

## ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

УДК 539.3

DOI: 10.54503/0321-1339-2022.122.2-153

В. Т. Япуджян

### О вынужденных колебаниях анизотропной полосы с учетом кулонова трения

(Представлено академиком Л. А. Агаляном 10/IV 2022)

**Ключевые слова:** плоская деформация, упругая симметрия, кулоново трение, вынужденные колебания.

**Введение.** При решении статических и динамических задач теории упругости для тонких тел успешно используется асимптотический метод решения сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений. Метод оказался особенно эффективным для решения смешанных краевых задач тонких тел. Установлена принципиально новая асимптотика для компонент тензора напряжений и вектора перемещения [1]. Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек построена в [2], где приведены решения отдельных классов статических и динамических задач. В данной работе получено решение задачи о вынужденных колебаниях анизотропной полосы, которая обладает общей анизотропией в своей плоскости.

**Постановка задачи и основные уравнения.** Рассматриваются вынужденные колебания находящейся в условиях плоской деформации анизотропной полосы  $D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq l, -h \leq y \leq h, h \ll l\}$  (рис. 1).

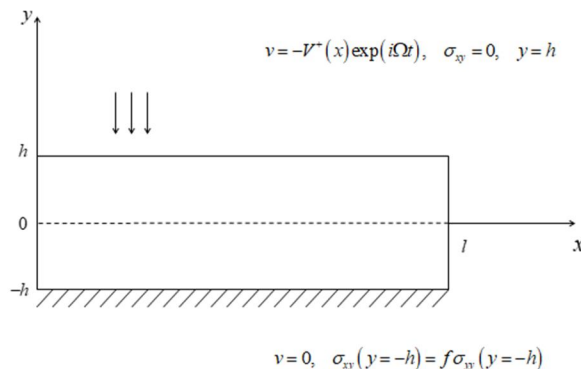


Рис. 1

Считается, что полоса свободно лежит на жесткой подстилке и верхней кромке полосы сообщено нормальное перемещение, которое изменяется во времени гармонически. Учитывается кулоново трение между полосой и абсолютно жестким основанием. Требуется найти решение уравнений движения плоской деформации анизотропного тела, имеющего плоскость упругой симметрии:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}; \quad \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}. \quad (1)$$

При соотношениях упругости [3, 4]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \beta_{11}\sigma_{xx} + \beta_{12}\sigma_{yy} + \beta_{16}\sigma_{xy}; & \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x}; \\ \varepsilon_{yy} &= \beta_{12}\sigma_{xx} + \beta_{22}\sigma_{yy} + \beta_{26}\sigma_{xy}; & \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y}; \\ \varepsilon_{xy} &= \beta_{16}\sigma_{xx} + \beta_{26}\sigma_{yy} + a_{66}\sigma_{xy}; & \varepsilon_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $\beta_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{i3}a_{j3}}{a_{33}}$ ;  $i, j = 1, 2, 6$ ,  $a_{ij}$  – постоянные упругости, и при граничных условиях:

$$\begin{aligned} v(y=h) &= -V^+(x) \exp(i\Omega t); & \sigma_{xy}(y=h) &= 0; \\ v(y=-h) &= 0; & \sigma_{xy}(y=-h) &= f\sigma_{yy}(y=-h). \end{aligned} \quad (3)$$

Граничные условия при  $x = 0, l$  не конкретизируем, ими обусловлено появление пограничного слоя, что можно рассматривать отдельно [2].

**Асимптотическое решение задачи** будем искать в виде

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}(x, y, t) &= \sigma_{11}(x, y) \exp(i\Omega t); & (x, y: 1, 2); \\ \sigma_{xy}(x, y, t) &= \sigma_{12}(x, y) \exp(i\Omega t); \\ u(x, y, t) &= u_x(x, y) \exp(i\Omega t); & v(x, y, t) = u_y(x, y) \exp(i\Omega t). \end{aligned} \quad (4)$$

Подставив (4) в уравнения (1) и (2) и перейдя к безразмерным координатам и перемещениям:  $x = l\xi$ ;  $y = h\zeta$ ;  $U = \frac{u_x}{l}$ ;  $V = \frac{u_y}{l}$ , получим систему

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial \xi} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial \zeta} + \varepsilon^{-2} \Omega_*^2 U = 0, \quad \Omega_*^2 = \rho h^2 \Omega^2, \quad \varepsilon = \frac{h}{l};$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial \xi} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial \zeta} + \varepsilon^{-2} \Omega_*^2 V = 0; \\
& \frac{\partial U}{\partial \xi} = \beta_{11} \sigma_{11} + \beta_{12} \sigma_{22} + \beta_{16} \sigma_{12}; \quad \varepsilon^{-1} \frac{\partial V}{\partial \zeta} = \beta_{12} \sigma_{11} + \beta_{22} \sigma_{22} + \beta_{26} \sigma_{12}; \\
& \varepsilon^{-1} \frac{\partial U}{\partial \zeta} + \frac{\partial V}{\partial \xi} = \beta_{16} \sigma_{11} + \beta_{26} \sigma_{22} + \beta_{66} \sigma_{12}.
\end{aligned} \tag{5}$$

Решение сингулярно возмущенной системы (5) складывается из решений внешней задачи ( $I^{out}$ ) и пограничного слоя ( $I^b$ ) (в русскоязычных публикациях вместо ( $I^{out}$ ) принимается ( $I^{int}$ ), т.е. подчеркивается, что решение справедливо во внутренней области полосы)

$$I = I^{out} + I_b. \tag{6}$$

Решение внешней задачи будем искать в виде [2]

$$I^{out} = \varepsilon^{q_i+s} I^{(s)}, \quad s = \overline{0, N}, \tag{7}$$

где  $q_i = -1$  для  $\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{22}$ ,  $q_i = 0$  для  $U, V$ ,  $s = \overline{0, N}$  означает, что в (7) по немому (повторяющемуся) индексу  $s$  происходит суммирование по целочисленным значениям  $s$  от нуля до числа приближений  $N$ . Подставив (7) в систему (5) и приравняв в каждом уравнении соответствующие коэффициенты, при  $\varepsilon$  получим новую систему, откуда напряжения можно выразить через перемещения  $U^{(s)}$  и  $V^{(s)}$ :

$$\begin{aligned}
\sigma_{11}^{(s)} &= \frac{1}{\Delta} \left[ \alpha_1 \frac{\partial U^{(s)}}{\partial \zeta} + \alpha_2 \frac{\partial V^{(s)}}{\partial \zeta} \right] + \frac{\gamma_1^{(s-1)}}{\Delta}; \quad \sigma_{22}^{(s)} = \frac{1}{\Delta} \left[ \alpha_3 \frac{\partial U^{(s)}}{\partial \zeta} + \alpha_4 \frac{\partial V^{(s)}}{\partial \zeta} \right] + \frac{\gamma_2^{(s-1)}}{\Delta}; \\
\sigma_{12}^{(s)} &= \frac{1}{\Delta} \left[ \alpha_5 \frac{\partial U^{(s)}}{\partial \zeta} + \alpha_3 \frac{\partial V^{(s)}}{\partial \zeta} \right] + \frac{\gamma_3^{(s-1)}}{\Delta}; \quad \Delta = \beta_{12} \alpha_2 + \beta_{26} \alpha_3 + \beta_{22} \alpha_4; \\
\alpha_1 &= (\beta_{12} \beta_{26} - \beta_{16} \beta_{22}); \quad \alpha_2 = (\beta_{16} \beta_{26} - \beta_{12} \beta_{66}); \quad \alpha_3 = (\beta_{12} \beta_{16} - \beta_{11} \beta_{26}); \\
\alpha_4 &= (\beta_{11} \beta_{66} - \beta_{16}^2); \quad \alpha_5 = (\beta_{11} \beta_{22} - \beta_{12}^2); \\
\gamma_1^{(s-1)} &= (\beta_{22} \beta_{66} - \beta_{26}^2) \frac{\partial U^{(s-1)}}{\partial \xi} + \alpha_1 \frac{\partial V^{(s-1)}}{\partial \xi}; \quad \gamma_2^{(s-1)} = \alpha_2 \frac{\partial U^{(s-1)}}{\partial \xi} + \alpha_3 \frac{\partial V^{(s-1)}}{\partial \xi}; \\
\gamma_3^{(s-1)} &= \alpha_1 \frac{\partial U^{(s-1)}}{\partial \xi} + \alpha_5 \frac{\partial V^{(s-1)}}{\partial \xi},
\end{aligned} \tag{8}$$

а для определения  $U^{(s)}, V^{(s)}$  получим уравнения:

$$\begin{aligned}\alpha_5 \frac{\partial^2 U^{(s)}}{\partial \zeta^2} + \alpha_3 \frac{\partial^2 V^{(s)}}{\partial \zeta^2} + \Omega_*^2 \Delta U^{(s)} &= \gamma_{11}^{(s-1)}; \quad \gamma_{11}^{(s-1)} = -\Delta \frac{\partial \sigma_{11}^{(s-1)}}{\partial \xi} - \frac{\partial \gamma_3^{(s-1)}}{\partial \zeta}; \\ \alpha_3 \frac{\partial^2 U^{(s)}}{\partial \zeta^2} + \alpha_4 \frac{\partial^2 V^{(s)}}{\partial \zeta^2} + \Omega_*^2 \Delta V^{(s)} &= \gamma_{22}^{(s-1)}; \quad \gamma_{22}^{(s-1)} = -\Delta \frac{\partial \sigma_{12}^{(s-1)}}{\partial \xi} - \frac{\partial \gamma_2^{(s-1)}}{\partial \zeta}.\end{aligned}\quad (9)$$

Для ортотропной полосы, учитывая, что  $\beta_6 = \beta_{26} = 0$ , имеем  $\alpha_3 = 0$ . В результате уравнения для  $U^{(s)}$  и  $V^{(s)}$  разделяются и им соответствуют сдвиговые и продольные колебания, которые при  $s = 0$  независимы. В случае общей анизотропии, как следует из (9), такого разделения нет. Из системы (9) после некоторых преобразований  $V^{(s)}$  можно выразить через  $U^{(s)}$  по формуле

$$\begin{aligned}V^{(s)} &= \frac{b}{\alpha_3 a} \frac{\partial^2 U^{(s)}}{\partial \zeta^2} + \frac{\alpha_4}{\alpha_3} U^{(s)} + \frac{1}{a} \gamma_{22}^{(s-1)} - \frac{\alpha_4}{\alpha_3 a} \gamma_{11}^{(s-1)}; \\ a &= \Omega_*^2 \Delta; \quad b = (\alpha_4 \alpha_5 - \alpha_3^2),\end{aligned}\quad (10)$$

а для определения  $U^{(s)}$  получим уравнение

$$\begin{aligned}\frac{\partial^4 U^{(s)}}{\partial \zeta^4} + \frac{ac}{b} \frac{\partial^2 U^{(s)}}{\partial \zeta^2} + \frac{a^2}{b} U^{(s)} &= \gamma^{(s-1)}; \\ c &= (\alpha_4 + \alpha_5); \quad \gamma^{(s-1)} = \frac{(\alpha_4 - \alpha_3)}{b} \frac{\partial^2 \gamma_{11}^{(s-1)}}{\partial \zeta^2} + \frac{a}{b} \gamma_{11}^{(s-1)}.\end{aligned}\quad (11)$$

Решением уравнения (11) будет

$$U^{(s)} = U_0^{(s)}(\xi, \zeta) + U_u^{(s-1)}(\xi, \zeta), \quad (12)$$

где  $U_0^{(s)}$  – решение однородного, а  $U_u^{(s-1)}$  – частное решение неоднородного уравнения (11).

Согласно формулам (8), (10), (11)  $a > 0$ ,  $c > 0$ , и при  $b > 0$  имеем

$$а) U_0^{(s)} = D_{11}^{(s)}(\xi) \cos \delta_1 \zeta + D_{21}^{(s)}(\xi) \sin \delta_1 \zeta + D_{31}^{(s)}(\xi) \cos \delta_2 \zeta + D_{41}^{(s)}(\xi) \sin \delta_2 \zeta;$$

$$\delta_1 = \sqrt{\frac{a}{2b} \left( c - \sqrt{c^2 - 4b} \right)}; \quad \delta_2 = \sqrt{\frac{a}{2b} \left( c + \sqrt{c^2 - 4b} \right)}; \quad \delta_1, \delta_2 > 0, \quad (13)$$

а при  $b < 0$

$$б) U_0^{(s)} = D_{12}^{(s)} \cos \delta_1 \zeta + D_{22}^{(s)} \sin \delta_1 \zeta + D_{32}^{(s)} ch \delta_3 \zeta + D_{42}^{(s)} sh \delta_3 \zeta;$$

$$\delta_3 = \sqrt{\frac{a}{2b} \left( -c - \sqrt{c^2 - 4b} \right)}, \quad \delta_3 > 0. \quad (14)$$

Подставив значение  $U^{(s)}$  в (10), получим:

$$а) V^{(s)} = M_v D_{11}^{(s)} \cos \delta_1 \zeta + M_v D_{21}^{(s)} \sin \delta_1 \zeta + N_{v1} D_{31}^{(s)} \cos \delta_2 \zeta + N_{v1} D_{41}^{(s)} \sin \delta_2 \zeta + \gamma_{v1}^{(s-1)};$$

$$M_v = \frac{\alpha_4 a - \delta_1^2 b}{\alpha_3 a}; \quad N_{v1} = \frac{\alpha_4 a - \delta_2^2 b}{\alpha_3 a}; \quad (15)$$

$$\gamma_{v1}^{(s-1)} = \frac{b}{\alpha_3 a} \frac{\partial^2 U_q^{(s-1)}}{\partial \zeta^2} + \frac{\alpha_4}{\alpha_3} U_q^{(s-1)} + \frac{1}{a} \gamma_{22}^{(s-1)} - \frac{\alpha_4}{\alpha_3 a} \gamma_{11}^{(s-1)},$$

$$\text{б) } V^{(s)} = M_v D_{12}^{(s)} \cos \delta_1 \zeta + M_v D_{22}^{(s)} \sin \delta_1 \zeta + N_{v2} D_{32}^{(s)} \operatorname{ch} \delta_3 \zeta + N_{v2} D_{42}^{(s)} \operatorname{sh} \delta_3 \zeta + \gamma_{v2}^{(s-1)};$$

$$N_{v2} = \frac{\alpha_4 a + \delta_3^2 b}{\alpha_3 a}. \quad (16)$$

Подставив значения  $U^{(s)}$ ,  $V^{(s)}$  в формулы (9), определим  $\sigma_{11}^{(s)}$ ,  $\sigma_{22}^{(s)}$ ,  $\sigma_{12}^{(s)}$ .  
Граничные условия (3) приобретают вид

$$V^{(s)}(\xi, 1) = -V^{+(s)}, \quad V^{+(0)} = \frac{V^+}{l}, \quad V^{+(s)} = 0, s \neq 0; \quad \sigma_{12}^{(s)}(\xi, 1) = 0; \quad (17)$$

$$V^{(s)}(\xi, -1) = 0; \quad \sigma_{12}^{(s)}(\xi, -1) = f \sigma_{22}^{(s)}(\xi, -1).$$

Используя (8), (15) и удовлетворив условиям (17), для случая а) получим систему алгебраических уравнений, решив которую по формуле Крамера, определим неизвестные  $D_{j1}^{(s)}$ :

$$D_{j1}^{(s)} = \frac{\Delta_{j1}^{(s)}}{\Delta_1}; \quad j = 1, 2, 3, 4;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} M_v \cos \delta_1 & M_v \sin \delta_1 & N_{v1} \cos \delta_2 & N_{v1} \sin \delta_2 \\ M_3 \sin \delta_1 & -M_3 \cos \delta_1 & N_{31} \sin \delta_2 & -N_{31} \cos \delta_2 \\ M_v \cos \delta_1 & -M_v \sin \delta_1 & N_{v1} \cos \delta_2 & -N_{v1} \sin \delta_2 \\ M_{f1} \sin \delta_1 & M_{f1} \cos \delta_1 & N_{f1} \sin \delta_2 & N_{f1} \cos \delta_2 \end{vmatrix}; \quad P_1^{(s)} = \begin{vmatrix} P_{11}^{(s)} \\ P_{21}^{(s)} \\ P_{31}^{(s)} \\ P_{41}^{(s)} \end{vmatrix};$$

$$M_{f1} = (M_3 - fM_2); \quad N_{f1} = (N_{31} - fN_{21}); \quad P_{11}^{(s)} = \left( -V^{+(s)} - \gamma_{v1}^{(s-1)} \right)_{(\zeta=1)}, \quad (18)$$

$$P_{21}^{(s)} = \left( \alpha_5 \frac{\partial U_q^{(s-1)}}{\partial \zeta} + \alpha_3 \frac{\partial \gamma_{v1}^{(s-1)}}{\partial \zeta} + \gamma_3^{(s-1)} \right)_{(\zeta=1)}; \quad P_{31}^{(s)} = -\gamma_{v1}^{(s-1)}_{(\zeta=-1)};$$

$$P_{41}^{(s)} = - \left( (\alpha_5 - f\alpha_3) \frac{\partial U_q^{(s-1)}}{\partial \zeta} + (\alpha_3 - f\alpha_4) \frac{\partial \gamma_{v1}^{(s-1)}}{\partial \zeta} + \gamma_3^{(s-1)} - f\gamma_2^{(s-1)} \right)_{(\zeta=-1)},$$

где  $\Delta_{j1}^{(s)}$  получается от  $\Delta_1$  заменой  $j$ -того столбца столбцом  $P_1^{(s)}$  из свободных членов. Таким же образом определяются  $D_{j2}^{(s)}$  для случая б).

После определения  $D_{j1}^{(s)}, D_{j2}^{(s)}$  по формулам (8), (13)-(16) определяются все компоненты вектора перемещения и тензора напряжений.

**О математически точном решении во внешней задаче.** Если функция  $V^+(\xi)$  является многочленом, итерация обрывается и получается математически точное решение во внешней задаче. Для иллюстрации: пусть  $V^+(\xi) = l(a_1 + a_2\xi)$ .

Согласно формулам (8), (12), (13), (15), (18) имеем:

а) при  $s = 0$

$$D_{j1}^{(0)} = \frac{\Delta_{j1}^{(0)}}{\Delta_1}, \quad j=1,2,3,4; \quad P_1^{(0)} = \begin{vmatrix} -(a_1 + a_2\xi) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}; \quad (19)$$

$$\Delta_{11}^{(0)} = -(a_1 + a_2\xi)M_1^1; \quad \Delta_{21}^{(0)} = (a_1 + a_2\xi)M_2^1;$$

$$\Delta_{31}^{(0)} = -(a_1 + a_2\xi)M_3^1; \quad \Delta_{41}^{(0)} = (a_1 + a_2\xi)M_4^1,$$

где  $M_i^j$  является минором элемента, стоящего на пересечении  $i$ -того столбца и  $j$ -той строки определителя  $\Delta_1$ .

Для неизвестных  $D_{j1}^{(0)}$ , входящих в  $U_0^{(0)}$ , имеем

$$D_{11}^{(0)} = -\frac{(a_1 + a_2\xi)}{\Delta_1}M_1^1; \quad D_{21}^{(0)} = \frac{(a_1 + a_2\xi)}{\Delta_1}M_2^1;$$

$$D_{31}^{(0)} = -\frac{(a_1 + a_2\xi)}{\Delta_1}M_3^1; \quad D_{41}^{(0)} = \frac{(a_1 + a_2\xi)}{\Delta_1}M_4^1, \quad (20)$$

при  $s=1$   $U^{(1)} = U_0^{(1)} + U_q^{(0)}$ .

Из формул (18) согласно (13) имеем

$$U_0^{(1)} = D_{11}^{(1)}(\xi) \cos \delta_1 \zeta + D_{21}^{(1)}(\xi) \sin \delta_1 \zeta + D_{31}^{(1)}(\xi) \cos \delta_2 \zeta + D_{41}^{(1)}(\xi) \sin \delta_2 \zeta;$$

$$D_{j1}^{(1)} = \frac{\Delta_{j1}^{(1)}}{\Delta_1}, \quad j=1,2,3,4; \quad P_1^{(1)} = \begin{vmatrix} P_{11}^{(1)} \\ P_{21}^{(1)} \\ P_{31}^{(1)} \\ P_{41}^{(1)} \end{vmatrix}; \quad P_{11}^{(1)}(\zeta=1) = -\gamma_{v1}^{(0)}(\zeta=1);$$

$$P_{21}^{(1)}(\zeta=1) = \left( \alpha_5 \frac{\partial U_q^{(0)}}{\partial \zeta} + \alpha_3 \frac{\partial \gamma_{v1}^{(0)}}{\partial \zeta} + \gamma_3^{(0)} \right)_{(\zeta=1)}; \quad P_{31}^{(1)}(\zeta=-1) = -\gamma_{v1}^{(0)}(\zeta=-1);$$

$$P_{41}^{(1)}(\zeta=-1) = - \left( (\alpha_5 - f\alpha_3) \frac{\partial U_q^{(0)}}{\partial \zeta} + (\alpha_3 - f\alpha_4) \frac{\partial \gamma_{v1}^{(0)}}{\partial \zeta} + \gamma_3^{(0)} - f\gamma_2^{(0)} \right)_{(\zeta=-1)}; \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \Delta_{11}^{(1)} &= P_{11}^{(1)}(\zeta=1)M_1^1 - P_{21}^{(1)}(\zeta=1)M_1^2 + P_{31}^{(1)}(\zeta=-1)M_1^3 - P_{41}^{(1)}(\zeta=-1)M_1^4; \\ \Delta_{21}^{(1)} &= P_{11}^{(1)}(\zeta=1)M_2^1 - P_{21}^{(1)}(\zeta=1)M_2^2 + P_{31}^{(1)}(\zeta=-1)M_2^3 - P_{41}^{(1)}(\zeta=-1)M_2^4; \\ \Delta_{31}^{(1)} &= P_{11}^{(1)}(\zeta=1)M_3^1 - P_{21}^{(1)}(\zeta=1)M_3^2 + P_{31}^{(1)}(\zeta=-1)M_3^3 - P_{41}^{(1)}(\zeta=-1)M_3^4; \\ \Delta_{41}^{(1)} &= P_{11}^{(1)}(\zeta=1)M_4^1 - P_{21}^{(1)}(\zeta=1)M_4^2 + P_{31}^{(1)}(\zeta=-1)M_4^3 - P_{41}^{(1)}(\zeta=-1)M_4^4. \\ U_q^{(0)} &= B_1 \cos \delta_1 \zeta + B_2 \sin \delta_1 \zeta + B_3 \cos \delta_2 \zeta + B_4 \sin \delta_2 \zeta, \end{aligned} \quad (22)$$

где  $B_j$  несложно вычислить, подставив (22) в (11) и приравняв соответствующие коэффициенты при  $\cos \delta_j, \sin \delta_j$ .

Окончательно имеем

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= \varepsilon^{-1} \sigma_{ij}^{(0)} + \sigma_{ij}^{(1)}, \quad i, j = 1, 2; \\ u_x &= l(U^{(0)} + \varepsilon U^{(1)}); \quad u_y = l(V^{(0)} + \varepsilon V^{(1)}). \end{aligned} \quad (23)$$

Аналогичным образом можно записать математически точное решение для случая б).

**Заключение.** Найдено асимптотическое решение внешней задачи анизотропной полосы при наличии общей анизотропии в своей плоскости. Полоса опирается на абсолютно жесткое основание, и верхней кромке полосы сообщено нормальное перемещение, которое во времени изменяется гармонически. Показано, что колебания не являются чисто сдвиговыми или продольными.

Институт механики НАН РА  
e-mail: varujan.yarujyan@mail.ru

**В. Т. Япуджян**

### **О вынужденных колебаниях анизотропной полосы с учетом кулонова трения**

Рассмотрена динамическая смешанная краевая задача анизотропного тела, имеющего плоскость упругой симметрии. Учитывается кулоново трение между полосой и жестким основанием. Верхней кромке полосы сообщено нормальное перемещение, которое во времени изменяется гармонически. Определено асимптотическое решение внешней задачи. Показано, что колебания не распадаются на сдвиговые и продольные.

**Վ. Տ. Յափուջյան**

**Կուլոնյան շփման հաշվառումով անիզոտրոպ շերտի  
ստիպողական տատանումների մասին**

Դիտարկված է առաձգական համաչափության հարթություն ունեցող անիզոտրոպ մարմնի դինամիկական խառը եզրային խնդիրը: Հաշվի է առնված կուլոնյան շփումը շերտի և կոշտ հենարանի միջև, շերտի վերին նիստին հաղորդված է բնականոն տեղափոխություն, որը, ըստ ժամանակի, փոփոխվում է հարմոնիկ: Որոշված է արտաքին խնդրի ասիմպտոտիկ լուծումը: Ցույց է տրված, որ տատանումները չեն տրոհվում սահքայինի և երկայնականի:

**V. T. Yapujyan**

**About the Forced Oscillations of the Anisotropic Layer  
Considering Coulomb Friction**

The dynamic mixed boundary problem of anisotropic body with a plane of elastic symmetry is considered. Coulomb friction between the strip and the rigid base is taken into account, normal displacement is transmitted to the upper edge of the strip which changes harmonically in time. The asymptotic solution of the external problem is determined. It is shown that the vibrations are not disintegrated into shear and longitudinal vibrations.

**Литература**

1. *Ագալովյան Լ. Ա.* В кн.: Механика. Межвуз. сб. Изд-во ЕГУ. 1982. Вып.2. С. 7-12.
2. *Aghalovyan L. A.* Asymptotic Theory of Anisotropic Plates and Shells. Singapore – London. World Scientific. 2015. 376 p. (*Ագալովյան Լ. Ա.* Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек. М. Наука. 1997. 414 с.)
3. *Лехницкий С. Г.* Теория упругости анизотропного тела. 1977. М. Наука. 416 с.
4. *Ագալովյան Լ. Ա* – Доклады НАН РА. 2021. Т. 121. №. 1. С. 54-60.