Изв. НАН Армении (сер. ТН), т. XLVII, № 1—2, 1994, с. 11—14.

РАДИОЭЛЕКТРОНИКА

УДК 621.391.1

В. Г. ГЕМИЛЯН, Л. М. ТАТИКЯН

ОЦЕНКА НЕЛИНЕЙНЫХ ИСКАЖЕНИЙ ЦИФРОВОЙ ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ АНАЛОГОВЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ФИЛЬТРОВ

В соответствии с ранее предложенной методикой приведены расчетные формулы для оценки нелинейных искажений в трактах цифровой обработки сигналов при использовании эллиптических фильтров и их сравнение с чебышевскими фильтрами.

Ил. 1. Библиогр.: 7 назв.

Նախկինում առաջարկված մեթոդիկայի համապատասխան, ազդանշանների թվանշային մշակման ուղիներում ոչ գծային աղավաղումների գնահատման համար էլիպսային ֆիլտրերի օգտագործմամբ բերված են հաշվարկային բանաձևեր և դրանք համեմատված են Չեբիշևի ֆիլտրերի հետ։

В работе [1] предложена методика оценки нелинейных искажений при цифровой обработке аналоговых сигналов в полосе частот. В настоящей работе выведены формулы оценки нелинейных искажений при использовании эллиптических фильтров (фильтры Кауэра-Золотарева) и по результатам расчетов нескольких примеров проведено сравнение с адекватными по подавлению в полосе пропускания и задерживания фильтрами Чебышева.

Сравнение коэффициентов нелинейных искажений [1] при применении фильтров Чебышева и эллиптических фильтров одного порядка должно проводиться при условии, что частоты срезов вышеназванных фильтров определяются на основе следующего выражения, характеризующего эффективную (энергетическую, шумовую) полосу [2]:

$$\Delta\omega_{эф} = \frac{\left[\int\limits_0^{\infty} H(\omega)\,d\omega\right]^2}{\int\limits_0^{\infty} H^2(\omega)\,d\omega}, \qquad (1)$$

где $H(\omega)$ — передаточная функция соответствующего фильтра. При определении $\Delta\omega_{эф}$ по формуле (1) возникают проблемы вычислительного характера, что затрудняет непосредственное ее применение. Для упрощения расчетов предлагается критерий сравнения фильтров, приводящий практически к тем же результатам, что и использование (1).

Для сравнения качества обработки сигналов при использовании эллиптических фильтров следует учесть, что частота среза фильтров

Чебышева определяется, исходя из неравномерности ε в полосе пропускания, а поведение передаточной функции в полосе заграждения однозначно определяется порядком N фильтра и параметром ε, в случае эллиптических фильтров необходимо задавать также и граничную частоту полосы заграждения. Фактически можно выбрать любые три из четырех параметров фильтра (порядок, ослабление в полосе пропускания, ослабление в полосе заграждения и граничная частота заграждения), и четвертый из них определится однозначно [3]. В связи с этим выбрано два подхода построения эллиптических фильтров, адекватных чебышевским фильтрам того же порядка. При первом подходе поведение эллиптического фильтра аналогично поведению чебышевского фильтра в полосе пропускания, а при втором — в полосе заграждения.

Известно, что квадрат модуля передаточной функции эллиптического фильтра имеет вид [4]

$$|H_э(j\omega)|^2 = 1/(1+\varepsilon^2 R_N^2(\omega)). \qquad (2)$$

где N — порядок фильтра, $\varepsilon = \sqrt{10^{0,1A_м}-1}$, $A_м$ — максимальная величина относительного затухания в полосе пропускания, выраженная в $дБ$, а $R_N(\omega)$ — рациональная функция, представляющая собой отношение двух полиномов N-го порядка.

При первом подходе рациональная функция $R_N(\omega)$ имеет следующий вид [4]:

а) когда N нечетно, а $k=(N-1)/2$ —

$$R_N(\omega) = \frac{\omega(\omega_1^2-\omega^2)(\omega_2^2-\omega^2)\cdots(\omega_k^2-\omega^2)}{(1-\omega_1^2\omega^2)(1-\omega_2^2\omega^2)\cdots(1-\omega_k^2\omega^2)}, \qquad (3)$$

б) когда N четно и $k=N/2$, где $0<\omega_i<1$, $i=1, 2, \ldots, k$ — нули рациональной функции $R_N(\omega)$,

$$R_N(\omega) = \frac{(\omega_1^2-\omega^2)(\omega_2^2-\omega^2)\cdots(\omega_k^2-\omega^2)}{(1-\omega_1^2\omega^2)(1-\omega_2^2\omega^2)\cdots(1-\omega_k^2\omega^2)}. \qquad (4)$$

Для того, чтобы поведение эллиптического фильтра в полосе пропускания было аналогично поведению чебышевского фильтра того же порядка, в качестве нулей рациональной функции $R_N(\omega)$ выбраны нули чебышевского полинома $C_N(\omega)$, т. е.

$$\omega_i = \cos\frac{\pi(2i-1)}{2N}, \quad i=1, 2, \ldots, k. \qquad (5)$$

При втором подходе поведение эллиптического фильтра аналогично поведению чебышевского фильтра в полосе заграждения. Если при первом подходе нули ω_i рациональной функции $R_N(\omega)$ (5) выбираются равными нулям соответствующего полинома Чебышева $C_N(\omega)$ и ослабление $1/A^2$ в полосе заграждения определяется однозначно, то при втором подходе сначала определяется ослабление эллиптического фильтра в полосе заграждения адекватного ослабления чебышевского фильтра следующим образом

$$1/A^2 = \left(\int\limits_1^{5\omega_s+1} (1/(1+\varepsilon^2 C_N^2(\omega)))\, d\omega\right) / 5\omega_s, \tag{6}$$

где ω_s — угловая частота дискретизации, а $1/1+\varepsilon^2 C_N^2(\omega))$ квадрат модуля передаточной функции фильтра Чебышева [4].

Поскольку расчеты проведены для ограниченной полосы частот, поэтому полоса задерживания ограничена величиной $5\omega_s+1$ [1]. Как видно из рисунка, ослабление эллиптического фильтра $1/A^2$ выбирается равной высоте прямоугольника $PQST$, площадь которого равна площади криволинейной трапеции $PUVT$, характеризующей величину спектральной энергии чебышевского фильтра в полосе заграждения.

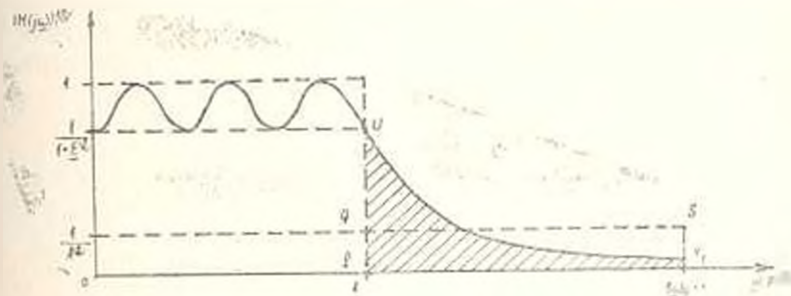

Рис. Определение ослабления в полосе заграждения эллиптического фильтра адекватного ослаблению чебышевского фильтра того же порядка

При втором подходе рациональная функция из (1) записывается в виде [7]

$$R_N(\omega) = \prod_{i=1}^{N}\left[\frac{1-k\omega_i}{1-\omega_i}\right]\prod_{i=1}^{N}\left[\frac{\omega-\omega_i}{1-k\omega_i\omega}\right], \tag{7}$$

где k — эллиптический параметр фильтра, а ω_i $(i=1, 2, \ldots, N)$ — нули рациональной функции $R_N(\omega)$.

Эллиптический параметр k и нули ω_i $(i=1, 2, \ldots, N)$ рассчитываются по формулам

$$k = \theta_2^2(0,\ h)/\theta_3^2(0,\ h), \tag{8}$$

$$\omega_i = \frac{1}{\sqrt{k}}\cdot\frac{\theta_2((2i-1)\pi/2N,\ h)}{\theta_3((2i-1)\pi/2N,\ h)}, \tag{9}$$

где θ_2, θ_3 — известные тета-функции Якоби [6], а h — известный эллиптический параметр [5].

Формула для оценки нелинейных искажений при использовании эллиптического фильтра записывается следующим образом [1]:

$$K_{нэ} = \sqrt{(E_2 - E_1 + E_3)/E_1}, \qquad (10)$$

где

$$E_1 = \int_{-\omega_п/\omega_c}^{\omega_п/\omega_c} \left(1/(1+\varepsilon^2 R_N^2(\omega_н))\right)^2 \operatorname{sinc}^2 D\, d\omega_н, \qquad (11)$$

$$\operatorname{sinc} D = \sin(\pi\omega_н/\omega'_д)/(\pi\omega_н/\omega'_д),$$

$$E_2 = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{-\omega_п/\omega_c + m\omega_д/\omega_c}^{\omega_п/\omega_c + m\omega_д/\omega_c} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(1/\sqrt{1+\varepsilon^2 R_N^2(\omega_н + n\omega'_д)}\right)\right)^2 \times$$

$$\times \operatorname{sinc}^2 D/(1+\varepsilon^2 R_N^2(\omega_н))\, d\omega_н, \qquad (12)$$

$$E_3 = 2\omega_д/\omega_c - E_1, \quad \omega_н = \omega/\omega_c, \quad \omega'_д = \omega_д/\omega_c,$$

ω — угловая частота сигнала, ω_c — угловая частота среза эллиптического фильтра, $\omega_п$ — угловая частота среза цифрового фильтра, $\omega_д$ — угловая частота дискретизации, N — порядок фильтра, $R_N(\cdot)$ — рациональная функция эллиптического фильтра.

Расчеты, проведенные по формуле (10), позволяют сделать вывод, что с точки зрения нелинейных искажений в трактах цифровой обработки сигналов эллиптические фильтры ведут себя почти всегда хуже чебышевских фильтров, которые, в свою очередь, почти всегда хуже фильтров Баттерворта.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гаспарян О. Ф., Гемилян Б. Г., Татикян Л. А.* К вопросу выбора аналоговых фильтров при цифровой обработке сигналов // Техника средств связи. Сер. Техника радиосвязи.—1991.—Вып. 1—С. 39—45.
2. *Ахманов С. А., Дьяков Ю. Е., Чиркин А. С.* Введение в статистическую радиофизику и оптику.—М., 1982.
3. *Рабинер Л., Гоулд Б.* Теория и применение цифровой обработки сигналов / Пер. с англ., Под ред. Ю. Н. Александрова.—М.: Мир, 1978.—848 с.
4. *Лэм Г.* Аналоговые и цифровые фильтры. Расчет и реализация / Пер. с англ. под ред. И. Н. Теплюка.—М.: Мир, 1982.—592 с.
5. *Ахиезер Н. И.* Элементы теории эллиптических функций.—М.: Наука, 1970.—304 с.
6. *Уиттекер Э. Т.*, Ватсон Дж. Н. Курс современного анализа: Часть вторая. Трансцендентные функции / Пер. с англ.; Под ред. Ф. В. Широкова.—М.: Физматгиз, 1963.—516 с.
7. *Роудз Дж. Д.* Теория электрических фильтров.—М.: Советское радио, 1980.—240 с.

Ереванский НИИ средств связи

28. VIII. 1991