ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 75, №1-2, 2022 Механика

Doi:10.54503/0002-3051-2022.75.1-2-36

УДК 539.3

О КОЭФФИЦИЕНТНЫХ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧАХ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯХ В МЕХАНИКЕ И БИОМЕХАНИКЕ

Ватульян А. О.

Ключевые слова: коэффициентные обратные задачи, итерационные процессы, интегральные уравнения Фредгольма, эластография.

Վատուլյան Ա.Հ.
Գործակցային հակադարձ խնդիրներ և նրանց կիրառությունները մեխանիկայում և բիոմեխանիկայում

Հիմնաբառեր՝ գործակցային հակադարձ խնդիրներ, իտերացիոն պրոցեսներ, Ֆրեդհոլմի ինտեգրալ հավասարումներ, առաձգագրություն

Դիտարկված են փոփոխական գործակիցներով օպերատորների համար տարբեր տիպի գործակցային հակադարձ խնդիրներ, դրանց կիրառությունները անհամասեռ կառուցվածքների՝ ֆունկցիոնալ գրադիենտային նյութերից ձողային և գլանային մարմինների նույնականացման խնդիրներում, երբ լրացուցիչ տեղեկությունը վերցվում է մակերևույթից կամ կողաճակատից: Ներկայացված է կիրառությունը առաձգագրության խնդիրներում, երբ նույնականացվում են փափուկ հյուսվածքների հատկությունները օբյեկտի ներսում լրացուցիչ տեղեկությունների առկայության պայմաններում:

Vatulyan A.O.
On coefficient inverse problems and their applications in mechanics and biomechanics

Keywords: coefficient inverse problems, iterative processes, Fredholm integral equations, elastography

Various types of coefficient inverse problems for operators with variable coefficients are considered, their applications to the problems of identification of inhomogeneous structures - functionally graded materials on the example of rod and cylindrical bodies when removing additional information from the surface or end. An application to the problems of elastography in the identification of soft tissue properties with additional information inside the object is presented.

Рассмотрены различные типы коэффициентных обратных задач для операторов с переменными коэффициентами, их приложения к задачам идентификации неоднородных структур - функционально-градиентных материалов на примере стержневых и цилиндрических тел при снятии дополнительной информации с поверхности или торца. Представлено приложение к задачам эластографии при идентификации свойств мягких тканей при дополнительной информации внутри объекта.

Введение

Коэффициентные обратные задачи (КОЗ) - интенсивно развивающийся раздел математический физики, который характеризуют математические проблемы, связанные с определением коэффициентов краевой задачи для некоторой математической модели по некоторой дополнительной информации. Так, например, дополнительная информация для моделей теории упругости и ее обобщений задается в виде значений резонансных частот, в виде информации о полях смещений, измеренных либо на границе, либо внутри области. Подлежащие определению характеристики могут быть постоянными или зависящими от координат коэффициентами дифференциальных операторов, коэффициентами, входящими в граничные условия. Как правило, определение коэффициентов математической модели относится к некорректным задачам, для которых характерны возможная неединственность и неустойчивость по отношению к малым возмущениям входной информации [1]. В настоящее время имеется достаточно много монографий, посвященных различным аспектам постановок и методам решения коэффициентных обратных задач для разных разделов математической физики. Среди многих работ отметим [2-10], посвященные постановкам и анализу нелинейных некорректных проблем, и [11-13], в которых обсуждены различные аспекты численной реализации.

Заметим, что коэффициентные обратные задачи (КОЗ) делятся на два больших класса:

1. определение постоянных коэффициентов модели
2. определение переменных коэффициентов модели

Конечномерные КОЗ и методы их исследования достаточно подробно изучены. Они могут базироваться как на явном представлении решений дифференциальных уравнений и использовании некоторых дополнительных условий (метод Прони, метод квазилинеаризации [13]), минимизации функционала невязки, так и на использовании некоторых итерационных процедур.

Для второго типа КОЗ в случае зависимости искомых параметров-функций от координат операторные уравнения, связывающие заданные и искомые функции, в общем случае неоднородности в явном виде не могут быть построены; решения прямых задач в этом случае могут быть построены лишь с помощью каких-либо численных методов-конечных элементов, конечно-разностных или проекционных; таким образом, КОЗ в этом случае относятся к наиболее трудному классу обратных задач. В настоящее время имеется достаточно большое число монографий, в которых излагаются основные аспекты решения обратных задач, методы регуляризации и численные аспекты решения КОЗ.

Опишем некоторые проблемы, возникающие в различных областях механики и моделирования. Так, сформированные достаточно давно модели (например, классическая модель теплопроводности), опиравшиеся на гипотезы однородности и изотропии, позволили с достаточной степенью точности описывать различные процессы теплооoбмена. Эти модели требовали определения лишь определения нескольких базовых параметров из простых физических экспериментов, что позволяло строить аналитические решения для канонических областей либо в виде рядов или интегралов, исследовать влияние параметров задачи, условий нагружения на изучаемый процесс и делать обоснованные прогностические выводы.

Аналогичная ситуация формировалась на протяжении двух столетий и при исследовании деформирования твердых тел. Математическая формулировка проблем деформирования твердых тел на основе простейшего варианта модели (однородное изотропное тело) позволила решить целый ряд актуальных научных и прикладных проблем, в механике придала импульс развитию и совершенствованию инженерных расчетов на прочность и устойчивость, в математике позволила создать теорию общих краевых задач для эллиптических операторов, исследовать свойства решений во многих важных случаях (например, в задачах о концентраторах напряжений для полостей и трещин). Модель однородной теории упругости благодаря определению двух упругих постоянных – модуля Юнга и коэффициента Пуассона на основе простых макроэкспериментов (опыты на растяжение и кручение стержней) стала эффективным средством анализа многих проблем не только в механике деформируемого твердого тела, но и в смежных областях (машиностроение, строительство, акустика, геофизика). Отметим, что многие исследования и расчеты на прочность в механике деформируемого твердого тела и в настоящее время базируются на этой апробированной модели.

Вместе с тем отметим, что при исследовании ряда проблем деформирования твердых тел в новых областях (механика композитов и функционально-градиентных структур, геофизика и горная механика, биомеханика) модель однородной среды оказалась недостаточной для адекватного описания деформирования элементов природных и искусственных конструкций. В некоторых ситуациях делались попытки осуществить исследование в рамках осредненных моделей, однако не всегда такое осреднение (и размазывание свойств) было продуктивным и приводило к расхождению результатов расчетов с данными экспериментов. Продвижение в исследовании краевых задач для дифференциальных операторов с переменными коэффициентами оказалось менее заметным в первую очередь в силу того, что не существует способа построения в аналитическом виде общих решений линейных дифференциальных уравнений второго порядка (и более высоких порядков) при произвольных зависимостях коэффициентов от координат. Конечно, в научной литературе имеются исследования, в которых решения строятся виде рядов (или с помощью проекционных методов типа Галеркина), однако такая схема, как правило, приводит к решению бесконечных алгебраических систем, для которых не всегда возможно доказать сходимость приближенных решений, полученных на основе метода редукции, к точным. Отметим, что ранее основное внимание при анализе моделей неоднородной теории упругости уделялось как общим вопросам существования решений, так и способам построения усредненных моделей в средах с быстро меняющимися коэффициентами, весьма важным с точки зрения теории пластин и оболочек и общей механики композитов.

Заметим, что для анализа равновесия или колебаний и использования модели неоднородной теории упругости необходимо знать в самом простом случае непрерывно-неоднородного (или кусочно-однородного) изотропного тела три функции (модули Ламе и плотность среды). При этом физические характеристики задаются при помощи функциональных зависимостей, которые должны быть предварительно определены из некоторых экспериментов или наблюдений, как правило, связанных с измерением граничных или внутренних полей смещений при статическом нагружении или при возбуждении колебаний некоторой нагрузкой. Наиболее часто такие зависимости предполагаются одномерными (особенно при использовании моделей слоя, полупространства или слоистого полупространства), а наиболее распространенный способ их определения - анализ отклика исследуемого объекта при возможном варьировании способа нагружения. При этом задача определения нескольких функций приводит к исследованию довольно сложных нелинейных обратных задач для эллиптических и гиперболических операторов, различные аспекты которой стали предметом исследования относительно недавно. Отметим, что довольно часто принимаемый кусочно-постоянный характер изменения искомых характеристик в ряде ситуаций оправдан, поскольку это предположение существенно сужает область поиска и значительно упрощает исследование обратных задач, однако может привести к существенному искажению результатов идентификации, и, как следствие, к ошибкам при прогнозировании ресурса конструкции. В рамках такого подхода решение исходной некорректной задачи сводится к определению конечного числа параметров в некоторой ограниченной области n -мерного пространства поиска. Такой поиск в последние годы осуществляется на основе метода регуляризации на компактных множествах, а среди конечномерных вариантов отметим как традиционные градиентные методы нахождения минимумов функционалов невязки, так и нейросети и генетические алгоритмы.

Настоящая работа посвящена некоторым аспектам постановки и исследования ряда обратных задач для моделей неоднородной теории упругости и биомеханики мягких тканей по определению переменных упругих характеристик при задании дополнительной информации на границе тела и внутри его и их приложениям.

Постановка и решение задачи.

Рассмотрим установившиеся колебания ограниченной области V с кусочно-гладкой границей $S = S_u \cup S_\sigma$, а n_j- компоненты единичного вектора внешней нормали к S. Сформулируем постановку коэффициентных обратных задач в нескольких вариантах.

Вариант 1-задание (измерение) граничных полей смещений. Этот вариант предлагается реализовывать при определении материальных характеристик материала, зависящих от координат, в случае задания дополнительной информации на границе объекта.

Уравнения установившихся колебаний имеют вид:

$$\sigma_{ij,j} + \rho\omega^2 u_i = 0 \quad i = 1,2,3 \tag{1}$$

Определяющие соотношения

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl} u_{k,l} \tag{2}$$

и граничные условия смешанного типа

$$u_i\big|_{S_u} = 0, \quad \sigma_{ij} n_j\big|_{S_\sigma} = p_i \tag{3}$$

Здесь c_{ijkl} - компоненты тензора упругих модулей, являющиеся кусочно-непрерывными функциями координат, которые удовлетворяют обычным условиям симметрии и положительной определенности, ρ-плотность среды. Сформулируем задачу определения коэффициентов дифференциального оператора теории упругости по дополнительной информации

$$u_i\big|_{S_\sigma} = f_i(x,\omega), \quad \omega \in [\omega_1, \omega_2] \tag{4}$$

Такая постановка соответствует измерению поля перемещений на части границы S_σ, на которой осуществляется нагружение, в некотором диапазоне частот. Отметим, что в такой общей постановке задача является нелинейной и построение решения осуществляется на основе построения некоторого итерационного процесса. Приведем постановку в случае изотропного тела, для которого закон Гука (2)

$$\sigma_{ij} = \lambda u_{k,k}\delta_{ij} + \mu(u_{i,j} + u_{j,i}), \tag{5}$$

где λ, μ - параметры Ляме.

Для решения обратной задачи по восстановлению трех переменных характеристик λ, μ, ρ используется несколько подходов, в основе которых лежит итерационный метод типа Ньютона[14] и его модификации. Сформулируем соответствующие операторные уравнения. Для нахождения трех характеристик будем использовать три режима зондирования, которые характеризуются как разными областями приложения нагрузки, так и способом ее приложения, обозначая эти нагрузки через $p_i^{(m)}, m = 1,2,3$; соответствующие поля смещений будем обозначать $u_i^{(m)}$.

Для упругих тел можно пользоваться обобщенным соотношением взаимности и полученным на основе него операторным соотношением [13]. При исследовании коэффициентных обратных задач, состоящих в определении некоторых функций, характеризующих неоднородность, для общих линейных моделей механики сплошной среды также можно опираться на слабую формулировку, которая весьма часто используется и для исследования прямых задач.

Перейдем к слабой постановке, для чего спроектируем уравнение движения (1) на элемент v, представляющий собой вектор-функцию с дифференцируемыми компонентами и удовлетворяющий граничным условиям на S_u (далее будем считать, что $v \in H_0(V)$). Используя теорему Гаусса-Остроградского и учитывая граничные условия в (3), приведем полученное равенство к виду $A(a,u,v) = b(v)$, где $A(a,u,v)$ есть трилинейная форма (линейная по каждому аргументу) переменных a,u,v, $b(v)$-линейная форма.

Так, слабая постановка для анизотропной теории упругости представлена в [13] и состоит в нахождении компонент вектора смещений, причем для трилинейной и линейной форм имеем соответственно

$$\begin{gathered} A(a,u,v) = \int_V 2L(u_i, v_i, C_{ijkl}, \rho)dV, \;\; b(v) = \int_{S_\sigma} p_i v_i dS, \omega \in [\omega_1, \omega_2] \\ 2L(u_i, v_i, C_{ijkl}, \rho) = C_{ijkl}u_{k,l}v_{i,j} - \rho\omega^2 u_i v_i \end{gathered} \tag{6}$$

В изотропном случае для определяющих соотношений вида (5) из слабой постановки (6), полагая $v_i = u_i^{(m)}$, имеем следующую систему нелинейных интегральных уравнений типа Урысона

$$\int_V \left[\lambda(u_{k,k}^{(m)})^2 + \mu(u_{i,j}^{(m)} + u_{j,i}^{(m)})(u_{i,j}^{(m)} + u_{j,i}^{(m)}) - \rho\omega^2 u_i^{(m)} u_i^{(m)}\right] dV = \int_{S_\sigma} p_i^{(m)} f_i^{(m)} dS, \tag{7}$$

Особенностью этой системы 3 уравнений является знакоопределенность ядер при неизвестных функциях λ, μ, ρ. Возможное нарушение знакоопределенности в зависимости от компонент тензора деформаций имеется в случае несжимаемого материала, которое будет обсуждено ниже в варианте 2.

Система нелинейных операторных уравнений исследуется на основе операторного метода Ньютона [14], при этом требуется нахождение производных по Фреше от основного оператора. В работе удалось построить линейную систему интегральных уравнений Фредгольма 1-го рода с гладкими ядрами, позволяющую находить поправки к некоторому начальному приближению. Начальное приближение отыскивается обычно в классе простых функций - линейных или кусочно-линейных путем минимизации функционала невязки.

$$J_n = \int_{\omega_1}^{\omega_2} \int_{S\sigma} (f - u^{(n)})^2 \, dS d\omega$$

Отметим также работу [15], в которой представлен подобный подход в КОЗ теории упругости.

Исследования в рамках предлагаемого подхода могут быть использованы при анализе колебаний кругового цилиндра и решении КОЗ при общих двумерных законах неоднородности. К настоящему времени исследования коэффициентных обратных задач проведены для следующих цилиндрических структур в случае одномерных законов неоднородности двух типов:

1. Для радиальных законов неоднородности при изучении деформирования конечного цилиндра [16-17], где сформулированы соответствующие итерационные процессы и решен ряд задач и неоднородного цилиндрического волновода, где ситуация сложнее и связана с нахождение вычетов для мероморфных функций, заданных в наборе точек [18].

2. Для осевых законов неоднородности при исследовании колебаний цилиндрических стержней кругового поперечного сечения - продольных, изгибных, крутильных. Отметим, что при выполнении соотношения радиус -длина $a/l \le 0.2$ можно использовать для моделирования одномерные теории. Отметим, что в этом случае обратная задача разделяется на две подзадачи. Из совместного анализа задач для продольных и изгибных колебаний определяются модуль Юнга и плотность, а из задачи для крутильных колебаний находится модуль сдвига $G = \mu$.

Опишем подробно первую подзадачу для консольно закрепленного стержня в соответствии с [19].

Будем считать, что в задачах о продольных колебаниях на торец – действует единичная сила и снимается АЧХ с этого же торца; в задаче об изгибных колебаниях возмущение создается сосредоточенным моментом единичной амплитуды на торце и снимается АЧХ для угла поворота.

Далее сформулируем обратную задачу об определении двух функций $g(x)$- безразмерный модуль Юнга и $r(x)$ - безразмерная плотность, считая, что известна дополнительная информация об амплитудно-частотных характеристиках стержней вида

$$u(1,\lambda) = f(\lambda), \quad \lambda \in [0, \lambda_1] \tag{8}$$

$$w'(1,\lambda) = \phi(\lambda), \quad \lambda \in [0, \lambda_2] \tag{9}$$

В работе [16] построены интегральные уравнения вида (7) для стержней, в которых возбуждаются продольные и изгибные колебания, которые имеют вид

$$f(\lambda)=\int_0^1 g(\xi)u'^2(\xi,\lambda)d\xi-\lambda\int_0^1 r(\xi)u^2(\xi,\lambda)d\xi, \lambda\in[0,\lambda_1] \qquad (10)$$

$$\phi(\lambda)=\int_0^1 g(\xi)w''^2(\xi,\lambda)d\xi-\gamma\lambda\int_0^1 r(\xi)w^2(\xi,\lambda)d\xi, \lambda\in[0,\lambda_2] \qquad (11)$$

Здесь u и w соответственно амплитуды продольных и изгибных перемещений стержня, которые, вообще говоря, являются операторами от искомых функций $g(x)$ и $r(x)$; разложения этих функций в степенные ряды с операторными коэффициентами рекуррентной структуры также представлены в [19]; $\lambda=\omega^2$.

Итерационный процесс, описанный выше, приводит на n-той итерации к последовательному решению задач для стержней с известными переменными характеристиками и нахождению поправок из системы интегральных уравнений Фредгольма первого рода с непрерывными ядрами для поправок вида

$$\int_0^1 \Delta g_n(\xi)u'^2_{n-1}(\xi,\lambda)d\xi-\lambda\int_0^1 \Delta r_n(\xi)u^2_{n-1}(\xi,\lambda)d\xi=-f(\lambda)+f_{n-1}(\lambda), \lambda\in[0,\lambda_1] \qquad (12)$$

$$\int_0^1 \Delta g_n(\xi)w''^2_{n-1}(\xi,\lambda)d\xi-\gamma\lambda\int_0^1 \Delta r_n(\xi)w^2_{n-1}(\xi,\lambda)d\xi=\phi(\lambda)-\phi_{n-1}(\lambda), \quad \lambda\in[0,\lambda_2]$$

Система (12) решается на основе метода регуляризации А. Н. Тихонова[1], итерационный процесс останавливается при достижении определенного значения функционала невязки или по достижении некоторого числа итераций. В рамках подобного подхода решена и задача, связанная с идентификацией переменных свойств кожи, моделируемой как трехслойная упругая или вязкоупругая структура [20].

Итерационный процесс продолжается до тех пор, пока не будет достигнута определенная точность при выполнении дополнительных граничных условий (8)-(9). Фактически двухэтапная процедура позволяет сразу формулировать операторные уравнения в обратной задаче, избегая решения задач первого приближения.

Задача о крутильных колебаниях консольного стержня содержит две функции, определяющие свойства – безразмерный модуль сдвига и плотность. Поскольку плотность определена из предыдущей подзадачи, то для нахождения модуля сдвига получается одно операторное уравнение, а схема его исследования аналогична предыдущему.

Замечание 1. Если внимательно проанализировать постановки задач в рамках неоднородной теории упругости, становится ясным, что трилинейность формы открывает и другие возможности при постановке КОЗ, которые в последние годы стали реализовываться при исследовании свойств мягких биологических тканей.

Вариант 2 – задание (измерение) полей смещений внутри объекта исследования. Этот вариант постановки предлагается реализовывать при определении материальных характеристик материала, зависящих от координат, в случае задания дополнительной информации внутри объекта. Далее изложим приложение этого подхода к некоторым задачам идентификации свойств тканей, в частности, в задачах эластографии мягких тканей.

Отметим, что современные методы исследования тканей и органов человеческого организма достаточно хорошо позволяют определить изменения в структурах и их характерные размеры. В то же время определение физических характеристик изменённых структур представляет собой весьма трудную задачу и требует решения ряда обратных задач, если измерения производятся с поверхности исследуемого объекта. В то же время при измерении полей внутри объекта исследования в значительной степени упрощает процедуру определения физических свойств, например, модуля сдвига и далее судить о стадии патологического процесса. Ультразвуковая диагностика с эластографией позволяет получить информацию не только о структуре ткани, а также об упругих свойствах ткани. Это дает возможность перейти от качественной оценки к оценке количественных показателей состояния самой ткани.

Таким образом, эластография представляет собой в настоящее время весьма популярный современный способ оценки характеристик упругости мягких тканей. Эта методика стала использоваться относительно недавно, первый измерительный аппарат, предназначенный для этого, был разработан и введен в эксплуатацию в 2002г. и основан на ультразвуковом зондировании исследуемой области и измерении полей (смещений, деформаций) внутри объекта. При этом первоначальный вариант такого прибора был основан на предварительной компрессии вблизи зоны обследования, что позволяло дать сравнительную оценку модулей упругости различных участков исследуемой области. Результаты такой оценки с помощью преобразования данных ультразвукового зондирования выводились на экран монитора в виде оттенков серого или в цветном варианте. Преобразование данных измеренных смещений внутри зоны исследования в карту любого из свойств мягкой ткани, основаны на математических алгоритмах, которые в совокупности называются алгоритмами инверсии, которые используются в ряде работ, например, в [21,22].

Используемая в то время при оценке модулей упругости методика имела ряд недостатков, в первую очередь, связанных с оценкой степени компрессии, давала большой разброс измеряемых характеристик и поэтому в более поздних вариантах аппаратуры (начиная с 2003г.) начал использоваться метод, получивший в дальнейшем название «эластография сдвиговых волн», предложенный Сарвазяном А. П., и развитый им вместе с коллегами [23-25]. Суть его состоит в возбуждении сдвиговых волн, преобладающих в мягких тканях, и измерении их скоростей внутри исследуемого объекта, что позволяло на основе простой зависимости между скоростью, плотностью и модулем Юнга (в рамках модели несжимаемой упругой среды) оценить модуль Юнга. Этот метод начал интенсивно использоваться различными производителями ультразвукового оборудования и одним из первых стал аппарат FibroScan для диагностики тканей печени, который с успехом используется в настоящее время в практической диагностике.

Вместе с тем отметим, что, например, в настоящее время при оценке состояния мягких тканей, например, печени в медицинской диагностике имеется всего лишь три диапазона оценок для модуля упругости, по этому показателю делается вывод об отсутствии патологии или ее наличии и ее степени.

Заметим, что локальные поля смещений в таких диагностических аппаратах описывались при помощи решений уравнения Гельмгольца [24], что означает пренебрежение градиентами модуля сдвига (это возможно для размытых неоднородностей) Соответственно уточнение модели позволит дать более точную оценку модуля и плотности и учесть их изменение внутри предметной области.

Следует отметить, что данные о смещениях внутри ткани состоят из продольных волн и поперечных волн, как на частоте возбуждения, так и на высших гармониках. Отметим, что продольные волны в мягких тканях (ткани мозга) имеют большую длину волны (скорости продольных волн порядка 1400 м/с против 1–10 м/с для поперечных волн). Обычно в алгоритмах обработки сигналов отсекаются высшие гармоники, однако они не позволяют отфильтровать только поперечные волны, поэтому учет продольных волн для уточнения модели имеет первостепенное значение. В то же время модель эластографии, в которой используется модель несжимаемого неоднородного упругого тела, может быть с успехом использована для совершенствования методик оценки упругих свойств, в первую очередь модуля сдвига.

Для уточнения оценок свойств тканей в настоящей работе использована модель несжимаемой упругой среды с переменными характеристиками - модулем сдвига и плотностью, сформулирована соответствующая краевая задача для оператора второго порядка с переменными коэффициентами, на базе которой исследованы две обратные задачи (по восстановлению переменного модуля сдвига при известной плотности и восстановлению двух переменных характеристик) по измеренному внутри области измерений полю деформаций, причем для возбуждения волновых процессов использован один из наиболее употребительных способов (сдвиговые колебания поверхности, либо фокусированный ультразвуковой пучок).

Обратимся к слабой постановке (6), которую можно использовать для исследования различных типов задач. Особенность постановки задачи при использовании информации о полях смещений внутри объекта состоит в том, что необходимо восстановить свойства области $V_0 \subset V$, причем поля смещений u_i известны всюду в V и, кроме того, известны свойства упругого тела в V / V_0. Такая постановка описывает суть проблемы и для ситуации, когда есть выраженная граница между областями с различными характеристиками, и когда эта граница слабо прослеживается. Отметим также, что плотность мягких тканей (нормальных и патологически измененных отличается не более, чем на 10%), а модуль сдвига может отличаться на порядок. Таким образом, в рамках предположений (несжимаемость и постоянство плотности) для определения модуля сдвига на основе предыдущих построений имеем интегральное уравнение Фредгольма 1 рода с гладким ядром следующего вида

$$\int_V \mu(u_{i.j} + u_{j,i})(u_{i.j} + u_{j,i}) dV = \rho\omega^2 \int_V u_i u_i dV + \int_{S_\sigma} p_i u_i dS \qquad (13)$$

Заметим, что ядро этого уравнения является положительно определенным. Также отметим, что это уравнение может быть упрощено, если выделить отдельно область V / V_0, свойства ткани в которой известны и записать уравнение (13) для области V_0, в которой μ неизвестно. Отметим две трудности (или две некорректные подзадачи) в решении интегрального уравнения вида (13) или его аналога. Во-первых, вычисление частных производных от измеренных смещений представляет первую некорректную задачу, которая может быть решена при помощи использования сплайн-аппроксимаций, а обращение вполне непрерывного оператора вида (13) представляет собой вторую некорректную подзадачу, которая обычно решается с помощью метода регуляризации А. Н. Тихонова.

Отметим, что для уравнения (13) несложно установить и единственность определения модуля сдвига в классе кусочно-монотонных функций. Допустим, что имеется два решения интегрального уравнения (13) μ_1 и μ_2. Сформулируем однородное интегральное уравнение относительно функции $\mu_* = \mu_1 - \mu_2$. Оно имеет вид

$$\int_{V_0} \mu_*(x) R(x,\omega) dV = 0 \tag{14}$$

Здесь $R(x,\omega) = (u_{i.j} + u_{j,i})(u_{i.j} + u_{j,i})$ - неотрицательное ядро, которое может обращаться в ноль только тогда, когда деформации равны нулю, что соответствует движению как твердого целого. В силу кусочной монотонности функция $\mu_*(x)$ может принимать значения разных знаков. Введем в рассмотрение разбиение $V_0 = V_{0+} \bigcup V_{0-}$, считая, что $\mu_* \geq 0$ на V_{0+}, а $\mu_* \leq 0$ на V_{0-}. Введем в рассмотрение неотрицательную функцию $\mu_{**} = \mu_*$ при $x \in V_{0+}$ и $\mu_{**} = -\mu_*$ при $x \in V_{0-}$. Тогда из (14) получим равенство $\int_{V_0} \mu_{**}(x) R(x,\omega) dV = 0$, откуда следует в силу положительности ядра μ_{**}=0, что и доказывает единственность решения уравнения (13).

Замечание 2. Кроме того, для уточнения модели и учета реального затухания в мягких тканях можно использовать подобный подход для оператора второго порядка с переменными комплексными коэффициентами в рамках концепции комплексных модулей, в которой принимается, что описания колебаний вязкоупругой среды необходимо в упругих постановках заменить упругие модули комплексными функциями, зависящими от частоты колебаний $\lambda = \lambda^*(x, i\omega),\ \mu = \mu^*(x, i\omega)$, которые формируются обычно в рамках модели стандартного вязкоупругого тела и представляющие собой дробно-рациональные функции частоты.. В рамках такого подхода получено интегральное уравнение с вполне-непрерывным оператором вида (13) с комплексным ядром и комплекснозначной неизвестной функцией, которое исследуется в рамках обобщенного метода регуляризации А.Н.Тихонова.

Заключение. В работе изложены способы идентификации свойств неоднородных упругих структур - функционально-градиентных материалов и биологических тканей на основе различных постановок. При этом дополнительная информация задается либо на границе тела , либо внутри него. Представлены способы исследования линейных и нелинейных операторных уравнений с вполне-непрерывными операторами на основе формирования итерационных процессов и методов регуляризации, приведены примеры для цилиндрических структур - стержней и цилиндров.

Литература

1. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач, М.: Наука, 1986. 288с
2. Яхно В.Г. Обратные коэффициентные задачи для дифференциальных уравнений упругости. - Новосибирск: Наука, 1990. - 304 с.
3. Bui H.D. Inverse Problems in the Mechanic of Materials: An Introduction. - CRC Press, Boca Raton, FL, 1994. - 224 p.
4. Isakov V. Inverse problems for PDE. - Springer-Verlag, 2005. - 284 p.
5. Marc Bonnet, A. Constantinescu. Inverse problems in elasticity. Inverse Problems, IOP Publishing, 2005, 21, pp.R1-R50. 10.1088/0266-5611/21/2/R01. hal-00111264
6. Юрко В. А. Введение в теорию обратных спектральных задач. М.: Физматлит, 2007. 384с.
7. Глэдвелл Г.М.Л. Обратные задачи теории колебаний. М.:-Ижевск, Регулярная и хаотическая динамика. Институт компьютерных исследований. 2008. 608с.
8. Bal G. Introduction to Inverse Problems. – N-Y: Columbia University, 2012. - 205 p.
9. Neto F.D.M., Neto A.J.S. An Introduction to Inverse Problems with Applications. - Berlin: Springer, 2013. - 255 p
10. Кабанихин С.И. Обратные и некорректные задачи. Новосибирск: ФГУП "Издательство СО РАН", 2018. -512 с.
11. Тихонов А.Н., Гончарский А.В., Степанов В.В., Ягола А.Г. Численные методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1990. -230 с.
12. Самарский А.А., Вабищевич П.Н. Численные методы решения обратных задач математической физики. - М.: Едиториал УРСС, 2004. - 480 с.
13. Ватульян А. О. Коэффициентные обратные задачи механики. М.: Физматлит, 2019. -272с.
14. Хатсон В., Пим Дж. Приложения функционального анализа и теории операторов. М.: Мир, 1983. -432с.
15. Perkowski Z., Czabak M. Description of behaviour of timber-concrete composite beams including interlayer slip, uplift, and long-term effects: Formulation of the model and coefficient inverse problem// Engineering Structures. 2019. 194. P.230-
16. Dudarev, V.V., Vatulyan, A.O., Mnukhin, R.M., Nedin, R.D. Concerning an approach to identifying the Lamé parameters of an elastic functionally graded cylinder // Mathematical Methods in the Applied Sciences7/30/2020, V. 43 Is. 11, p 6861-6870,
17. Vatulyan, A.O., Dudarev V.V., Mnukhin, R.M. Identification of characteristics of a functionally graded isotropic cylinder// International Journal of Mechanics and Materials in Design, 2021, 17(2), pp. 321–332 .
18. Vatulyan, A.O., Yurov, V.O. On the reconstruction of material properties of a radially inhomogeneous cylindrical waveguide// Mathematical Methods in the Applied Sciences 2021 44(6), pp. 4756–4769
19. Ватульян А. О., Юров В. О. Об определении механических характеристик стержневых элементов из функционально-градиентных материалов// Изв. РАН, МТТ, 2021. №4, С. 52–63
20. Богачев И. В., Ватульян А. О., Дударев В. В. Об одном методе идентификации свойств многослойных мягких биологических тканей// Российский журнал биомеханики 2013, т.17, №3, С.37-48.

21. Sinkus, R., Lorenzen, J., Schrader, D., Lorenzen, M., Dargatz, M., Holz D.,. High-resolution tensor MR elastography for breast tumour detection. // Phys. Med. Biol. 2000 Jun; 45(6): 1649-64. doi: 10.1088/0031-9155/45/6/317.
22. Manduca A., Oliphant T.E., Dresner M.A., Mahowald J.LKruse., S.A.,. Amromin E, Felmlee J.P. Greenleaf., J.F, Ehman R.L. // Magnetic resonance elastography: Non-invasive mapping of tissue elasticity. Medical Image Analysis 5 (2001) pp.237–254.
23. Сарвазян А. П. Низкочастотные акустические характеристики биологических тканей. // Механика полимеров 1975; №4. С.691-695.
24. Sarvazyan, A., Goukassian, D., Maevsky, G., 1994. Elasticity imaging as a new modality of medical imaging for cancer detection. //In: Proceedings of an International Workshop on Interaction of Ultrasound with Biological Media, pp. 69–81.
25. Сарвазян А. П., Руденко О. В., Свенсон С. Д., Фаулкс Ю. Б., Емельянов С. Ю. Упругая визуализация сдвиговых волн: новая ультразвуковая технология медицинской диагностики. // УЗИ Мед. Биол.1998; 24:С. 1419-1435.
26. Arani A, Manduca A, Ehman RL, Huston III J. Harnessing brain waves: a review of brain magnetic resonance elastography for clinicians and scientists entering the field. //Br J Radiol 2021; 94: 20200265.
27. Кристенсен Р. Введение в теорию вязкоупругости. М.: Мир, 1974. 340 с.

<u>Сведения об авторе:</u>

Ватульян Александр Ованесович - доктор физ.мат. наук, профессор, заведующий кафедрой теории упругости Южного федерального университета.
E-mail: vatulyan@aaanet.ru

Поступила в редакцию 29.03.2022