադարձման ժամանակները: Ցույց է տրված, որ սովորական պոտենցիալների համար հայտի ՄաքՔոլլի-Հարթմանի պարադոքսը գոյություն ունի նաև չափավոր եզակի պոտենցիալի համար: Ներկայացված է պարադոքսի անսովոր ձևավորման մաթեմատիկական կառուցվածքը:

QUANTUM TUNNELING TIME OF A MODERATELY SINGULAR  
POTENTIAL: REGULARIZATION METHOD

A.Zh. MURADYAN

In quantum mechanics, the singularity of the potential is usually first removed, the desired values are calculated for the regularized potential, and then an inverse limit transition is made in the resulting expressions. In this paper, the regularization method is used in quantum tunneling of a power – law potential of the form  $V(x) = V_0 / |x|^\alpha$ . The reverse limit transition is possible for the range of power  $0 < \alpha < 1$ . The tunneling time and the reflection time of the wave packet are calculated. It is shown that the McCall-Hartman paradox, well-known for ordinary potential barriers, is also valid for the moderately singular potential. The mathematical structure of the extraordinary formation of paradox is presented.