Известия НАН Армении, Математика, том 57, н. 2, 2022, стр. 30 – 43.

ОПЕРАТОРЫ $\mathcal{L}$-ВИНЕРА-ХОПФА В ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ В СЛУЧАЕ БЕЗОТРАЖАТЕЛЬНОГО ПОТЕНЦИАЛА

А. Г. КАМАЛЯН, Г. А. КИРАКОСЯН

https://doi.org/10.54503/0002-3043-2022.57.2-0-43

Институт Математики, Национальная Академия Наук Армении
Ереванский государственный университет
E-mails: *kamalyan_armen@yahoo.com*; *grigor.kirakosyan.99@gmail.com*

Аннотация. Заменой в определении оператора свертки преобразования Фурье спектральным преобразованием оператора Штурма-Лиувилля $\mathcal{L}$, порожденного безотражательным потенциалом, вводится понятие оператора $\mathcal{L}$-Винера-Хопфа в лебеговых пространствах с весом Макенхаупта. Получены критерии фредгольмовости и обратимости и формула для индекса в случае кусочно-непрерывного символа.

MSC2020 number: 47G10; 47B35.

Ключевые слова: безотражательный потенциал; оператор $\mathcal{L}$-Винера-Хопфа; оператор Фредгольма.

1. Введение

Заменой в классическом определении оператора свертки преобразования Фурье спектральным преобразованием самосопряженного оператора Штурма-Лиувилля в работе [1] введены понятия оператора $\mathcal{L}$-свертки и оператора $\mathcal{L}$-Винера-Хопфа, действующих в пространствах L_p. В случае когда потенциал соответствующего уравнения Штурма-Лиувилля является нулевым, эти операторы совпадают соответственно с оператором свертки и оператором Винера-Хопфа. В работах [2] – [5] при различных предположениях относительно символа, изучены свойства фредгольмовости и обратимости оператора $\mathcal{L}$-Винера-Хопфа в том случае, когда потенциал является безотражательным. Напомним, что оператор $A : X \to Y$, где X, Y – банаховы пространства, называется фредгольмовым, если его образ замкнут (т.е. $\operatorname{Im} A = \overline{\operatorname{Im} A}$), и конечномерны его ядро $\ker A := \{x \in X : Ax = 0\}$ и коядро $\operatorname{Coker} A := {}^{Y}/_{\operatorname{Im} A}$. Число $\operatorname{Ind} A := \dim\ker A - \dim\operatorname{Coker} A$ называют индексом оператора A, а множество $\{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda I$ не фредгольмов$\}$ существенным спектром оператора A.

Пусть E либо $\mathbb{R}$, либо $\mathbb{R}_\pm := \{\pm x > 0 : x \in \mathbb{R}\}$, и $w : E \to [0, \infty]$ весовая функция (т.е. измеримая функция такая, что лебегова мера множества $w^{-1}\{0, \infty\}$ равна нулю), а $L_p(E, w)$, $1 < p < \infty$, лебегово пространство с нормой

$$\|f\|_{p,w} = \|fw\|_p = \left(\int\limits_E |f(x)|^p \, w(x)^p \, dx \right)^{1/p}.$$

Через $A_p(\mathbb{R})$, $1 < p < \infty$, будем обозначать множество весов на $\mathbb{R}$, удовлетворяющих известному условию A_p:

$$\sup \left(\frac{1}{|\mathrm{I}|} \int\limits_{\mathrm{I}} w(x)^p \, dx \right)^{1/p} \left(\frac{1}{|\mathrm{I}|} \int\limits_{\mathrm{I}} w(x)^{-q} \, dx \right)^{1/q} < \infty,$$

где I пробегает все ограниченные интервалы вещественной прямой $\mathbb{R}$, $|\mathrm{I}|$ – длина интервала I и $1/p + 1/q = 1$.

Данная работа посвящена исследованию задачи фредгольмовости оператора $\mathcal{L}$-Винера-Хопфа в пространстве $L_p(\mathbb{R}_+, w) := L_p(\mathbb{R}_+, w|_{R_+})$ в случае когда $w \in A_p(\mathbb{R})$. Получены критерии фредгольмовости и формула для вычисления индекса в случае кусочно-непрерывного (непрерывного) символа оператора $\mathcal{L}$.

2. Спектральное преобразование. Данные рассеяния

Пусть $\mathcal{L}$ – самосопряженный в $L_2(\mathbb{R})$ оператор, порожденный дифференциальным выражением

$$(\ell y)(x) = -y''(x) + v(x)y(x), \qquad x \in \mathbb{R}, \tag{2.1}$$

где

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} (1 + |x|) \; v(x) \, dx < \infty. \tag{2.2}$$

Важную роль (см., например, [6] – [8]) в спектральной теории оператора $\mathcal{L}$ и, в частности, в обратной задаче теории рассеяния на оси, уравнения

$$\ell y = \lambda^2 y, \tag{2.3}$$

играют решения Йоста, т.е. решения $e_+(x, \lambda)$ ($x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{Im}\lambda \geq 0$) и $e_-(x, \lambda)$ ($x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{Im}\lambda \leq 0$) определяемые граничными условиями

$$\lim_{x \to \pm\infty} e^{-i\lambda x} e_\pm(x, \lambda) = 1, \quad \lim_{x \to \pm\infty} e^{-i\lambda x} e'_\pm(x, \lambda) = i\lambda.$$

Эти решения (см. [6] – [8]) допускают представление

$$e_\pm(x,\lambda) = (\mathrm{I} + \mathcal{K}_\pm)(e^{i\lambda x}), \qquad \lambda \in \mathbb{R}, \tag{2.4}$$

где операторы преобразования $\mathrm{I} + \mathcal{K}_\pm$ действуют по формулам

$$((\mathrm{I} + \mathcal{K}_+)y)(x) = y(x) + \int_x^\infty K_+(x,t)\, y(t)\, dt$$

$$((\mathrm{I} + \mathcal{K}_-)y)(x) = y(x) + \int_{-\infty}^x K_-(x,t)\, y(t)\, dt \tag{2.5}$$

и ограничены соответственно в пространствах $L_p(\gamma,\infty)$ и $L_p(-\infty,\gamma)$, $1 \le p \le \infty$, при всех $\gamma \in \mathbb{R}$. Ядра $K_+(x,t)$, $-\infty < x \le t < \infty$ и $K_-(x,t)$, $-\infty < t \le x < \infty$ удовлетворяют известным уравнениям Гельфанда-Левитана-Марченко (см. [6] – [8]).

При вещественных значениях $\lambda \ne 0$ пары функций $e_+(x,\lambda)$, $e_+(x,-\lambda)$ и $e_-(x,\lambda)$, $e_-(x,-\lambda)$ образуют фундаментальные системы решений (2.3). В частности

$$e_+(x,\lambda) = b(\lambda) e_-(x,-\lambda) + b_0(\lambda) e_-(x,\lambda).$$

Функция $b_0(\lambda)$ аналитична в верхней полуплосткости $\operatorname{Im}\lambda > 0$ и имеет там лишь конечное число простых нулей $i\mu_k$ ($\mu_k > 0$, $k = 1, \ldots N$) которые лежат на мнимой полуоси.

Дискретный спектр оператора $\mathcal{L}$ совпадает с множеством $\{(i\mu_1)^2, \ldots, (i\mu_N)^2\}$.

Каждое собственное значение $\lambda_k = (i\mu_k)^2$ $(k = 1, \ldots, N)$ является простым и ему соответствуют правая собственная функция $e_+(x, i\mu_k)$ и линейно зависимая от нее левая собственная функция $e_-(x, -i\mu_k)$ (см. [6] – [8]). Функция $t(\lambda) = b_0^{-1}(\lambda)$ $(\lambda \in \mathbb{R})$ называется коэффициентом прохождения. Решения уравнения (2.3),

$$u_\mp(x,\lambda) := t(\lambda)\, e_\pm(x, \pm\lambda) \tag{2.6}$$

порождают интегралы

$$(U_\mp y)(\lambda) = \int_{-\infty}^\infty u_\mp(x,\lambda)\, y(x)\, dx, \qquad \lambda \in \mathbb{R}, \tag{2.7}$$

которые сходятся по норме $L_2(\mathbb{R})$ и определяют ограниченные операторы $U_\mp : L_2(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{R})$ (см. [6], а также [1]).

Далее, мы через $m(a)$ будем обозначать действующий в функциональных пространствах оператор умножения на функцию a $(m(a)y := ay)$, а через $J : L_2(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{R})$ оператор действующий по формуле $(Jy)(x) = y(-x)$.

Под спектральным преобразованием оператора $\mathcal{L}$ мы понимаем оператор

$$U := m(\chi_+)U_- + m(\chi_-)JU_+ : L_2(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{R}), \tag{2.8}$$

где χ_+ (χ_-) – характеристическая функция $\mathbb{R}_+$ $(\mathbb{R}_-)$. Оператор U удовлетворяет равенствам

$$U^*U = \mathrm{I} - P, \quad UU^* = \mathrm{I},$$

где I – единичный оператор, а P – ортогональный проектор в $L_2(\mathbb{R})$ на собственное подпространство соответствующее дискретному спектру оператора $\mathcal{L}$ (см. [6], [1]).

В случае $v = 0$, оператор U совпадает с преобразованием Фурье $F : L_2(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{R})$:

$$(Fy)(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x} y(x) dx.$$

Заметим также (см. [6] и [1]), что на всюду плотном в $L_2(\mathbb{R})$ множестве имеет место равенство

$$U\mathcal{L}U^* = m(\lambda^2).$$

Функции $r^-(\lambda) = b(\lambda)t(\lambda)$ и $r^+(\lambda) = -b(-\lambda)t(\lambda)$ называются соответственно левым и правым коэффициентами отражения.

Обратные величины норм собственных функций

$$m_k^{\pm} := \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} \left| e_{\pm}(x, \pm i\mu_k) \right|^2 dx \right)^{-1/2}$$

называют нормирующими множителями, а наборы величин $\{r^+(\lambda), i\mu_k, m_k^+; k = 1, \ldots, N\}$ и $\{r^-(\lambda), i\mu_k, m_k^-; k = 1, \ldots, N\}$ называют соответственно правым и левым данными рассеяния.

Обратная задача теории рассеяния уравнения (2.3) состоит в восстановлении потенциала по левым или правым данным рассеяния и нахождении необходимых и достаточных условий, которым должен удовлетворять взятый набор $\{r(\lambda), i\mu_k, m_k : k = 1, \ldots, N\}$, чтобы он являлся левыми либо правыми данными рассеяния уравнения (2.3) при некотором потенциале v удовлетворяющему условию (2.2).

3. Безотражательный потенциал

Как известно, (см. [6] – [8]) набор вида $\{0, i\mu_k, m_k : k = 1, \ldots, N\}$, где μ_k, m_k положительные числа, причем μ_k различны друг от друга и всегда являются данными рассеяния. Потенциалы, имеющие данные рассеяния такого типа, называются *безотражательными* (поскольку в этом случае $r_\pm = 0$). Заметим (см. например [8]), что в этом случае коэффициент прохождения определяется по формуле

$$t(\lambda) = \prod_{k=1}^{N} \frac{\lambda + i\mu_k}{\lambda - i\mu_k}. \tag{3.1}$$

Чтобы наборы

$$\{0, i\mu_k, m_k^+ : k = 1, \ldots, N\}, \qquad \{0, i\mu_k, m_k^- : k = 1, \ldots, N\}, \tag{3.2}$$

были одновременно правыми и левыми данными рассеяния одного и того же уравнения (см. [6]), необходимо и достаточно, чтобы

$$\left(m_k^- m_k^+\right)^2 = -\frac{1}{\dot{b}_0(i\mu_k)^2} = 4\mu_k^2 \prod_{j \neq k} \left(\frac{\mu_k + \mu_j}{\mu_k - \mu_j}\right)^2, \; k = 1, \ldots, N. \tag{3.3}$$

Заметим также, что безотражательные потенциалы играют важную роль в теории интегрирования нелинейных дифференциальных уравнений. С их помощью строятся точные, так называемые N-солитонные, решения уравнения Картевега-де Фриза (см., например, [9] – [11]).

Пусть данные рассеяния определены равенствами (3.2), (3.3). Обозначим $\psi_k^\pm(x) := m_k^\pm e^{\mp\mu_k x}$, $k = 1, \ldots, N$, $x \in \mathbb{R}$. Легко видеть (см. [6] – [8]), что при этих данных рассеяния уравнения Гельфанда-Ливитана-Марченко имеют вид

$$\sum_{k=1}^{N} m_k^+ \psi_k^+(x+y) + K_+(x,y) + \sum_{k=1}^{N} \psi_k^+(y) \int_x^\infty K_+(x,\sigma)\psi_k^+(\sigma)\, d\sigma = 0, \tag{3.4}$$

$$\sum_{k=1}^{N} m_k^- \psi_k^-(x+y) + K_-(x,y) + \sum_{k=1}^{N} \psi_k^-(y) \int_x^\infty K_-(x,\sigma)\psi_k^-(\sigma)\, d\sigma = 0. \tag{3.5}$$

Следуя [8, 9], решения (3.4) и (3.5) будем искать в виде

$$K_\pm(x,y) = -\sum_{k=1}^{N} \varphi_k^\pm(x)\psi_k^+(y). \tag{3.6}$$

Подставляя определяемые по формулам (3.6) функции K_+ и K_- соответственно в (3.4) и (3.5), мы придем к линейным уравнениям относительно φ_k^+ и φ_k^-, $k =$

$1, \ldots, N$:

$$(E_N + V_+(x))\,\varphi^+(x) = \psi^+(x) \tag{3.7}$$

$$(E_n + V_-(x))\,\varphi^-(x) = \psi^-(x), \tag{3.8}$$

где $\varphi^{\pm}(x) = \left(\varphi_1^{\pm}, \ldots, \varphi_N^{\pm}\right)^T$, $\psi^{\pm}(x) = \left(\psi_1^{\pm}(x), \ldots, \psi_n^{\pm}(x)\right)^T$, E_N – единичная матрица и

$$V_{\pm}(x) = \left(\frac{\psi_i^{\pm}(x)\psi_j^{\pm}(x)}{\mu_i + \mu_j}\right)_{i,j=1}^{N}. \tag{3.9}$$

Однозначность решения (3.7) доказана в [9]. Поступая аналогичным образом заметим, что квадратичная форма отвечающая матрице $E_N + V_-(x)$ имеет вид

$$\sum_{k=1}^{N} X_k^2 + \int\limits_{-\infty}^{x} \left[\sum_{j=1}^{N} \psi_j^-(\sigma) X_j\right]^2 d\sigma.$$

Из положительной определенности квадратичной формы следует единственность решения (3.8). Таким образом, функции $K_+(x, y)$ и $K_-(x, y)$, определенные формулой (3.6), являются ядрами операторов преобразований. Из (2.4) следует, что решения Йоста определяются равенствами

$$e_{\pm}(x, \lambda) = e^{i\lambda x}\left(1 - \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{\mu_j \mp i\lambda}\,\varphi_j^{\pm}(x)\psi_j^{\pm}(x)\right). \tag{3.10}$$

В частности, пользуясь (3.7) и (3.8) получим, что

$$e_{\pm}(x, \pm i\mu_k) = \frac{1}{m_k^{\pm}}\varphi_k^{\pm}(x),$$

т.е. $\varphi_k^+(x)$ и $\varphi_k^-(x)$ являются нормированными собственными функциями соответствующих собственному значению $\lambda_k = (i\mu_k)^2$.

В [9] по существу доказано, что

$$\lim_{x\to\infty} \varphi_j^+(x) e^{\mu_j} = m_j^+, \quad j = 1, \ldots, N. \tag{3.11}$$

Поступая аналогичным образом, заметим, что в силу формулы Крамера

$$\varphi_j^-(x) = \frac{1}{\det(E_N + V_-(x))} \sum_{k=1}^{N} \psi_k^-(x) Q_{jk}(x),$$

где Q_{jk} – алгебраические дополнения к элементам j-го столбца матрицы $E_N + V_-(x)$. Учитывая, что $\lim\limits_{x\to-\infty} \det(E_N + V_-(x)) = 1$ и $\lim\limits_{x\to-\infty} Q_{jk}(x) = \delta_{jk}$ (δ_{jk} – символ Кронекера), получим, что

$$\lim_{x\to-\infty} \varphi_j^-(x) e^{-\mu_j x} = m_j^-. \tag{3.12}$$

В силу линейной зависимости функций φ_j^+ и φ_j^-, из (3.11) и (3.12) следует справедливость следующего утверждения.

Предложение 3.1. *В случае безотражательного потенциала нормированные собственные функции $\varphi_j^\pm$ удовлетворяют неравенствам*

$$\left|\varphi_j^\pm(x)\right| \le c_j e^{-\mu_j|x|}, \quad x \in \mathbb{R},\ j = 1, \dots, N. \tag{3.13}$$

Кроме того справедливы равенства (3.11), (3.12).

Заметим также, что безотражательные потенциалы допускают простое описание (см. [8]-[11]), а именно

$$v(x) = -2\frac{d^2}{dx^2}\ \ln\det\left(E_N + V_\pm(x)\right).$$

При $r^\pm = 0$ и $N = 0$, потенциал $v = 0$. По этой причине мы нулевой потенциал также будем считать безотражательным.

4. Операторы преобразования в весовых пространствах

С помощью непрерывной на $\mathbb{R}_+$ ($\mathbb{R}_-$) функции ϕ и удовлетворяющей там неравенству $|\phi(x)| < ce^{-\mu x}$, $x \in \mathbb{R}_+$ ($|\phi(x)| \le ce^{\mu x}$, $x \in \mathbb{R}_-$), где μ и c положительные постоянные, построим ограниченные операторы $N^+_{\phi,1}$, $N^+_{\phi,2} : L_p(\mathbb{R}_+) \to L_p(\mathbb{R}_+)$, $N^-_{\phi,1}$, $N^-_{\phi,2} : L_p(\mathbb{R}_-) \to L_p(\mathbb{R}_-)$ действующие по формулам

$$\left(N^+_{\phi,1}y\right)(x) = \int\limits_x^\infty \phi(\sigma)y(\sigma)\,d\sigma, \qquad \left(N^+_{\phi,2}y\right)(x) = \int\limits_0^x \phi(\sigma)y(\sigma)\,d\sigma,$$

$$\left(N^-_{\phi,1}y\right)(x) = \int\limits_{-\infty}^x \phi(\sigma)y(\sigma)\,d\sigma, \qquad \left(N^-_{\phi,2}y\right)(x) = \int\limits_x^0 \phi(\sigma)y(\sigma)\,d\sigma.$$

Из формул (3.6) следует, что в случае безотражательного потенциала, операторы преобразования действуют по формулам

$$\mathrm{I} + \mathcal{K}_\pm = \mathrm{I} - \sum_{k=1}^N m\left(\varphi_k^\pm\right) N^\pm_{\psi_k^\pm,1}. \tag{4.1}$$

Операторы $\mathrm{I} - \Gamma_\pm : L_p(\mathbb{R}_\pm \to L_p(\mathbb{R}_\pm))$, $1 < p < \infty$ определим по формулам

$$\mathrm{I} - \Gamma_\pm = \mathrm{I} - \sum_{k=1}^N m\left(\psi_k^\pm\right) N^\pm_{\varphi_k^\pm,2}. \tag{4.2}$$

Оператор $\mathrm{I} - \Gamma_\pm$ действующий в пространстве $L_q(\mathbb{R}_\pm)$ ($\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$) является сопряженным к оператору $\mathrm{I}+\mathcal{K}_\pm$ действующему в $L_p(\mathbb{R}_\pm)$. Пусть $w \in A_p(\mathbb{R})$, а операторы $\pi^0_\pm : L_p(\mathbb{R}_\pm, w) \to L_p(\mathbb{R}, w)$, $\pi_\pm : L_p(\mathbb{R}, w) \to L_p(\mathbb{R}_\pm, w)$, где $L_p(\mathbb{R}_\pm, w) :=$

$L_p\left(\mathbb{R}_\pm, w|_{\mathbb{R}_\pm}\right)$, действуют по формулам

$$\left(\pi_+^0 y\right)(x) = \begin{cases} y(x) & x \in \mathbb{R}_+ \\ 0 & x \in \mathbb{R}_- \end{cases}, \qquad \left(\pi_-^0 y\right)(x) = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{R}_+ \\ y(x) & x \in \mathbb{R}_- \end{cases}.$$

$(\pi_\pm y)(x) = y(x)$, $x \in \mathbb{R}_\pm$.

Определим также операторы $\mathrm{I} + \mathcal{K}$, $\mathrm{I} - \Gamma : L_p(\mathbb{R}) \to L_p(\mathbb{R})$, $1 < p < \infty$, действующие по формулам: $\mathrm{I} + \mathcal{K} = \pi_+^0(\mathrm{I} + \mathcal{K}_+)\pi_+ + \pi_-^0(\mathrm{I} + \mathcal{K}_-)\pi_-$, $\mathrm{I} - \Gamma = \pi_+^0(\mathrm{I} - \Gamma_+)\pi_+ + \pi_-^0(\mathrm{I} - \Gamma_-)\pi_-$.

Операторы $\mathrm{I}+\mathcal{K}_\pm$, $\mathrm{I}-\Gamma_\pm$, обратимы в $L_p(\mathbb{R}_\pm)$, а операторы $\mathrm{I}+\mathcal{K}$, $\mathrm{I}-\Gamma$ обратимы в $L_p(\mathbb{R})$. Обратные этих операторов построены в [3].

Прежде чем установить аналогичные свойства этих операторов в пространствах $L_p(\mathbb{R}_\pm, w)$, $L_p(\mathbb{R}, w)$, при $w \in A_p(\mathbb{R})$, приведем одно простое свойство весовой функции $w \in A_p(\mathbb{R})$.

Пусть $S_\mathbb{R} : L_2(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{R})$ преобразование Гильберта, т.е. сингулярный интегральный оператор с ядром Коши на оси:

$$(S_\mathbb{R} y)(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\pi i} \int\limits_{|s-x|>\varepsilon} \frac{1}{s-x}\, y(s)\, ds, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Как известно оператор $S_\mathbb{R}$ ограничен в $L_2(\mathbb{R})$. Кроме того (см. [12, 13]) $w \in \mathcal{A}_p(\mathbb{R})$, $1 < p < \infty$, тогда и только тогда, когда $L_2(\mathbb{R}) \cap L_p(\mathbb{R}, w)$ плотно в $L_p(\mathbb{R}, w)$ и существует константа $C_{p,w}$ такая, что $\|S_\mathbb{R} y\|_{p,w} \le C_{p,w} \|y\|_{p,w}$ для всех $y \in L_2(\mathbb{R}) \cap L_p(\mathbb{R}, w)$ одновременно. Аналогично для единичной окружности $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$ через $A_p(\mathbb{T})$ обозначим множество весовых функций $\rho : \mathbb{T} \to [0, \infty]$ удовлетворяющих условию

$$\sup_{\mathrm{I}} \left(\frac{1}{|\mathrm{I}|} \int\limits_{\mathbb{T}} \rho(\tau)^p\, |d\tau| \right)^{1/p} \left(\frac{1}{|\mathrm{I}|} \int\limits_{\mathbb{T}} \rho(\tau)^{-q}\, |d\tau| \right)^{1/q}$$

где I пробегает все дуги $\mathbb{T}$, а $|\mathrm{I}|$ – длина дуги I. По заданной на $\mathbb{R}$ весовой функцией w, построим, заданную на $\mathbb{T}$, весовую функцию ρ:

$$\rho(t) = w\left(\frac{i(1+t)}{1-t}\right) |1-t|^{1-2/p}, \qquad t \in \mathbb{T}.$$

Как известно (см. [13]) $w \in A_p(\mathbb{R})$, $1 < p < \infty$, тогда и только тогда, когда $\rho \in A_p(\mathbb{T})$. Из условия $\rho \in A_p(\mathbb{T})$, $1 < p < \infty$, следует, что $\rho \in L_p(\mathbb{T})$ и $\rho^{-1} \in L_q(\mathbb{T})$ ($\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$). Замена переменной $x = i(\sigma+1)/(1-\sigma)$ позволяет условие

$$\int\limits_{\mathbb{T}} \left(w\left(\frac{i(1+t)}{1-t}\right)\right)^p |1-t|^{p-2}\, |dt| < \infty$$

записать в виде
$$\frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}} w^p(x)\left|\frac{2}{x+i}\right|^p dx<\infty,$$
т.е. $w(x)\frac{1}{x+i}\in L_p(\mathbb{R})$.

Аналогично, из условия $\rho^{-1}\in L_q(\mathbb{T})$ следует, что $w^{-1}(x)\frac{1}{x+i}\in L_q(\mathbb{R})$. Таким образом, имеет место следующий факт.

Предложение 4.1. *Если $w\in A_p(\mathbb{R})$, то*
$$\frac{w(x)}{x+i}\in L_p(\mathbb{R}) \ \text{ и } \ \frac{w^{-1}(x)}{x+i}\in L_q(\mathbb{R}),\qquad \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1.$$

Справедливо следующее утверждение.

Лемма 4.1. *Пусть v – безотражательный потенцил и $w\in A_p(\mathbb{R})$, $1<p<\infty$. Тогда операторы $\mathrm{I}+\mathcal{K}_\pm$, $\mathrm{I}-\Gamma_\pm$ ограничены в пространствах $L_p(\mathbb{R}_\pm,w)$, а операторы $\mathrm{I}+\mathcal{K}$, $\mathrm{I}-\Gamma$ ограничены в пространствах $L_p(\mathbb{R},w)$. Кроме того эти операторы обратимы и справедливы равенства*

$$(\mathrm{I}+\mathcal{K}_\pm)^{-1}=\mathrm{I}+\mathcal{L}_\pm:=\mathrm{I}+\sum_{k=1}^{N} m\left(\psi_k^\pm\right)N^\pm_{\varphi_k^\pm,1} \tag{4.3}$$

$$(\mathrm{I}-\Gamma_\pm)^{-1}=\mathrm{I}+Q_\pm:=\mathrm{I}+\sum_{k=1}^{N} m\left(\varphi_k^\pm\right)N^\pm_{\psi_k^\pm,2} \tag{4.4}$$

$$(\mathrm{I}+\mathcal{K})^{-1}=\pi_+^0(\mathrm{I}+\mathcal{K}_+)^{-1}\pi_+ +\pi_-^0(\mathrm{I}+\mathcal{K}_-)^{-1}\pi_+ \tag{4.5}$$

$$(\mathrm{I}-\Gamma)^{-1}=\pi_+^0(\mathrm{I}-\Gamma_+)^{-1}\pi_+ +\pi_-^0(\mathrm{I}-\Gamma_-)^{-1}\pi_+ . \tag{4.6}$$

Доказательство. Пользуясь ограниченностью на $\mathbb{R}_+$ функции $e^{-\mu x}|x+i|$ при $\mu>0$, легко видеть, что функция $\psi=e^{-\mu x}$ $(\mu\geq 0)$ принадлежит $L_p(\mathbb{R}_+,w)$. Действительно, в силу предложения 4.1
$$\|\psi\|_{p,w}=\left(\int\limits_0^\infty e^{-\mu p x}\,|x+i|^p\left(\frac{w(x)}{|x+i|}\right)^p dx\right)^{1/p}\leq c\left\|\frac{w}{x+i}\right\|_p .$$
В частности $\varphi_k^+,\psi_k^+\in L_p(\mathbb{R}_+,w)$, $k=1,\ldots,N$. Пользуясь предложением 3.1 и неравенством Гёльдера, получим
$$\left|\left(m(\psi_k^+)N^+_{\varphi_k,1}y\right)(x)\right|\leq c_k\psi_k^+(x)\int\limits_x^\infty e^{-\mu_k\tau}|y(\tau)|\,d\tau\leq$$
$$\leq c_k\psi_k^+(x)\left(\int\limits_x^\infty e^{-\mu_k q\tau}\frac{(w(\tau))^{-q}}{(\tau+i)}\,d\tau\right)^{1/q}\|y\|_{p,w}\leq c_k\left\|\frac{w^{-1}}{x+i}\right\|_q\|y\|_{p,w}\cdot\psi_k^+(x),$$

То есть

$$\left\| m\left(\psi_k^+\right) N^+_{\varphi_k,1} y \right\|_{p,w} \leq c_k \left\| \psi_k^+ \right\|_{p,w} \left\| \frac{w^{-1}}{x+i} \right\|_q \|y\|_{p,w}\,.$$

Аналогично доказывается ограниченность операторов $m\left(\psi_k^-\right) N^-_{\varphi_k^-,1},\ m\left(\psi_k^\pm\right) N^\pm_{\varphi_k^\pm,2}$, $m\left(\varphi_k^\pm\right) N^\pm_{\psi_k^\pm,1},\ m\left(\psi_k^\pm\right) N^\pm_{\varphi_k^\pm,2}$. Отсюда следует, ограниченность операторов $\mathrm{I}+\mathcal{K}_\pm$, $\mathrm{I}-\Gamma_\pm,\ \mathrm{I}+\mathcal{L}_\pm,\ \mathrm{I}+Q_\pm$.

В [3] для $y \in L_p(\mathbb{R}_\pm, w) \cap L_2(\mathbb{R}_\pm)$ доказаны тождества

$$(\mathrm{I}+\mathcal{K}_\pm)(\mathrm{I}+\mathcal{L}_\pm)\, y = y, \qquad (\mathrm{I}+\mathcal{L}_\pm)(\mathrm{I}+\mathcal{K}_\pm)\, y = y$$
$$(\mathrm{I}-\Gamma_\pm)(\mathrm{I}+Q_\pm)\, y = y, \qquad (\mathrm{I}+Q_\pm)(\mathrm{I}-\Gamma_\pm)\, y = y$$

Из всюду плотности $L_p(\mathbb{R}_\pm, w) \cap L_p(\mathbb{R}_\pm)$ в $L_p(\mathbb{R}_\pm, w)$ и ограниченности соответствующих операторов в $L_p(\mathbb{R}_\pm, w)$ следуют равенства (4.3), (4.4). Ограниченность операторов $\mathrm{I}+\mathcal{K}$, $\mathrm{I}-\Gamma$ является следствием ограниченности операторов $\mathrm{I}+\mathcal{K}_\pm$, $\mathrm{I}-\Gamma_\pm$, а формулы (4.5), (4.6) очевидны. Лемма доказана. □

5. Операторы $\mathcal{L}$-Винера-Хопфа. U-мультипликаторы

Пусть v – безотражательный потенциал порожденный правыми данными рассеяния $\{0, i\mu_k, m_k^+ : k = 1, \ldots, N\}$ (соответственно левыми данными рассеяния $\{0, i\mu_k, m_k^- : k = 1, \ldots, N\}$), $w \in \mathcal{A}_p(\mathbb{R})$, а оператор U построен по формулам (2.6)-(2.8), (3.1), (3.10). В работе [3], для оператора U получены явные представления.

Функцию $a \in L_\infty(\mathbb{R})$ будем называть U-мультипликатором в $L_p(\mathbb{R}, w)$, если отображение $f \mapsto U^* m(a) U f$ отображает $L_2(\mathbb{R}) \cap L_p(\mathbb{R}, w)$ в себя и существует постоянная $c > 0$ такая, что одновременно для всех $f \in L_2(\mathbb{R}) \cap L_p(\mathbb{R}, w)$ имеет место неравенство

$$\|U^* m(a) U f\|_{p,w} \leq c\, \|f\|_{p,w}$$

Поскольку $L_2(\mathbb{R}) \cap L_p(\mathbb{R}, w)$ плотно в $L_p(\mathbb{R}, w)$, то сказанное означает, что оператор $U^* m(a) U$ допускает непрерывное продолжение до действующего на $L_p(\mathbb{R}, w)$ ограниченного оператора, который мы будем обозначать через $W^0_{\mathcal{L}}(a)$ и будем называть оператором $\mathcal{L}$-свертки на $L_p(\mathbb{R}, w)$ с символом a.

Множество U-мультипликаторов будем обозначать через $\mathcal{M}_{p,w,\mathcal{L}}$. Оператор $W_{\mathcal{L}}(a) := \pi_+ W^0_{\mathcal{L}}(a) \pi^0_+ : L_p(\mathbb{R}_+, w) \to L_p(\mathbb{R}_+, w)$, $1 < p < \infty$, будем называть оператором $\mathcal{L}$-Винера-Хопфа с символом a. Поскольку при $v = 0$, оператор U совпадает с преобразованием Фурье F, то операторы $W^0_{\mathcal{L}}(a)$ и $W_{\mathcal{L}}(a)$ в этом случае совпадают соответственно определенными в весовых пространствах оператором свертки и оператором Винера-Хопфа (см. [13]). По этой причине далее в обозначениях $\mathcal{M}_{p,w,\mathcal{L}}$, $W^0_{\mathcal{L}}(a)$, $W_{\mathcal{L}}(a)$ в случае $v = 0$, мы опускаем индекс $\mathcal{L}$ и будем пользоваться обозначениями $\mathcal{M}_{p,w}$, $W^0(a)$, $W(a)$ соответственно. Класс мульпликаторов Фурье $\mathcal{M}_{p,w}$ (см. [13]) является банаховой алгеброй с нормой

$$\|a\|_{\mathcal{M}_{p,w}} := \left\|W^0(a)\right\|_{B(L_p(\mathbb{R},w))}.$$

Через $PC := PC(\dot{\mathbb{R}})$ обозначим алгебру всех кусочно-непрерывных функций на $\dot{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Другими словами, функция a принадлежит PC тогда и только тогда, когда для любого $x_0 \in \dot{\mathbb{R}}$ существуют пределы $a(x_0 - 0) := \lim\limits_{x \to x_0 - 0} a(x)$, $a(x_0 + 0) := \lim\limits_{x \to x_0 + 0} a(x)$, причем

$$a(\infty - 0) := a(+\infty) = \lim_{x \to +\infty} a(x), \qquad a(\infty + 0) := a(-\infty) = \lim_{x \to -\infty} a(x).$$

Функции из PC имеющие ограниченную вариацию $V(a)$ принадлежат алгебре $\mathcal{M}_{p,w}$ (см.17.1 [13]). Следствием этого факта является следующее утверждение

Предложение 5.1. *Определенная формулой* (3.1) *коэффициент прохождения* $t(\lambda)$ *и ее сопряженная* $\bar{t}(\lambda) = t(-\lambda) = t^{-1}(\lambda)$ *принадлежат* $\mathcal{M}_{p,w}$.

Доказательство. Рассмотрим функции $\hbar_\mu(\lambda) := (\lambda - i\mu)^{-1}$ ($\mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$). Функции $\operatorname{Re} \hbar_\mu(\lambda) = \lambda(\lambda^2 + \mu^2)^{-1}$, $\operatorname{Im} \hbar_\mu(\lambda) = \mu(\lambda^2 + \mu^2)^{-1}$ имеют ограниченную вариацию и поэтому $V(\hbar_\mu) \le V(\operatorname{Re} \hbar_\mu) + V(\operatorname{Im} \hbar_\mu) < \infty$. Доказательство предложения следует теперь из равенств

$$f_\mu(\lambda) := \frac{\lambda + i_\mu}{\lambda - i\mu} = 1 + 2i\mu \frac{1}{\lambda - i\mu}, \quad t(\lambda) = \prod_{k=1}^{N} f_{\mu_k}(\lambda), \quad \bar{t}(\lambda) = \prod_{k=1}^{N} f_{-\mu_k}(\lambda)$$

и того факта, что $\mathcal{M}_{p,w}$ является алгеброй. Предложение доказано. □

Докажем теперь следующее утверждение.

Теорема 5.1. *Пусть* $w \in \mathcal{A}_p(\mathbb{R})$, $a \in \mathcal{M}_{p,w}$. *Тогда* $a \in \mathcal{M}_{p,w,\mathcal{L}}$ *и в пространстве* $L_p(\mathbb{R}_+, w)$ *справедливо тождество*

$$W_{\mathcal{L}}(a) = (\mathrm{I} + \mathcal{K}_+) W(a) (\mathrm{I} - \Gamma_+). \tag{5.1}$$

Доказательство. Для $a \in L_\infty(\mathbb{R})$ в пространстве $L_2(\mathbb{R})$ (см. [3]) справедливо тождество

$$W^0_{\mathcal{L}}(a) = (\mathrm{I} + \mathcal{K})(m(\chi_+), m(\chi_-)) \begin{pmatrix} W^0(a) & W^0(\bar{t}a) \\ W^0(ta) & W^0(a) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m(\chi_+) \\ m(\chi_-) \end{pmatrix} (\mathrm{I} - \Gamma). \tag{5.2}$$

В силу предыдущего предложения, из $a \in \mathcal{M}_{p,w}$ следует, что ta и $\bar{t}a$ также принадлежат $\mathcal{M}_{p,w}$ и по этой причине правая часть тождества (5.2) переводит $L_p(\mathbb{R},w) \cap L_2(\mathbb{R})$ в себя и допускает продолжения до ограниченного оператора в пространстве $L_p(\mathbb{R},w)$. Таким образом $a \in \mathcal{M}_{p,w,\mathcal{L}}$ и тождество (5.2) справедливо и в пространстве $L_p(\mathbb{R},w)$.

Учитывая тождества $(\mathrm{I}-\Gamma)\pi_+^0 = \pi_+^0(\mathrm{I}-\Gamma_+)$, $\pi_+(\mathrm{I}+\mathcal{K}) = (\mathrm{I}+\mathcal{K}_+)\pi_+$, $\pi_+ m(\chi_+) = \pi_+$, $\pi_+ m(\chi_-) = 0$, $m(\chi_+)\pi_+^0 = \pi_+^0$ получим тождество (5.1). $\square$

6. Фредгольмовость оператора $\mathcal{L}$-Винера-Хопфа

Обозначим через $PC_{p,w}$ $(C_{p,w}(\dot{\mathbb{R}}))$ замыкание всех функций PC $(C(\dot{\mathbb{R}}))$ имеющих ограниченную вариацию, в банаховой алгебре $\mathcal{M}_{p,w}$ и пусть $C_{p,w}(\bar{\mathbb{R}}) := PC_{p,w} \cap C(\bar{\mathbb{R}})$, где $\bar{\mathbb{R}} = R \cup \{\pm\infty\}$ двухточечная компактификация $\mathbb{R}$. Теорема 5.1 позволяет изучать фредгольмовы свойства оператора $W_{\mathcal{L}}(a)$ в пространствах $L_p(\mathbb{R}_+,w)$ на основе известных соответствующих свойств оператора $W(a)$ в тех же пространствах (см.17.2 [13]).

Ниже мы считаем, что $w \in \mathcal{A}_p(\mathbb{R})$, а потенциал ν является безотражательным.

Теорема 6.1. *Пусть $a \in PC_{p,w}$. Если оператор $W_{\mathcal{L}}(a)$ фредгольмов в $L_p(\mathbb{R}_+,w)$ и $\operatorname{Ind} W_{\mathcal{L}}(a) = 0$, то оператор $W_{\mathcal{L}}(a)$ обратим в пространстве $L_p(\mathbb{R}_+,w)$.*

Пусть $\nu \in (0,1), z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Множество

$$\mathcal{A}(z_1,z_2,\nu) := \left\{ \frac{z_2 e^{2\pi(x+i\nu)} - z_1}{e^{2\pi(x+i\nu)} - 1}, x \in \mathbb{R} \right\} \cup \{z_1,z_2\}.$$

является дугой окружности соединяющей точки z_1 и z_2 и содержащая концевые точки z_1 и z_2. Множество $\mathcal{A}(z,z,\nu)$ вырождается в точку $\{z\}$. Множество $\mathcal{A}(z_1,z_2,1/2)$ совпадает с отрезком соединяющий точки z_1 и z_2. В случае $\nu > 1/2$ из точек $\mathcal{A}(z_1,z_2,\nu)$ отличных от z_1 и z_2, отрезок $[z_1,z_2]$ виден под углом $2\pi(1-\nu)$ и при переходе от точки z_1 к точке z_2 отрезок остается справа. В случае $\nu < 1/2$, из отличных от z_1 и z_2 точек $\mathcal{A}(z_1,z_2,\nu)$ отрезок виден под углом $2\pi\nu$ и при переходе от точки z_1 к z_2 отрезок остается слева.

Для $0 < \nu_1 \le \nu_2 < 1$ множество

$$\mathcal{H}(z_1,z_2;\nu_1,\nu_2) = \bigcup_{\nu \in [\nu_1,\nu_2]} \mathcal{A}(z_1,z_2,\nu)$$

называется рогом между z_1 и z_2 определяемое числами ν_1, ν_2 (см. [13]).

Каждое из множеств (см. [13], теорема 16.17)

$$\mathrm{I}_0(p,w) := \left\{\lambda \in \mathbb{R} : \left|\frac{\xi}{\xi+i}\right|^{\lambda} w(\xi) \in A_p(\mathbb{R})\right\},$$

$$\mathrm{I}_\infty(p,w) := \left\{\lambda \in \mathbb{R} : |\xi+i|^{-\lambda}\, w(\xi) \in A_p(\mathbb{R})\right\}$$

является открытым интервалом длиной не превышающей единицу и содержащий $0 : \mathrm{I}_x(p,w) = (-\nu_x^-(p,w); 1-\nu_x^+(p,w))$ с $0 < \nu_x^- \le \nu_x^+ < 1$ и $x = 0$ либо $x = \infty$.

Теорема 6.2. *Пусть $a \in PC_{p,w}$. Тогда существенный спектр оператора $W_{\mathcal{L}}(a)$ в $L_p(\mathbf{R}_+, w)$ совпадает с множеством*

$$G_{p,w} := \bigcup_{\alpha\in\mathbb{R}} \mathcal{H}\left(a(x-0), a(x+0); \nu_\infty^-(p,w), \nu_\infty^+(p,\infty)\right)$$

$$\bigcup \mathcal{H}\left(a(+\infty), a(-\infty); \nu_0^-(p,w), \nu_0^+(p,w)\right)$$

Если $0 \notin G_{p,w}$, то индекс оператора $W_{\mathcal{L}}(a)$ в $L_p(\mathbf{R}_+, w)$ совпадает с количеством оборотов вокруг нуля точки при ее обходе естественным образом ориентированной кривой

$$\gamma_{p,w} := \bigcup_{\alpha\in\mathbb{R}} \mathcal{A}\left(a(x-0), a(x+0); \left(\nu_\infty^-(p,w) + \nu_\infty^+(p,w)\right)/2\right)$$

$$\bigcup \mathcal{A}\left(a(+\infty), a(-\infty); \left(\nu_0^-(p,w) + \nu_0^+(p,w)\right)/2\right)$$

Теорема становится более прозрачной в случае, когда количество разрывов функции a конечно. Мы остановимся на случае, когда a непрерывна на $\mathbb{R}$ и может иметь разрыв только в бесконечности. Под $\arg\, a$ отличной всюду на $\bar{\mathbb{R}}$ от нуля непрерывной функции $a \in C(\bar{\mathbb{R}})$ будем понимать произвольную непрерывную функцию на $\bar{\mathbb{R}}$ удовлетворяющую равенству $a = |a| e^{i \arg a}$.

Теорема 6.3. *Пусть $a \in C(\bar{\mathbb{R}})$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

(i) *$W_{\mathcal{L}}(a)$ является фредгольмовым оператором в $L_p(\mathbf{R}_+, w)$;*

(ii) *$a(x) \neq 0$ для всех $x \in \bar{\mathbb{R}}$, а число $\nu + \frac{1}{2\pi}\, \arg(a^{-1}(+\infty)a(-\infty))$ не является целым ни при каком $\nu \in \left[\nu_0^-, \nu_0^+\right]$;*

(iii) *$a(x) \neq 0$ для всех $x \in \bar{\mathbb{R}}$ и $a^{-1}(+\infty)a(-\infty)$ не принадлежит множеству $\{re^{2\pi i\varphi}; r \in [0,\infty], \varphi \in [1-\nu_0^+, 1-\nu_0^-]\}$.*

В случае, когда $W_{\mathcal{L}}(a)$ является фредгольмовым в $L_p(\mathbf{R}_+, w)$, его индекс вычисляется по формуле

$$\operatorname{Ind} W_{\mathcal{L}}(a) = -\frac{1}{2\pi}\left(\arg\, a(+\infty) - \arg\, a(-\infty)\right) +$$

$$\frac{1}{2}\left(\nu_0^- + \nu_0^+\right) - \left\{\frac{1}{2}\left(\nu_0^- + \nu_0^+\right) + \frac{1}{2\pi}\arg(a^{-1}(+\infty)a(-\infty))\right\},$$

где $\{x\}$ *– дробная часть числа* x.

Если $a \in C_{p,w}(\dot{\mathbb{R}})$, *то оператор* $W_{\mathcal{L}}(a)$ *фредгольмов тогда и только тогда когда* $a(x) \neq 0$ *для всех* $x \in \dot{\mathbb{R}}$ *и в этом случае* $\operatorname{Ind} W_{\mathcal{L}}(a) = \frac{1}{2\pi}(\arg\, a(-\infty) - \arg\, a(+\infty))$.

Abstract. By replacement in the definition of the Convolution operators of Fourier transform by a spectral transform of a Sturm-Liouville operator $\mathcal{L}$ generation reflectionless potential the concept $\mathcal{L}$-Wiener-Hopf operator on Lebesque spaces with Muckenhoupt weights is introduced. In the case of piecewise continuous symbol the Fredholm criterion and formula for index are obtained.

Список литературы

[1] А. Г. Камалян, И. М. Спитковский, "О фредгольмовости одного класса операторов типа свертки" Матем. заметки **104**, вып. 3, 407 -– 421 (2018).

[2] А. Г. Камалян, М. И. Караханян, А. О. Оганесян, "Об одном классе операторов $\mathcal{L}$-Винера-Хопфа", Изв. НАН Армении, Математика **53**, no. 3, 21 – 27 (2018).

[3] D. Hasanyan, A. Kamalyan, M. Karakhanyan, I. M. Spitkovsky, "Integral operators of the $\mathcal{L}$-convolution type in the case of a reflectionless potential", Springer Proceedings in Mathematics & Statistics **291**, 175 – 197 (2019).

[4] H. A. Asatryan, A. G. Kamalyan, M. I. Karakhanyan, "On $\mathcal{L}$-convolution type operators with semi-almost periodic symbols", Reports NAS of Armenia **119**, no. 1, 22 – 28 (2019).

[5] H. A. Asatryan, A. G. Kamalyan, M. I. Karakhanyan, "On a class of integro-difference equations", Reports NAS of Armenia **119**, no. 2, 103 – 109 (2019).

[6] Л. Д. Фаддеев, "Обратная задача квантовой теории рассеяния", Итоги науки и техники, Сер. Соврем. пробл. мат., **3**, ВИНИТИ, Москва, 93 – 180 (1974).

[7] В. А. Марченко, Операторы Штурма-Лиувиля и их Приложения, Наукова думка, Киев (1977).

[8] В. Юрко, Введение в Теорию Обратных Спектральных Задач, Физмат, Москва (2007).

[9] П. Бхатнагар, Нелинейные Волны в Одномерных Диспергирующих Системах, Мир, Москва (1983).

[10] В. Е. Захаров, С. В. Манаков, С. П. Новиков, Л. П. Питаевский, Теория Солитонов. Метод Обратной Задачи, Наука, Москва (1980).

[11] Ф. Калоджеро, А. Дегасперис, Спектральные Преобразования и Солитоны. Методы Решения и Исследования Нелинейных Эволюционных Уравнений, Мир, Москва (1985).

[12] Дж. Гарнетт, Ограниченные Аналитические Функции, Мир, Москва (1984).

[13] A. Böttcher, Y. I. Karlovich, I. M. Spitkovsky, Convolution Operators and Factorization of Almost Periodic Matrix Functions, Birkhäuser, Basel (2002).

Поступила 22 октября 2021

После доработки 22 октября 2021

Принята к публикации 15 декабря 2021