ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Տեխնիկական գիտութ. սերիա XXI, № 6, 1968 Серия технических наук

ПРИБОРОСТРОЕНИЕ

Д. О. МЕЛКУМЯН

О ГРАНИЦАХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ КАЧЕСТВА ПЕРЕХОДНОГО ПРОЦЕССА

Рассмотрим характеристическое уравнение системы регулирования:

$$a_0p^n + a_1p^{n-1} + \cdots + a_n = 0, \tag{1}$$

где $a_i\,(i = 0, 1, 2, \cdots, n)$ — постоянные действительные числа.

Зависимость между корнями уравнения (1) и его коэффициентами следующая:

$$\left.\begin{aligned} &p_1 + p_2 + \cdots + p_n = -a_1/a_0, \\ &p_1p_2 + p_1p_3 + \cdots + p_{n-1}p_n = a_2/a_0, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &p_1p_2\cdot\cdots\cdot p_n = (-1)^n a_n/a_0. \end{aligned}\right| \tag{2}$$

Введем обозначения

$$D_0 = \frac{|p_1 + \cdots + p_n|}{n} = \frac{a_1}{na_0};$$

$$\Omega_0 = \sqrt[n]{p_1\cdots p_n} = \sqrt[n]{\frac{a_n}{a_0}}, \tag{3}$$

где D_0 — абсолютная величина среднеарифметического значения всех корней; Ω_0 — среднегеометрическое значение всех корней.

Для простоты записи абсолютные величины действительных частей корня обозначим через r_k, т. е.

$$|Re p_k| = r_k,\ k = 1, 2, \cdots, n. \tag{3a}$$

Переходим к определению верхней границы степени устойчивости. Докажем, что если система устойчива, то ее степень устойчивости не превосходит величины

$$\delta \leqslant \min_k \left(\frac{a_k}{a_0C_n^k}\right)^{\frac{1}{k}},\ k = 1, 2, \cdots, n. \tag{4}$$

По определению степени устойчивости имеем:

$$\delta = \min\,(r_k),\ k = 1, 2, \cdots, n. \tag{5}$$

Заменяя модули всех корней полинома через δ, из системы равенств (2) легко получим систему неравенств; предполагая, что полином имеет только вещественные корни:

$$\left.\begin{array}{l} C_n^1 \delta \leqslant a_1/a_0 \\ C_n^2 \delta^2 \leqslant a_2/a_0 \\ \cdots\cdots\cdots \\ C_n^n \delta^n \leqslant a_n/a_0 \end{array}\right| . \tag{6}$$

Отсюда непосредственно следует (4). Равенство имеет место при всех кратных корнях.

Поскольку рассматриваются только устойчивые системы, то действительные части всех корней имеют одинаковые (отрицательные) знаки. При этом корни могут быть действительными и комплексно-сопряженными. так как коэффициенты уравнения (1) вещественные.

Обозначая сопряженные корни с черточкой легко показать, что

$$\text{а) } p_k + \bar{p}_k = 2\,Re\,(p_k);$$

$$\text{б) } p_k \cdot \bar{p}_k = |p_k|^2 \geqslant r_k^2 . \tag{7}$$

Справедливость соотношений (4) очевидна для уравнения первого порядка и легко доказывается относительно уравнений второго и третьего порядков. Покажем справедливость (4) для уравнения четвертого порядка. Не теряя общности доказательства можно предполагать. что все корни полинома комплексные, следовательно. при $n=4$ система (2) примет вид:

$$\begin{gathered} p_1 + \bar{p}_1 + p_2 + \bar{p}_2 = -a_1/a_0 \\ p_1\bar{p}_1 + p_1p_2 + p_1\bar{p}_2 + \bar{p}_1p_2 + \bar{p}_1\bar{p}_2 + p_2\bar{p}_2 = a_2/a_0 \\ p_1\bar{p}_1p_2 + p_1\bar{p}_1\bar{p}_2 + p_1p_2\bar{p}_2 + \bar{p}_1p_2\bar{p}_2 = -a_3/a_0 \\ p_1\bar{p}_1 \cdot p_2\bar{p}_2 = a_4/a_0. \end{gathered} \tag{8}$$

Используя свойства комплексных чисел. систему уравнений (8) можно представить в виде:

$$\begin{gathered} (p_1 + \bar{p}_1) + (p_2 + \bar{p}_2) = -a_1/a_0 \\ p_1\bar{p}_1 + p_2\bar{p}_2 + (p_1 + \bar{p}_1)(p_2 + \bar{p}_2) = a_2/a_0 \\ p_1\bar{p}_1(p_2 + \bar{p}_2) + p_2\bar{p}_2(p_1 + \bar{p}_1) = -a_3/a_0 \\ p_1\bar{p}_1 \cdot p_2\bar{p}_2 = a_4/a^0. \end{gathered} \tag{9}$$

Учитывая (7), заменяя модули всех корней полинома через δ и используя вещественность коэффициентов полинома и отрицательность действительных частей его корней. из системы (9) получаем систему неравенств (6):

Нижнюю границу наиболее удаленного от мнимой оси корня определим при помощи следующего неравенства:

$$M = \max_k |p_k| \geqslant \max_k \left|\frac{a_k}{a_0 C_n^k}\right|^{\frac{1}{k}}, \; k = 1, 2, \cdots, n. \tag{10}$$

Систему (2) можно преобразовать в систему неравенств:

$$\begin{gathered} |p_1| + \cdots + |p_n| \geqslant + \left|-\frac{a_1}{a_0}\right| \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ |p_1|\cdot|p_2|\cdots|p_n| \geqslant |(-1)^n|\frac{a_n}{a^0} \cdot \end{gathered} \tag{11}$$

Отсюда

$$\left.\begin{array}{l} C_n^1 M \geqslant \left|-\frac{a_1}{a_0}\right| \\ C_n^2 M^2 \geqslant \left|\frac{a_2}{a_0}\right| \\ \cdots\cdots\cdots \\ C_n^n M^n \geqslant \left|(-1)^n \frac{a_n}{a_0}\right| \end{array}\right\} \quad (12)$$

Из системы неравенств (12) непосредственно вытекает неравенство (10). Заметим, что результат (10) имеет место не только для устойчивых систем, но и для общего случая.

Если наиболее удаленный от мнимой оси корень — действительный, то из (3) и (10) можем определить его границы:

$$\max_k \left|\frac{a_k}{a_0 C_n^k}\right|^{\frac{1}{k}} \leqslant \lambda < n D_0, \quad k = 1, 2, \cdots n. \quad (13)$$

Перейдем к определению нижней границы степени устойчивости. Докажем, что если ближайший к мнимой оси корень действительный, то степень устойчивости системы больше значения a_n/a_{n-1}.

Произведем подстановку

$$p = \frac{1}{Z}, \quad (14)$$

тогда уравнение (1) примет вид:

$$a_n Z^n + a_{n-1} Z^{n-1} + \cdots + a_0 = 0. \quad (15)$$

Легко показать, что все корни уравнения (15) имеют отрицательные действительные части. По условию p_1 действительный, следовательно, z_1 тоже будет действительным, при этом он является наиболее удаленным от мнимой оси корнем уравнения (15). По аналогии (13) можно записать: $|z_1| < \frac{a_{n-1}}{a_n}$.

Но так как $\delta = |p_1| = \frac{1}{|z_1|}$, то

$$\delta > \frac{a_n}{a_{n-1}}. \quad (16)$$

Таким образом, степень устойчивости рассматриваемых систем можно оценивать интервалом:

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} < \delta \min_k \left(\frac{a_k}{a_0 C_n^k}\right)^{\frac{1}{k}}, \quad (17)$$

где нижний предел справедлив, если ближайший к мнимой оси корень действительный. Величина δ может служить для приближенной оценки быстроты затухания переходного процесса, поскольку составляющая этого процесса, отвечающая наиболее близкому к мнимой оси корню, затухает медленнее других. Время регулирования [1]:

$$T \approx \frac{\ln m}{\delta}, \tag{18}$$

где m — кратность уменьшения отклонения регулируемой величины за время регулирования.

Из (17) и (18) следует, что

$$D_0 \ln m < T < \frac{a_{n-1}}{a_n} \ln m, \tag{19}$$

где верхний предел справедлив, если ближайший к мнимой оси корень действительный.

Определим границы коэффициента затухания. Докажем, что если система устойчива, то ее коэффициент затухания не превосходит величины D_0/Ω_0.

Рассмотрим выражение:

$$|p_1 \cdot p_2 \cdots p_n| = \frac{a_n}{a_0} = \Omega_0^n$$

или

$$\frac{r_1 \cdot r_2 \cdots r_n}{\cos\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2 \cdot \cdots \cdot \cos\varphi_n} = \Omega_0^n,$$

где φ_k $(k = 1, 2, \cdots, n)$ — аргументы корней.

Это равенство можно привести к следующим неравенствам, заменяя φ_k через φ, и, имея в виду, что $\varphi = \max(\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n)$:

$$\frac{r_1 \cdot r_2 \cdots r_n}{\cos^n\varphi} \geqslant \Omega_0^n. \tag{20}$$

Поскольку $r_1 + r_2 + \cdots + r_n = nD_0 = \text{const}$, то их произведение получается наибольшим при равенстве всех сомножителей.

Поэтому неравенство (20) можно усиливать следующим образом:

$$\frac{D_0^n}{\cos^n\varphi} \geqslant \Omega_0^n.$$

Откуда

$$\cos\varphi \leqslant D_0/\Omega_0, \tag{21}$$

где равенство имеет место при всех кратных комплексных корнях.

Нижнюю границу коэффициента затухания определим с помощью круга, внутри которого расположены все корни уравнения (1). Величина радиуса R этого круга определяется формулой [2]:

$$R = 1 + \frac{A}{a_0}, \tag{22}$$

где $A = \max(a_1, a_2, \cdots, a_n)$.

Из (16) и (22) следует, что

$$\cos\varphi > \frac{a_n}{a_{n-1} R}.$$

Таким образом, коэффициент затухания можно грубо оценивать интервалом:

$$\frac{a_*}{a_{n-1}\,R} < \cos\varphi \leqslant \frac{D_0}{\Omega_0}, \tag{23}$$

где нижний предел справедлив, если ближайший к мнимой оси корень действительный.

В заключение отметим, что коэффициенты характеристического уравнения имеют различные веса по влиянию на качество переходного процесса. Границы показателей указывают пути повышения устойчивости и быстродействия систем регулирования.

АрмНИИЭ Поступило 27.VI.1967

Գ. Հ. ՄԵԼՔՈՆՅԱՆ

ԱՆՑՈՂԻԿ ՊՐՈՑԵՍԻ ՈՐԱԿԻ ՑՈՒՑԱՆԻՇՆԵՐԻ ՍԱՀՄԱՆՆԵՐԻ ՎԵՐԱԲԵՐՅԱԼ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Կարգավորման սիստեմի բնութագրիչ հավասարման գործակիցների միջոցով անցողիկ պրոցեսի ցուցանիշների ճշգրիտ որոշելը բավականաչափ դժվար է և առանց զգալի հաշվումների դրանց արժեքների կոպիտ գնահատումը որոշակի գործնական հետաքրքրություն է ներկայացնում։

Հոդվածում բերված է անցողիկ պրոցեսի որակի ցուցանիշների (կարգավորման ժամանակի, կայունության աստիճանի, մարման գործակցի) ստորին ու վերին սահմանների որոշման եղանակ՝ ելնելով բնութագրիչ հավասարման գործակիցների հայտնի մեծություններից։ Անցողիկ պրոցեսի որակի գնահատականը տրվում է արմատների բաշխման մեթոդով։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Иващенко Н. Н.* Автоматическое регулирование. Машгиз, 1962.
2. *Демидович Б. П.* и *Марон И. А.* Основы вычислительной математики. Физматгиз, 1963.