

**ОБ УСИЛЕНИИ В ТОЧКЕ И ОБ УСИЛЕНИИ
ПО НАПРАВЛЕНИЮ В ДИФРАКЦИОННОЙ КАРТИНЕ
ФРАУНГОФЕРА СИСТЕМЫ ИЗ
МНОГИХ ВОЛНОВЫХ ИСТОЧНИКОВ**

А.Ж. ХАЧАТРЯН*

Государственный инженерный университет Армении, Ереван, Армения

*e-mail: ashot.khachatrian@gmail.com

(Поступила в редакцию 3 января 2022 г.)

В работе обсуждается вопрос о характере усиления по направлению волнового движения, генерированного системой из точечных когерентно излучающих источников. Доказано, что в картине Фраунгофера данное усиление не имеет точечный характер, а производит во всех точках фронтальной части области наблюдения, причем на одинаковую величину. Найдены условия, при которых волновое поле в пределах площадки, перпендикулярной к направлению наблюдения и соразмерной с поперечными размерами области источников, может быть аппроксимировано плоской волной. Показано, что в ряде случаев для получения локального максимума (максимум в точке) в дифракционных опытах необходимо наличие собирающей линзы.

1. Введение

Как известно, суперпозиционное поле системы когерентных точечных источников, когда рассеянием излучения на самих источниках можно пренебречь, сводиться к исследованию следующей суммы:

$$U(\mathbf{R}, t) = \sum_{p=1}^N \frac{a_0}{L_p} \cos[\omega t - kL_p + \gamma_j], \quad (1)$$

где N есть количество источников системы, a_0 – амплитуда сферической волны, а вектор \mathbf{R} указывает точку наблюдения. Здесь L_j есть расстояние j -ого источника до точки наблюдения. Величины γ_j являются начальными значениями фаз генерации волн на источниках. Соответственно, величины ω и k будут являться частотой и волновым вектором генерированного поля.

Одна из основных задач теории волн, а именно ее раздела дифракции, заключается в исследовании суммы (1), а именно, определения возможных направлений и точек усиления или ослабления волнового возмущения, в зависимости от расположения источников и начальных фаз генерации волн на них. Рассмотрение данной задачи в общем виде сопряжено с большими математическими

трудностями, которые удастся преодолеть, прибегая, разве что, к численным расчетам [1–8]. Вместе с тем, при определенных предположениях задача допускает аналитическое рассмотрение, на основе которых возможно проведение качественных суждений, а также получение целого ряда количественных результатов. С прикладной, а также теоретической точки зрения одним из наиболее ценных методов приближенного описания суперпозиционного поля является метод Фраунгофера. Как известно, в подходе Фраунгофера картина поля посредством построений системы параллельных лучей (см., например, [9,10]). Так, если разность хода параллельных лучей, в каком либо направлении кратна длине волны λ ($\lambda = 2\pi / k$), то в данном направлении лучи усиливают друг друга. В противном случае в данном направлении волны частично или полностью гасят друг друга.

Несмотря на повсеместное применение, выше отмеченный метод Фраунгофера описания суперпозиционного поля на основе построений параллельных лучей, на наш взгляд, требует более детального рассмотрения. Это в первую очередь связано с тем обстоятельством, что согласно геометрии Эвклида параллельные прямые не имеют точки пересечения, т.е. параллельные лучи нигде не сходятся. Из чего, очевидным образом, следует, что вопрос о взаимном усилении или ослаблении волн в точке при построениях Фраунгофера, вообще-то говоря, лишён смысла. Смысл приобретает только лишь в контексте направлений наблюдения и этот факт как бы везде умалчивается.

2. Результаты и обсуждения

Основой для ниже следующего рассмотрения будет служить развитый недавно автором подход [11], для описания суперпозиционного поля, генерированного системой многих источников. Согласно работе [11], в традиционно применяемом для описания суперпозиционного поля Фраунгоферовом приближении в фазах суммируемых волн для указания месторасположений источников обычно ограничиваются линейным по координатам приближением. Вместе с тем, особенно, при рассмотрении распределения интенсивности поле вблизи и на самой точке фронтального наблюдения необходимо руководствоваться приближением квадратичным по координатам.

Пусть по основному направлению наблюдения выбрана одна из осей прямоугольной системы координат, например, ось Z . Для определенности, далее мы будем полагать, что наблюдение проводится в точках с $z > 0$, так что вектор \mathbf{R} , указывающий в (1) положение точки наблюдения, может быть представлен в виде:

$$\mathbf{R} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + L\mathbf{e}_z, \quad (2)$$

$L = z$ – положительная величина, а $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ есть единичные безразмерные вектора, указывающие положительные направления координатных осей. Для указания месторасположения источников мы примем следующие обозначения:

$$\mathbf{r}_p = x_p\mathbf{e}_x + y_p\mathbf{e}_y + z_p\mathbf{e}_z, \quad (3)$$

где x_p, y_p, z_p есть X, Y, Z координаты j – ого источника. Используя (2), (3) для расстояний L_j в выражении (1) можем написать:

$$L_p = |\mathbf{R} - \mathbf{r}_p| = \sqrt{(L - z_p)^2 + (x - x_p)^2 + (y - y_p)^2}. \quad (4)$$

Используя (4) суперпозиционное поле (1) может быть также записано в виде:

$$U(\mathbf{R}, t) = \sum_{p=1}^N \frac{a_0}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}_p|} \cos[\omega t - k|\mathbf{R} - \mathbf{r}_p| + \gamma_p]. \quad (5)$$

В соответствии с результатами работы [11], при выполнении условий малости области источников и поперечных размеров области наблюдения, т.е.

$$|x_p|, |y_p|, |z_p| \ll L \text{ и } |x|, |y| \ll L, \quad (6)$$

а также малости безразмерных параметров:

$$\frac{x_p^2 k}{L}, \frac{y_p^2 k}{L} \ll 2\pi \text{ и } \frac{x^2 k}{L}, \frac{y^2 k}{L} \ll 2\pi, \quad (7)$$

для суперпозиционного поля (1) применимо соответствующее картине Фраунгофера следующее приближенное описание:

$$U(\mathbf{R}, t) = \frac{a_0}{L} \sum_{p=1}^N \cos[\omega t + \Delta_p], \quad (8)$$

где

$$\Delta_p = -kz_p + \frac{[x_p^2 + y_p^2] - 2[xx_p + yy_p]}{2L} k - \gamma_p. \quad (9)$$

Заметим, что в неравенствах (7) безразмерные параметры являются волновыми параметрами области источников и области наблюдения, соответственно. Как видно из (8), (9) в картине Фраунгофера проявляется квадратичная зависимость суперпозиционного поля от поперечных координат излучателей. Однако, как будет показано ниже, при более грубом приближении рассмотрение может быть ограничено только линейными членами по x_p, y_p .

Действительно применяя к выражению (8) известное тригонометрическое соотношение о косинусе суммы двух углов получим:

$$\begin{aligned} U(\mathbf{R}, t) = & \frac{a_0}{L} \sum_{p=1}^N \cos\left[\frac{x_p^2 + y_p^2}{2L} k\right] \cos\left[\omega t - kz_p - \frac{xx_p + yy_p}{L} k\right] \\ & - \frac{a_0}{L} \sum_{p=1}^N \sin\left[\frac{x_p^2 + y_p^2}{2L} k\right] \sin\left[\omega t - kz_p - \frac{xx_p + yy_p}{L} k\right]. \end{aligned} \quad (10)$$

Так как

$$\frac{x_p^2 + y_p^2}{2L} k \geq 0,$$

а также то, что, в соответствии с условием (7), данная дробь является малой величиной, то для всех значений p можем написать:

$$\cos\left[\frac{x_p^2}{2L}k\right] \approx 1 \text{ и } \sin\left[\frac{x_p^2}{2L}k\right] \approx 0. \quad (11)$$

Используя (11) для (10) можем написать:

$$U(\mathbf{R}, t) = \frac{a_0}{L} \sum_{p=1}^N \cos\left[\omega t - kz_p - \frac{xx_p + yy_p}{L}k\right]. \quad (12)$$

Как видно из данной формулы при более грубом рассмотрении в рамках приближения Фраунгофера зависимость фаз сферических волн от положений источников может рассматриваться линейной.

Суть метода описания суперпозиционного поля на основе построений для различных направлений системы параллельных лучей хорошо известен и он заключается в следующем. Проведем из точек расположения источников систему параллельных прямых параллельных некоторому выбранному направлению. Если разности ходов волн по данным прямым кратны длине волны, то в данном направлении имеет место усиление волн. В противном случае в данном направлении волны частично или полностью гасят друг друга.

В контексте вышесказанного представляется резонным следующий вопрос. Если говорить об усилении по направлению, следует ли полагать, что одновременно усиливаются все лучи исходящие от различных источников. Если да, то является ли данное усиление однородным, т.е. все лучи усиливаются на одинаковую величину. Если усиление является неоднородным, то какой из лучей усиливается наиболее сильно, а какой наиболее слабо.

Для детального обсуждения вопросов связанных с картиной усиления по направлению обратимся к Рис.1, на котором изображена некоторая система из точечных источников, из которых проведена совокупность направленных в одну сторону и параллельных друг другу параллельных лучей. Для удобства из сово-

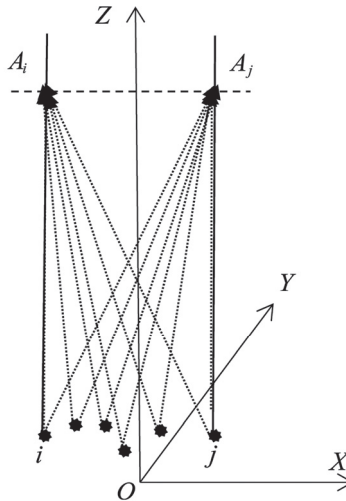


Рис.1. Наложение волн источников системы в точках пересечения двух параллельных лучей с плоскостью наблюдения.

купности параллельных лучей мы изобразили только два, а их направление указали вертикальной осью Z . Пунктир на рисунке соответствует плоскости наблюдения, которая является перпендикулярной лучам направления наблюдения. Из сказанного следует, что плоскость наблюдения параллельна плоскости (X, Y) . Направленными отрезками указаны исходящие из источников лучи, которые сходятся в точках пересечения плоскости наблюдения с параллельными лучами i -ого и j -ого источников. На рисунке данные точки обозначены, как A_i и A_j .

Для облегчения дальнейшего рассмотрения мы ограничимся следующим частным случаем, когда все источники расположены на одной прямой, например, X , а также начальные фазы генерации волн для всех источников равны нулю; $z_p = 0$, $y_p = 0$ и $\gamma_p = 0$. Тогда, с учетом (9), выражение для волнового поля (12) примет вид:

$$U(\mathbf{R}, t) = \frac{a_0}{L} \sum_{p=1}^N \cos \left[\omega t - \frac{2xx_p}{2L} k \right]. \quad (13)$$

Ясно, что при таком рассмотрении система источников является не чем иным, как обыкновенной дифракционной решеткой, на которую перпендикулярно падает плоская волна.

Покажем теперь, что в случае периодически расположенных излучателей, т.е. когда

$$x_p = x_{p-1} + b, \quad (14)$$

где b есть период, то выражение (13) будет определять плоскую волну. Для удобства примем, что цепочка излучателей симметрична относительно центра координат;

$$x_p = pb - \frac{N+1}{2}b. \quad (15)$$

Используя (15) для (12) получим

$$U(\mathbf{R}, t) = \frac{a_0}{L} \frac{\sin \left[\frac{bx}{2L} Nk \right]}{\sin \left[\frac{bx}{2L} k \right]} \cos[\omega t]. \quad (16)$$

Хотя в данном выражении проявляется зависимость от x , вместе с тем $U(\mathbf{R}, t)$ (16) представляет собой плоскую волну т.к. аргументы в синусах в соответствии с условием (7) представляют собой малые величины. Действительно, область изменения переменной x ограничена фронтальной частью области наблюдения, т.е. интервалом (x_1, x_N) , а значение bN порядка $x_N - x_1$. Из сказанного следует, что выражение (1) принимает вид:

$$U(\mathbf{R}, t) = \frac{a_0 N}{L} \cos[\omega t]. \quad (18)$$

Это есть не что иное, как плоская волна, фаза которой по оси X равна нулю.

Таким образом, генерированное дифракционной решеткой волновое поле в пределах фронтальной части области наблюдения может рассматриваться как некая часть плоской волны. Последнее означает, что все параллельные лучи, исходящие из источников усиливаются на одинаковую величину. Из сказанного также следует, что, говоря о дифракционной картине, всегда следует иметь в виду, что это не есть максимум в точке, т.к. данное значение принимают все точки фронтальной части области наблюдения. Поэтому, в дифракционных опытах для осуществления перехода максимума по области в точечный максимум используется соответствующая линза.

Представляется интересным рассмотрение характера суперпозиционного поля (13) получаемого на дифракционной решетке не только по направлению по нормали, но и под определенным углом (см. Рис.2). Пусть наблюдение производится по направлению оси Z' , составляющей с осью Z некоторый угол α . Для данного направления на рисунке указана перпендикулярная к ней плоскость наблюдения σ' . Так как представленные выше формулы (см. (8), (9) и (12)) являются верными для любого направления наблюдения, то для волнового поля на плоскости наблюдения σ' по оси X' можем написать:

$$U(\mathbf{R}, t) = \frac{a_0}{L} \sum_{p=1}^N \cos \left[\omega t - kz'_p - \frac{x'x'_p}{L} k \right], \quad (19)$$

где z'_p, x'_p являются координатами источников на соответствующих осях. Заметим, что, применимость формулы (19) предполагает выполнение условий (см. (6), (7)):

$$|x'_p|, |y'_p|, |z'_p| \ll L \text{ и } |x'|, |y'| \ll L, \quad (20)$$

а также, что

$$\frac{x_p'^2 k}{L}, \frac{y_p'^2 k}{L} \ll 2\pi \text{ и } \frac{x'^2 k}{L}, \frac{y'^2 k}{L} \ll 2\pi, \quad (21)$$

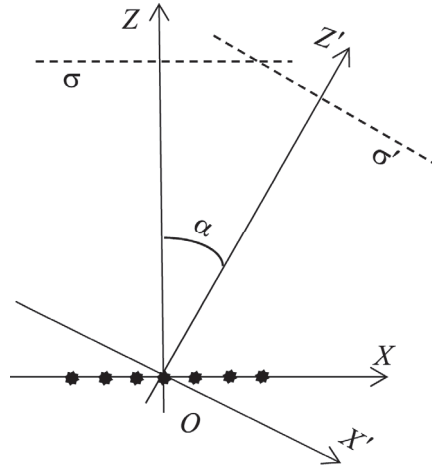


Рис.2. Усиление волн под углом к оси периодической дифракционной решетки.

где величина L является расстоянием от начала координат, до плоскости наблюдения σ' .

Как легко увидеть из Рис.2 между координатами источников для двух систем координат действует следующая связь:

$$x'_p = x_p \cos \alpha, \quad z'_p = x_p \sin \alpha. \quad (22)$$

Используя (22), а также учитывая (15) легко увидеть, что

$$kz'_p = \frac{b \sin \alpha}{\lambda} \left(p - \frac{N+1}{2} \right) 2\pi. \quad (23)$$

Как следует из данного равенства, при условии

$$\frac{b \sin \alpha}{\lambda} = m, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (24)$$

произведение kz'_p представляется кратным 2π и, следовательно, (19) можно получить:

$$U(\mathbf{R}, t) = \frac{a_0}{L} \sum_{p=1}^N \cos \left[\omega t - \frac{x'_p k}{L} \right]. \quad (25)$$

Как видно данное выражение полностью идентично выражению (13) для суперпозиционного поля в направлении Z . Следовательно, суперпозиционное поле в направлении Z' также является плоской волной. Ясно, что (24) есть не что иное, как условие, определяющее направления главных максимумов дифракционной картины [9].

3. Заключение

Таким образом, мы показали, что в метод Фраунгофера описания суперпозиционного поля на основе построения совокупности параллельных лучей правомерен только лишь в том случае, когда зависимость фаз сферических волн от положений источников может считаться линейной. На примере известной дифракционной задачи для одномерной периодической решетки показано, что в этом приближении, когда в некотором направлении разность хода кратна длине волны все исходящие из щелей параллельные лучи усиливаются на одну и ту же величину. Следовательно, для получения в дифракционном опыте из усиления по направлению усиление волн в точке наличие линзы.

ЛИТЕРАТУРА

1. S. Taravati, G.V. Eleftheriades. Applied Physics, **12**, 024026 (2019).
2. E. Luna, V. Khoze, A. Martin, M. Ryskin. Eur. Phys. J. C, **59**, 4115 (2009).
3. Y. Gao, Ch. Zu, X. Xie, X. Yu. Phys. Rev. A, **103**, 033519 (2021).
4. Y.Z. Umul. Advanced Electromagnetics, **10**(2), 78 (2021).
5. T. Nobukawa, Yu. Katano, M. Goto, T. Muroi, N. Kinoshita, Yo. Iguchi, N. Ishii. JOSA, **38**, 924 (2021).

6. **B. Chen, C. Basara.** Optics and Lasers in Engineering, **50**, 1168 (2012).
7. **R. Karl, Ch. Bevis, R. Lopez-Rios, J. Reichenadter, D. Gardner, Ch. Porter, E. Shanblatt, M. Tanksalvala, G.F. Mancini, M. Murnane, H. Kapteyn, D. Adams.** Optics Express, **23**, 30250 (2015).
8. **В.П. Будак, Д.С. Ефременко, П.А. Смирнов.** Светотехника, **4**, 55 (2020).
9. **Г.С. Горелик.** Колебания и волны, Москва: Физматлит, 2007.
10. **Е.И. Бутиков.** Оптика, Москва: Высшая Школа, 1986.
11. **А.Ж. Хачатрян.** Изв. НАН Армении, Физика, **56**, 470 (2021).

ԲԱԶՄԱԿԻ ԱԼԻՔԱՅԻՆ ԱՂԲՅՈՒՐՆԵՐԻ ՖՐԱՈՒՆՀՈՖԵՐԻ
ԴԻՖՐԱԿՑԻՈՆ ՊԱՏԿԵՐՈՒՄ ԿԵՏՈՒՄ ՈՒԺԵՂԱՅՄԱՆ
ԵՎ ՈՒՂՂՈՒԹՅԱՆ ՈՒԺԵՂԱՅՄԱՆ ՎԵՐԱԲԵՐՅԱԼ

Ա.Ժ. ԽԱՉԱՏՐՅԱՆ

Աշխատանքում քննարկված է կոհերենտ ճառագայթով կետային աղբյուրների համակարգի կողմից գեներացված ալիքային շարժման ըստ ուղղության ուժեղացման հարցը: Ապացուցվել է, որ Ֆրաունհոֆերյան պատկերում այդ ուժեղացումը չունի կետային բնույթ: Այն ընթանում է դիտման տիրույթի դիմային մասի բոլոր կետերում, ընդ որում նույն չափով: Որոշվել են այն պայմանները որի դեպքում ալիքային դաշտը դիտման ուղղությանը ուղղահայաց և աղբյուրների տիրույթների լայնական չափերի համաչափ արտաքին տիրույթում հնարավոր է դիտարկել իբրև հարթ ալիք: Ցույց է տրվել որ մի շարք դեպքերում լոկալ մաքսիմումի մաքսիմումի կետում դիֆրակցիոն փորձերում անհրաժեշտ է հավաքող ոսպնյակի առկայություն:

GAIN AT A POINT AND GAIN IN A DIRECTION FOR THE FRAUNHOFER
DIFFRACTION PATTERN OF A SYSTEM OF MANY WAVE SOURCES

A.ZH. KHACHATRIAN

The paper discusses the nature of the amplification in the direction of wave motion generated by a system of point coherently emitting sources. It is proved that in the Fraunhofer picture this amplification does not have a point nature, but produces at all points of the frontal part of the observation area, and by the same amount. The conditions are found under which the wave field within the area perpendicular to the direction of observation and commensurate with the transverse dimensions of the source region can be approximated by a plane wave. It is shown that in a number of cases, to obtain a local maximum (maximum at a point) in diffraction experiments, it is necessary to have a collecting lens.