

УДК 539.3

DOI: 10.54503/0321-1339-2022.122.2-133

М. Г. Арзуманян

Обоснование модифицированной модели текучести Друкера – Прагера для порошковых материалов

(Представлено академиком Л. А. Агаловяном 18/IV 2022)

Ключевые слова: *неспечённый порошковый материал; модифицированная модель текучести Друкера – Прагера; угол внутреннего трения и коэффициент сцепления между частицами порошка.*

Введение. В порошковой металлургии одним из основных технологических процессов является холодное формование неспеченных заготовок. В [1] теоретически разработана составная модель металлического порошкового материала, состоящая из двух ветвей (с прямолинейным и изогнутым участком). Получены уравнения теории пластичности металлического порошкового материала для прямолинейного участка и для изогнутой части. В [2], основываясь на окружности Мора в системе осей компонентов касательных и нормальных напряжений наклонных плоскостей и на график (прямая линия условия Мора – Кулона), изображающий касательную к окружности, были обоснованы условия пластичности Мора – Кулона.

В [3] выполнен подробный анализ модифицированной модели текучести Друкера – Прагера для порошковых материалов, состоящей из трех участков: прямолинейного - поверхность текучести при сдвиге, шляпкообразного, пересекающего ось среднего напряжения, и переходного участка. В [3, 4] рассмотрены параметры, необходимые для определения модифицированной модели текучести Друкера – Прагера. В [5-7] модифицированная модель текучести Друкера – Прагера рассматривается через две следующие поверхности: поверхность текучести при сдвиге порошковых частиц и поверхность осаживания (шляпкообразный участок).

Отметим, что в [3-7] отсутствуют формулы связи между деформациями и напряжениями, с помощью которых можно решать довольно сложные и сравнительно мало изученные технологические задачи неспечённых порошковых заготовок.

Цель настоящей работы – на основе формул теории пластичности получить простые формулы пластической деформации порошковых материалов для шляпообразной поверхности модифицированной модели текучести Друкера – Прагера, что позволит определить не только компоненты напряженно-деформированного состояния деталей из порошковых материалов, но и текущую пористость материала.

Известно, что модифицированная модель текучести Друкера – Прагера состоит из трех участков [3, 4] (рис. 1).

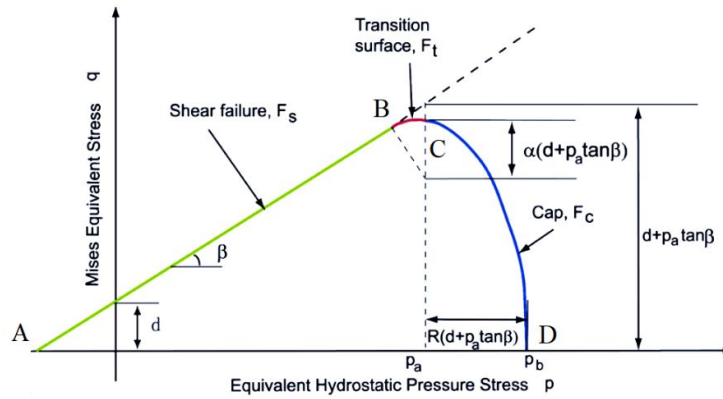


Рис. 1. Типичная модифицированная модель текучести Друкера – Прагера [4].

1. Поверхность (AB) текучести при сдвиге порошковых частиц, которая в основном обеспечивает течение, обусловленное сдвигом, приводится в следующем виде:

$$f_{AB} = F_s = q - p \operatorname{tg} \beta - d, \quad (1)$$

где p – среднее напряжение, а q – квадратный корень второго инварианта девиатора напряжения.

Здесь p и q , выраженные через главные напряжения, имеют следующий вид:

$$p = -(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)/3, \quad (2)$$

$$q = \sqrt{\frac{1}{6}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]}. \quad (3)$$

2 Шляпообразная поверхность (CD), обеспечивающая механизм осаживания порошковых частиц, для представления пластичного уплотнения записывается в виде

$$f_{CD} = F_c = \sqrt{(p - p_a)^2 + \left[\frac{Rq}{1 + \alpha - \alpha / \cos \rho} \right]^2} - R(d + p_a \operatorname{tg} \beta) = 0, \quad (4)$$

где R – параметр, характеризующий свойство материала, который управляет формой «шляпы», α – небольшое число (обычно в диапазоне от 0.01

до 0.05), используемое для определения плавной переходной поверхности, p_a – эволюционный параметр, обусловленный прочностью или хрупкостью материала и представляющий собой объемную пластичную деформацию.

Шляпкообразная поверхность в модифицированной модели текучести Друкера – Прагера служит в основном двум целям [4]:

1. связывает поверхность текучести с гидростатическим давлением, обеспечивая механизм упрочнения, для представления пластичного уплотнения;
2. помогает управлять объемным расширением (дилатансию), когда материал сдвигается, обеспечивая хрупкость как результат увеличения неупругой объемной функции. Последнее получается в результате сдвига материала по участкам текучести и плавного перехода [3].

Шляпкообразная поверхность в модифицированной модели текучести Друкера – Прагера упрочняет материал или делает его хрупким как результат объемной функции пластической деформации. При пластическом объемном уплотнении (материал сдвигается по шляпкообразной поверхности) порошковый материал упрочняется, а при объемной пластической дилатансии (материал сдвигается по поверхности текучести) материал становится хрупким [3].

Связь между эволюционным параметром p_a и напряжением упрочнения p_b имеет следующий вид [3-5]:

$$p_a = \frac{p_b - Rd}{1 + Rtg\beta}. \quad (5)$$

3. Участок плавного перехода (BC) между указанными двумя участками задается в виде [3, 4]:

$$f_{BC} = F_t = \sqrt{(p - p_a)^2 + \left[q - \left(1 - \frac{\alpha}{\cos \beta} \right) (d + p_a tg \beta) \right]} - \alpha (d + p_a tg \beta). \quad (6)$$

Таким образом, согласно [3, 4] для определения модифицированной модели текучести Друкера – Прагера необходимо иметь шесть параметров: β , d , p_a , R , p_b и α . Угол внутреннего трения между частицами металлических порошков β и коэффициент их сцепления d необходимы для определения поверхности текучести при сдвиге Друкера – Прагера, эволюционный параметр p_a и параметр эксцентриситета R – для определения шляпкообразной поверхности, параметр p_b как функция объемной пластической деформации – для определения закона упрочнения, а α – для формирования переходной поверхности. Отметим также, что только на участке «шляпки» применим закон текучести, связанный с условием пластичности, с помощью которого можно получить формулы теории пластичности, однако в [3-7] они отсутствуют.

При проведении теоретических исследований задачи для шляпкообразной и переходной поверхности модифицированной модели текучести Друкера – Прагера не имеют конечного решения и решаются только численными методами. Чтобы избежать трудностей, сначала рассмотрим модифицированную модель текучести Друкера – Прагера без переходного участка [5-7]

$$f_{CD} = F_c = \sqrt{(p - p_a)^2 + (Rq)^2} - R(d + p_a \operatorname{tg} \beta) = 0. \quad (7)$$

Несмотря на то что в (7) шляпкообразная поверхность представляется в упрощенном виде по сравнению с (4), конечного решения также не существует. Поэтому целесообразно шляпкообразную поверхность представлять в виде прямой линии (рис 2).

Известно, что в системе координат XOY уравнение прямой имеет следующий вид:

$$y = kx + d, \quad (8)$$

где k – угловой коэффициент, т.е. тангенс угла наклона прямой к оси OX, а d – величина отрезка, который отсекает прямая на оси OY, считая от начала координат.

Обозначив $y = q$, $x = p$, уравнение (8) приведем к виду

$$q = kp + d. \quad (9)$$

Учитывая, что $k = \operatorname{tg} \varphi$ (рис. 2), для прямой BD имеем

$$q = \operatorname{tg} \varphi p + d. \quad (10)$$

Используя граничное условие $q = 0$, $p = p_b$, имеем

$$\begin{aligned} 0 &= \operatorname{tg} \varphi p_b + d, \\ d &= -\operatorname{tg} \varphi p_b. \end{aligned} \quad (11)$$

Подставив (11) в (10), имеем

$$q = \operatorname{tg} \varphi p - \operatorname{tg} \varphi p_b. \quad (12)$$

Из треугольника BDL (рис. 2) имеем $90 - \gamma = 180 - \varphi$ или $\varphi = 90 + \gamma$, а

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg}(90 + \gamma) = -\operatorname{ctg} \gamma.$$

Из треугольника BDL (рис. 2) имеем

$$\operatorname{ctg} \gamma = \frac{LB}{LD} = \frac{d + p_a \operatorname{tg} \varphi}{R(d + p_a \operatorname{tg} \varphi)} = \frac{1}{R}$$

или

$$\operatorname{tg} \varphi = -\operatorname{ctg} \gamma = -\frac{1}{R}. \quad (13)$$

Подставив (13) в (12), получим уравнение для прямой BD

$$f_{BD} = F_L = qR + p - p_b. \quad (14)$$

Это и есть простая теоретическая формула пластической деформации порошковых материалов для шляпкообразной поверхности модифицированной модели текучести Друкера – Прагера.

Условие пластичности (14), выраженное через главные напряжения, будет иметь вид

$$f_{BD} = F_L = 0, \quad \sqrt{\frac{1}{6}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]}R - \frac{(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)}{3} - p_b = 0. \quad (15)$$

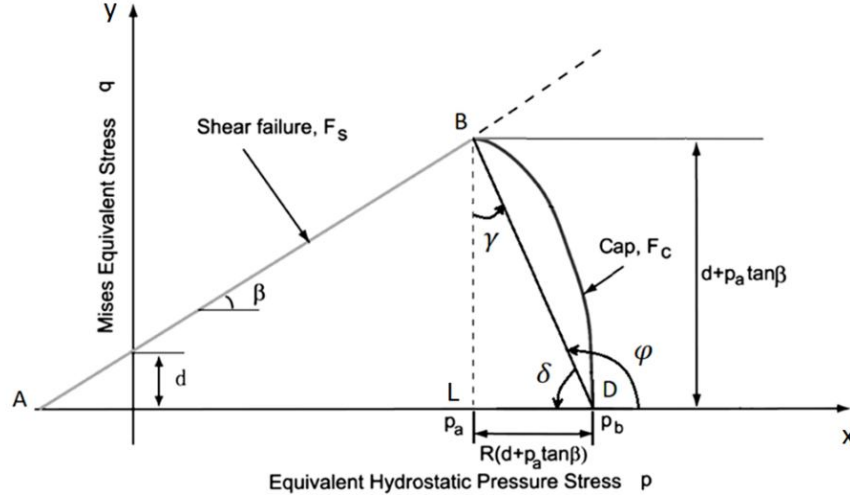


Рис. 2. Упрощенный вид типичной модифицированной модели текучести Друкера – Прагера.

Для получения связей между компонентами приращения главных пластических деформаций и компонентами главных напряжений используются условие пластичности (15) и связанный с ним закон текучести [8]:

$$d\varepsilon_{ij} = d\lambda \frac{\partial F_{cij}}{\partial \sigma_{ij}}, \quad (16)$$

где $d\lambda$ – положительная величина пропорциональности:

$$\begin{aligned} d\varepsilon_1 &= d\lambda \left[\frac{1}{2q} (\sigma_1 + p)R - \frac{1}{3} \right], \\ d\varepsilon_2 &= d\lambda \left[\frac{1}{2q} (\sigma_2 + p)R - \frac{1}{3} \right], \\ d\varepsilon_3 &= d\lambda \left[\frac{1}{2q} (\sigma_3 + p)R - \frac{1}{3} \right]. \end{aligned} \quad (17)$$

Используя понятие интенсивности приращений пластических деформаций, получим [8]

$$d\bar{\varepsilon}_l = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(d\varepsilon_1 - d\varepsilon_2)^2 + (d\varepsilon_2 - d\varepsilon_3)^2 + (d\varepsilon_3 - d\varepsilon_1)^2}. \quad (18)$$

Из уравнения (17) определяются значения слагаемых $d\varepsilon_1 - d\varepsilon_2$, $d\varepsilon_2 - d\varepsilon_3$, $d\varepsilon_3 - d\varepsilon_1$:

$$d\varepsilon_1 - d\varepsilon_2 = d\lambda \left[\frac{1}{2q} (\sigma_1 - \sigma_2)R \right],$$

$$\begin{aligned} d\varepsilon_2 - d\varepsilon_3 &= d\lambda \left[\frac{1}{2q} (\sigma_2 - \sigma_3) R \right], \\ d\varepsilon_3 - d\varepsilon_1 &= d\lambda \left[\frac{1}{2q} (\sigma_3 - \sigma_1) R \right]. \end{aligned} \quad (19)$$

Подставив выражение (19) в (18), получим

$$d\bar{\varepsilon}_l = d\lambda R \frac{3\sqrt{2}}{4},$$

откуда следует

$$d\lambda = \frac{4\bar{d\varepsilon}_l}{3\sqrt{2}R}. \quad (20)$$

Следовательно, из (22) получим

$$\begin{aligned} d\varepsilon_1 &= d\bar{\varepsilon}_l \left[\frac{\sqrt{2}}{3} \frac{(\sigma_1 + p)}{q} - \frac{2\sqrt{2}}{9R} \right], \\ d\varepsilon_2 &= d\bar{\varepsilon}_l \left[\frac{\sqrt{2}}{3} \frac{(\sigma_2 + p)}{q} - \frac{2\sqrt{2}}{9R} \right], \\ d\varepsilon_3 &= d\bar{\varepsilon}_l \left[\frac{\sqrt{2}}{3} \frac{(\sigma_3 + p)}{q} - \frac{2\sqrt{2}}{9R} \right]. \end{aligned} \quad (21)$$

Уравнение приращения объемной пластической деформации $d\varepsilon_V^p$ представляется в виде [8]

$$d\varepsilon_V^p = d\varepsilon_1 + d\varepsilon_2 + d\varepsilon_3. \quad (22)$$

Используя (21), из (22) получим приращения объемной пластической деформации

$$d\varepsilon_V^p = -d\bar{\varepsilon}_l \frac{2\sqrt{2}}{3R}. \quad (23)$$

Для определения плотности ρ или пористости v при текущей степени деформации порошкового материала используем закон сохранения массы [1, 9]

$$\frac{d\rho}{\rho} = -d\varepsilon_V^p. \quad (24)$$

Приняв во внимание формулу связи между текущей пористостью v и относительной плотностью ρ порошкового материала [9]

$$\rho = 1 - v, \quad (25)$$

представим (24) в следующем виде:

$$\frac{d(1-v)}{1-v} = -d\varepsilon_V^p. \quad (26)$$

Подставив (26) в (23), получим

$$\frac{d(1-\nu)}{1-\nu} = \frac{2\sqrt{2}}{3R} d\bar{\varepsilon}_t. \quad (27)$$

Интегрируя (27), получим приращения текущей пористости или относительной плотности заготовок из порошкового материала.

Заключение. На основе формул теории пластичности получены теоретические формулы пластической деформации порошковых материалов для шляпообразной поверхности модифицированной модели текучести Друкера – Прагера.

Полученные формулы дают возможность не только проводить исследование компонентов напряженно-деформированного состояния деталей из порошковых материалов, но и определять их текущие пористости (плотности).

Военно-авиационный университет им. Арменака Ханперянца МО РА
e-mail: arzmartin@rambler.ru

М. Г. Арзуманян

Обоснование модифицированной модели текучести Друкера – Прагера

Получены формулы пластического деформирования порошкового материала на основе теории пластичности для шляпообразной поверхности модифицированной модели текучести Друкера – Прагера. Показано, что полученные уравнения дают возможность определять не только компонент напряженно-деформированного состояния заготовок из порошкового материала в технологических процессах, но и их текущую пористость.

Մ. Գ. Արզումանյան

Դրուկեր – Պրագերի՝ ձևափոխված գլխարկաձև մոդելի հիմնավորումը

Հիմնվելով պլաստիկության տեսության բանաձևերի վրա՝ Դրուկեր – Պրագերի՝ ձևափոխված գլխարկաձև մոդելի գլխարկի մակերևույթի համար ստացվել են փոշենյութի պլաստիկ դեֆորմացման տեսական բանաձևերը: Ցույց է տրվել, որ ստացված հավասարումները հնարավորություն կտան որոշելու ոչ միայն տեխնոլոգիական գործընթացներում փոշենյութից նախապատրաստվածքների լարվածադեֆորմացիոն վիճակի բաղադրիչները, այլև դրանց ընթացիկ ծակոտկենությունը:

M. G. Arzumanyan

Justification of Modified Drucker – Prager Cap Model

On the basis of the equation of the theory of plasticity theoretical formulas for the plastic deformation of a powder material were obtained for the cap surface of the modified Drucker – Prager cap model. It is shown that the obtained equations make it possible not only to determine the components of the stress-strain state of powder blanks in technological processes but also their current porosity.

Литература

1. *Petrosyan G., Kraft T.* – Proceedings of Engineering academy of Armenia. 2005. V. 2. № 4. P. 538-543.
2. *Арзуманян М. Г.* Исследование напряженно-деформированного состояния процессов уплотнения металлических порошковых заготовок. Канд. дис. Ереван. 2015. 102 с.
3. ABAQUS, 2006. Theory Manual. ABAQUS Inc.
4. *Han L. H., Elliott J. A., Benthall A. C. et al.* – International Journal of Solids and Structures. 2008. V. 45. P. 3088–3106.
5. *Rottman G.* Mechanisches Verhalten beim Trockenpressen – Triaxialversuche an SiC and Stahlpulver zur Untersuchung von Werkstoffmodellen. Dokt. dis. Fraunhofer IWM, Germany, Mai, 2001. 102 p.
6. *Goube O., Riedel H.* – Powder Metallurgy. 2000. V. 43. № 2. P. 123-131.
7. *Doremus P., Toussaint F., Alvain O.* Recent developments in computer modeling of powder metallurgy processes. IOS Press. 2001. P. 29-41.
8. *Малинин Н. Н.* Прикладная теория пластичности и ползучести. М. Машиностроение, 1975. 399 с.
9. *Петросян Г. Л.* Пластическое деформирование порошковых материалов. М. Металлургия. 1988. 153 с.