

МАГНИТНОЕ ПОЛЕ ВНУТРИ ДВУХПРОВОДНОЙ СПИРАЛЬНОЙ ЛИНИИ

Л.А. ГЕВОРГЯН*

Национальная научная лаборатория им. А.И. Алиханяна, Ереван, Армения

*e-mail: lekdar@yerphi.am

(Поступила в редакцию 25 июня 2021 г.)

Обтекаемая постоянным током петля, образованная двумя диаметрально противоположными спиралями из линейного или ленточного провода, является дефлектором для нерелятивистских, и спиральным ондулятором для релятивистских электронов. В данной работе получены аналитические выражения для трех компонент магнитной индукции внутри двухпроводной спиральной линии (ДСЛ), которые существенно отличаются от аналогичных выражений, используемых в научных работах. В частности, в приосевой области, где происходит взаимодействие электронов с магнитным полем, радиальная компонента магнитной индукции не возрастающая функция от радиальной координаты, а убывающая. Этот результат важен, поскольку для описания физических характеристик лазера на свободных электронах или дефлектора требуется учет точных траекторий электронов сгустка. Полученные правильные формулы для потенциала магнитного поля и компонент магнитной индукции необходимы и для определения значений резонансных частот электромагнитных волн, возбуждаемых квазистационарным синусоидальным напряжением внутри ДСЛ.

1. Введение

В упрощенной модели спирального ондулятора, магнитное поле на оси представляется поперечно циркулярно-поляризованным [1]. Такая простая модель была использована для определения характеристик спонтанного излучения, образованного в вакуумном ондуляторе [2] и в ондуляторе со средой при сужении спектра вокруг резонансной частоты [3].

ДСЛ как дефлектор для нерелятивистских электронов был предложен Ю.М. Шамаевым (см [4]). Поле внутри ДСЛ генерируется высокочастотным квазистационарным синусоидальным напряжением и считается, что в приосевой области электроны взаимодействуют с поперечным циркулярно-поляризованным электрическим полем [5,6].

Подобная элементарная модель поля спирального ондулятора была использована для определения динамики электронов в лазерах на свободных электронах (ЛСЭ). Для фазового угла между поперечным импульсом электрона и электрическим полем оптической волны было получено уравнение типа уравнения классического маятника в поле тяжести. Это уравнение получено во многих работах

разными методами (см. обзор А.А. Варфоломеева [7] и приведенные в нем ссылки). Описание физических характеристик ЛСЭ проводится на основе анализа фазовых траекторий электронов. Траектории электронов в идеализированном поле спирального ондулятора с учетом ведущего магнитного поля получены во многих работах (см. книгу Томаса Маршалла [8] и приведенные в ней ссылки). Однако циркулярно-поляризованное поперечное поле не реализуемо, поскольку не удовлетворяет уравнению Максвелла.

Реализуемое магнитное поле, генерируемое постоянным током в спиральном ондуляторе [9], было применено в [10] для определения влияния неоднородности поля на спектральные характеристики излучения.

В работах [11,12] были также использованы выражения для реализуемого магнитного поля, возбуждаемого синусоидальным поверхностным током в спиральном ондуляторе. Однако эти выражения отличаются от аналогичных выражений [10] тем, что продольная компонента магнитной индукции на оси ондулятора равна нулю.

Было основание сомневаться в правильности окончательных формул, приведенных в справочной книге крупного немецкого специалиста Г. Бухгольца [9].

Отметим, что эти формулы используются и в недавних работах (см. обзор [13]).

Целью данной работы является получение правильных формул для потенциала магнитного поля, созданного внутри ДСЛ, так и для магнитной индукции, генерируемой постоянным поверхностным током, что важно для определения траекторий электронов, взаимодействующих с магнитным полем.

Отметим, что при переменном напряжении в ДСЛ возбуждаются и распространяются электромагнитные волны только с определенными частотами, которые определяются при решении волнового уравнения для потенциала поля с граничными условиями [14]. В этой задаче также необходимо использовать правильное выражение для потенциала поля.

2. Векторный потенциал магнитного поля

Пусть линейные или ленточные провода намотаны диаметрально противоположно на поверхность цилиндра под углом ψ относительно оси цилиндра радиусом a с шагом h и числом витков N .

Направим ось OZ правой декартовой системы координат вдоль оси цилиндра, а ось OX вдоль линии, соединяющей входные концы спиралей. В цилиндрической системе безразмерных координат (ρ, φ, ξ) , где радиальная и продольная координаты представлены в единицах a , уравнения спиралей имеют простой вид:

$$\rho_1' = \rho_2' = 1; \quad \varphi_1' = \kappa \xi'; \quad \varphi_2' = \varphi_1' + \pi; \quad 0 \leq \xi' \leq 2\pi N / \kappa, \quad (1)$$

где $\kappa = \tan\psi = 2\pi a / h$ – параметр намотки.

Провод, обтекаемый током I с начальной точкой входа $(1,0,0)$ является прямым, а второй провод с током $(-I)$ и с начальной точкой входа $(1,\pi,0)$ – обратным.

Векторный потенциал магнитного поля $\mathbf{A}(\rho, \varphi, \xi)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению Пуассона:

$$\Delta A_p(P) = -\mu_0 i_p(P'); \quad \Delta = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \xi^2}, \quad (2)$$

где Δ – оператор Лапласа, $A_p(P)$ – компоненты $p = (\rho, \varphi, \xi)$ векторного потенциала в точке наблюдения $P(\rho, \varphi, \xi)$, $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ Henry/m – магнитная постоянная, $i_p(P')$ – компоненты плотности тока проводимости в точке источника $P'(1, \varphi', \xi')$.

Решение уравнения (2) задается формулой:

$$A_p(P) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{i_p(P')}{R(P', P)} dV', \quad (3)$$

где V – объем области, через которую протекает ток, $R(P', P)$ – расстояние между точкой источника $P'(1, \varphi', \xi')$ и точкой наблюдения $P(\rho, \varphi, \xi)$. Если диаметр провода достаточно мал, то можно считать, что поле создается линейным витком, по которому течет ток I . Тогда при интегрировании (3) по объему можно перейти к интегрированию по замкнутой нити тока. Если $\mathbf{i}_p(P') dV'$ заменить на $I d\mathbf{L}'(P')$, где $d\mathbf{L}'(P')$ – элемент вектора по направлению касательной в точке $(1, \varphi', \xi')$ вдоль винтовой спирали, то

$$\mathbf{A}(P) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \frac{d\mathbf{L}'(P')}{R(P', P)}. \quad (4)$$

В единицах длины a , входящие в (4) величины имеют вид

$$d\mathbf{L}'(P') = a d\mathbf{l}'(P'), \quad R(P', P) = ar(P', P).$$

Следовательно, в новых обозначениях для продольной компоненты векторного потенциала $A_\xi(P) = \phi(P)$ будем иметь:

$$\phi(P) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \frac{d\xi'}{r(P', P)}, \quad r(P', P) = \sqrt{(\xi' - \xi)^2 + 1 + \rho^2 - 2\rho \cos(\varphi' - \varphi)}. \quad (5)$$

Полярная компонента $A_\varphi(P)$ с учетом $d\mathbf{l}'_\varphi(P') = \tan\psi d\xi' = \kappa d\xi'$ равна $A_\varphi(P) = \kappa \phi(P)$. Таким образом векторный потенциал $\mathbf{A}(P) = \{0, \kappa \phi(P), \phi(P)\}$ магнитного поля внутри двухпроводной спиральной линии характеризуется одной скалярной функцией $\phi(P)$. Подынтегральную функцию $r^{-1}(P', P)$ можно представить через несобственный интеграл от функции Макдональда нулевого порядка [15]

$$r^{-1}(P', P) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \cos(\xi' - \xi) \eta K_0 \left(\eta \sqrt{1 + \rho^2 - 2\rho \cos(\varphi' - \varphi)} \right) d\eta. \quad (6)$$

Чтобы различать случаи $\rho < 1$ и $\rho > 1$, необходимо использовать следующее представление функции K_0 [9]:

$$K_0\left(\eta\sqrt{1+\rho^2-2\rho\cos(\varphi'-\varphi)}\right)=\sum_{v=0}^{\infty}\frac{2}{1+\delta_{v0}}\cos(v(\varphi'-\varphi))K_v(\eta)I_v(\rho\eta), \quad \rho<1, \quad (7)$$

где $K_v(\eta)$ и $I_v(\rho\eta)$ – модифицированные функции Бесселя, $\delta_{v0}=1$ при $v=0$ и $\delta_{v0}=0$ при $v\neq 0$. Итак, требуемое представление для $r^{-1}(P',P)$ имеет вид:

$$r^{-1}(P',P)=\frac{4}{\pi}\sum_{v=0}^{\infty}\frac{\cos(v(\varphi'-\varphi))}{4(1+\delta_{v0})}F(\xi',\rho,\xi), \quad (8)$$

$$F(\xi',\rho,\xi)=\int_0^{\infty}\cos(\eta(\xi'-\xi))K_v(\eta)I_v(\rho\eta)d\eta.$$

Замкнутый контур тока в (5) состоит из прямого провода с током I и обратного провода с током $-I$, каждый продольной длины $2\pi N/\kappa$. С учетом этого потенциал поля можно представить формулой:

$$\phi(\rho,\varphi,\xi)=\frac{\mu_0 I}{\pi^2}\sum_{v=0}^{\infty}\frac{1}{1+\delta_{v0}}\int_0^{2\pi N/\kappa}(\cos(v(\varphi_1'-\varphi))-\cos(v(\varphi_2'-\varphi)))F(\xi',\rho,\xi)d\xi'. \quad (9)$$

Так как $\varphi_2'=\pi+\varphi_1'$, то $\cos(v(\varphi_2'-\varphi))=(-1)^v\cos(v(\varphi_1'-\varphi))$ и с учетом (8) имеем:

$$\phi(\rho,\varphi,\xi)=\frac{2\mu_0 I}{\pi^2}\sum_v^{1,3,5,\dots}\int_0^{\infty}\int_0^{2\pi N/\kappa}\cos(\kappa\xi'-\varphi)\cos(\eta(\xi'-\xi))K_v(\eta)I_v(\rho\eta)d\xi'd\eta. \quad (10)$$

После интегрирования по ξ' получаем:

$$f(\varphi,\xi,\eta)=\int_0^{2\pi N/\kappa}\cos(v(\kappa\xi'-\varphi))\cos(\eta(\xi'-\xi))d\xi'$$

$$=\frac{\sin\left(\frac{N\pi}{\kappa}(\eta-v\kappa)\right)}{(\eta-v\kappa)}\cos\left(\frac{N\pi}{\kappa}(\eta-v\kappa)-(\eta\xi-v\varphi)\right) \quad (11)$$

$$+\frac{\sin\left(\frac{N\pi}{\kappa}(\eta+v\kappa)\right)}{(\eta+v\kappa)}\cos\left(\frac{N\pi}{\kappa}(\eta+v\kappa)-(\eta\xi+v\varphi)\right).$$

Первое слагаемое в (11) с точностью до малых порядка $\kappa/(\pi N)$ можно заменить δ -функцией Дирака:

$$\pi\delta(\eta-v\kappa)\cos(\eta\xi-v\varphi). \quad (12)$$

В выражении (10) интеграл по η вычисляется в пределах от нуля до бесконечности, следовательно, второе слагаемое в (11) обращается в нуль. Для потенциала поля окончательно получаем следующее выражение:

$$\phi(\rho,\varphi,\xi)=\frac{2\mu_0 I}{\pi^2}\sum_v^{1,3,5,\dots}K_v(v\kappa)I_v(v\kappa\rho)\cos(\kappa\xi-\varphi). \quad (13)$$

Таким образом, векторный потенциал вихревого магнитного поля внутри двухпроводной спиральной линии $\mathbf{A}(0,\kappa\phi,\phi)$ определяется потенциалом $\phi(\rho,\varphi,\xi)$.

Рассмотрим случай, когда спирали ДСЛ состоят из тонкого ленточного провода шириной d . Цилиндрически выпуклую ленту можно представить как бесконечное число нитей параллельных оси симметрии ленты, крайние нити которой видны под углом $\pm\alpha = \pm d/(2a \cos \psi) = \pm d\sqrt{1+\kappa^2}/(2a)$. Полярный угол источника $\varphi' = \kappa \xi'$ имеет разброс χ' ($-\alpha \leq \chi' \leq \alpha$). Усреднив входящую в (9) функцию $\cos(v(\kappa \xi' - \varphi + \chi'))$ по переменной χ' :

$$\frac{1}{2\alpha} \int_{-\alpha}^{\alpha} \cos(v(\kappa \xi' - \varphi + \chi')) d\chi' = f_v(\alpha) \cos(v(\kappa \xi' - \varphi)), \quad f_v(\alpha) = \frac{\sin(v\alpha)}{v\alpha}, \quad (14)$$

получим следующую формулу для потенциала поля:

$$\phi(\rho, \varphi, \xi) = \frac{2\mu_0 I}{\pi^2} \sum_v^{1,3,5,\dots} f_v(\alpha) K_v(v\kappa) I_v(v\kappa \rho) \cos(\kappa \xi - \varphi). \quad (15)$$

При этом, когда диаметр провода достаточно мал $v\alpha \ll 1$, то функция $f_v(\alpha) \approx 1$.

3. Три компоненты магнитной индукции

Компоненты магнитной индукции определяются уравнением

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A} = \frac{1}{a\rho} \begin{vmatrix} \mathbf{e}_\rho & \rho \mathbf{e}_\varphi & \mathbf{e}_\xi \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial \xi} \\ 0 & \kappa \rho \phi & \phi \end{vmatrix}, \quad (16)$$

\mathbf{e}_ρ , \mathbf{e}_φ , \mathbf{e}_ξ — единичные векторы вдоль ρ , φ , ξ .

$$\begin{aligned} B_\rho &= \frac{1}{a} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} - \kappa \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right) = -B \sum_v^{1,3,5} v^2 f_v(\alpha) K_v(v\kappa) \frac{I_v(x)}{x} (1 - \kappa^2 \rho) \sin(v(\kappa \xi - \varphi)), \\ B_\varphi &= -\frac{1}{a} \frac{\partial \phi}{\partial \rho} = -B \sum_v^{1,3,5} v f_v(\alpha) K_v(v\kappa) \dot{I}_v(x) \cos(v(\kappa \xi - \varphi)), \\ B_\xi &= \frac{1}{a\rho} \frac{\partial(\rho\phi)}{\partial \rho} = B\kappa \sum_v^{1,3,5} v f_v(\alpha) K_v(v\kappa) \left(\frac{I_v(x)}{x} + \dot{I}_v(x) \right) \cos(v(\kappa \xi - \varphi)), \end{aligned} \quad (17)$$

где $B = 2\mu_0 I \kappa / \pi = 4\mu_0 I / h$; $\dot{I}_v(x)$ — производная функция по аргументу.

Полученные здесь выражения для трех компонент магнитной индукции существенно отличаются от аналогичных выражений, приведенных в книге [9]. Легко проверить, что поле (17) удовлетворяет уравнениям $\vec{\nabla} \mathbf{B} = 0$ и $\vec{\nabla} \times \mathbf{B} = 0$. Следовательно, оно реализуемо. Обычно параметр намотки спирального ондулятора порядка единицы ($\kappa \leq 1$). В выражениях (17) для компонент магнитной индукции в приосевой области ($\kappa \rho \ll 1$) основной вклад вносит первая гармоника, поскольку произведения $K_v(v\kappa) I_v(x)$ и $K_v(v\kappa) \dot{I}_v(x)$ для высших гармоник

экспоненциально падают по закону $\exp\left(-\nu\kappa(1-\rho)/(2\nu\kappa\sqrt{\rho})\right)$.

В приосевой области компоненты магнитной индукции с точностью до малых порядка $(\kappa\rho)^2$ с учетом $I_1(x)/x = \dot{I}_1(x) = 1/2$ имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} B_\rho &= -B_1 \left(1 - \kappa^2 \rho + \frac{1}{8} (\kappa \rho)^2 \right) \sin(\kappa \xi - \varphi), \\ B_\varphi &= -B_1 \left(1 + \frac{3}{8} (\kappa \rho)^2 \right) \cos(\kappa \xi - \varphi), \\ B_\xi &= 2B_1 \kappa \left(1 + \frac{1}{4} (\kappa \rho)^2 \right) \cos(\kappa \xi - \varphi) \end{aligned} \quad (18)$$

где $B_1 = 2\mu_0 I K_1(\kappa) / h$.

Полученные здесь выражения для компонент магнитной индукции в приосевой области отличаются от аналогичных выражений, используемых в научных работах [8]:

$$\begin{aligned} B_\rho &= -B_1 \left(1 + \frac{3}{8} (\kappa \rho)^2 \right) \sin(\kappa \xi - \varphi), \\ B_\varphi &= B_1 \left(1 + \frac{1}{8} (\kappa \rho)^2 \right) \cos(\kappa \xi - \varphi), \\ B_\xi &= -B_1 (\kappa \rho) \left(1 + \frac{1}{8} (\kappa \rho)^2 \right) \cos(\kappa \xi - \varphi). \end{aligned} \quad (19)$$

В отличие от (18), продольная компонента B_ξ стремится к нулю при $\rho \rightarrow 0$. В них отсутствует линейная зависимость компоненты B_ρ от ρ . Отличаются также коэффициенты при слагаемых $(\kappa\rho)^2$.

Компоненты магнитной индукции периодические функции от одной переменной $\kappa\xi - \varphi$ (слияние пространственных переменных φ и ξ в одну). При этом они по разному зависят от радиальной переменной ρ : при удалении от оси B_φ и B_ξ компоненты увеличиваются, а B_ρ — уменьшается.

4. Заключение

Вихревое магнитное поле, возбужденное внутри ДСЛ постоянным током, характеризуется одной функцией — скалярным потенциалом. Для скалярного потенциала и для трех компонент магнитной индукции получены правильные выражения, что важно для правильного описания физических процессов, происходящих как в ЛСЭ, так и в дефлекторе.

Коэффициент усиления вынужденного излучения определяется производной от формы линии спонтанного излучения под нулевым углом. А спектральное распределение спонтанного излучения определяется интегралом по траектории

электронов. Для точного определения траектории электронов необходимо использовать правильные выражения компонент магнитной индукции. В дефлекторе отклонением нерелятивистских электронов от оси временная информация переходит в пространственную. Для определения малых времен необходимо иметь точные траектории электронов.

Когда поле возбуждается квазистационарным синусоидальным напряжением, то ДСЛ представляет собой волноводный резонатор из-за тока смещения в вакууме. В этом случае в ДСЛ возбуждаются и распространяются электромагнитные волны с определенными частотами. Для определения резонансных частот необходимо решить волновое уравнение для потенциала с граничными условиями. Потенциал приобретает колебательный характер вдоль радиального и продольного направлений. Поскольку в ДСЛ возбуждаются поперечные электрические волны, то синхронным решением волнового уравнения с нулевой производной продольной компоненты магнитной индукции на границах определяются собственные (резонансные) значения частот электромагнитных волн, распространяющихся в ДСЛ. Таким образом в задачах, исследующих взаимодействие электронов сгустка с электромагнитными волнами в ДСЛ, также важно иметь правильное выражение потенциала вихревого магнитного поля.

Исследование проводилось при финансовой поддержке Международного Научно-Технического Центра (МНТЦ) в рамках научного проекта А-2390.

ЛИТЕРАТУРА

1. **W.K. Smythe.** Static and Dynamic Electricity, New-York, Mc Grow-Hill, 1950.
2. **Д.Ф. Алферов, Ю.А. Башмаков, Е.Г. Бессонов.** Труды ФИАН, **80**, 100 (1975).
3. **L.A. Gevorgyan, P.M. Pogosyan.** Radiat. Eff., **91**, 275 (1986).
4. **В.И. Вознесенский и др.** Успехи физических наук, **LXII**, 497 (1957).
5. **А.А. Жигарев.** Электронно-лучевые приборы, Москва, Энергия, 1965.
6. **L. Gevorgyan, R. Ajvazyan, V. Kakoyan et al.** NIM A, **785**, 175 (2015).
7. **А.А. Варфоломеев.** Лазеры на свободных электронах и перспективы их развития: Обзор, Москва, ИАЭ, 1980.
8. **T.C. Marshall.** Free-Electron Lasers, New-York, London, Macmillan Pub. Co., Collier Macmillan, 1985.
9. **H. Buchholz.** Elektrische und magnetische Potentialfelder, Berlin, Springer, 1957.
10. **Л.А. Геворгян, П.М. Погосян.** Изв. АН Арм ССР, Физика, **22**, 16 (1987).
11. **B.M. Kincaid.** J. Appl. Phys., **48**, 2684 (1977).
12. **J.P. Blewett, R.C. Chasman.** J. App. Phys., **48**, 2692 (1977).
13. **C. Pellegrini, A. Marinelli, S. Reiche.** Reviews of Modern Physics, **88**, 015006 (2016).
14. **J.D. Jackson.** Classical Electrodynamics, 3rd ed., New York, Welly, 1999.
15. **А.П. Прудников, Ю.А. Брычков, О.И. Маричев.** Интегралы и ряды, Специальные функции; Москва, Наука, 1983.

ՄԱԳՆԻՍԱԿԱՆ ԴԱՇՏԸ ԵՐԿԼԱՐԱՆԻ ՊԱՐՈՒՐԱԶԵՎ
ՀԱՂՈՐԴԻՉՆԵՐԻ ՆԵՐՍՈՒՄ

Լ.Հ. ԳԵՎՈՐԳՅԱՆ

Գծային կամ ժապավենաձև հաղորդիչների տրամագծորեն հակառակ պարույրներից կազմված, հաստատուն հոսանքով սնվող շղթան հանդիսանում է շեղող համակարգ ոչ ռելյատիվիստիկ, և պարուրաձև օնդուլյատոր՝ ռելյատիվիստիկ էլեկտրոնների համար: Երկլարանի պարուրաձև հաղորդիչների (ԵՊՀ) ներսում մագնիսական ինդուկցիայի երեք բաղադրիչների համար ստացված արտահայտությունները էապես տարբերվում են գիտական հոդվածներում օգտագործվող արտահայտություններից: Մասնավորապես, ԵՊՀ-ի առանցքին մոտ տիրություն, որտեղ տեղի է ունենում էլեկտրոնների փոխազդեցությունը մագնիսական դաշտի հետ, մագնիսական ինդուկցիայի ռադիալ բաղադրիչը ոչ թե աճող ֆունկցիա է շառավղից, այլ՝ նվազող: Այս արդյունքը կարևոր է, քանի որ ազատ էլեկտրոններով լազերի (ԱԷԼ) կամ շեղող համակարգի ֆիզիկական բնութագրերի նկարագրումը հնարավոր է թանձրուկի էլեկտրոնների ճշգրիտ հետազոտելի հաշվառմամբ: Մագնիսական դաշտի պոտենցիալի և մագնիսական ինդուկցիայի բաղադրիչների համար ստացված ճշգրիտ բանաձևերը անհրաժեշտ են նաև ԵՊՀ-ի ներսում հարմոնիկ քվադրիստացիոնար լարումով գրգռված էլեկտրոնագնիսական ալիքների ռեզոնանսային հաճախությունների որոշման համար:

MAGNETIC FIELD INSIDE A TWO-WIRE SPIRAL LINE

L.A. GEVORGIAN

A direct current streamlined loop formed by two diametrically opposite spirals of a linear or ribbon wire is a deflector for nonrelativistic electrons, and a spiral undulator for relativistic electrons. In this article, analytical expressions are obtained for the three components of magnetic induction inside a two-wire spiral line (TSL), which differ significantly from similar expressions used in scientific works. In particular, in the paraxial region, where electrons interact with the magnetic field, the radial component of the magnetic induction is not an increasing function of the radial coordinate, but a decreasing one. This result is important because the description of the physical characteristics of a free electron laser or deflector requires taking into account the exact trajectories of the bunch electrons. The obtained correct formulas for the potential of the magnetic field and the components of the magnetic induction are also necessary to determine the values of the resonant frequencies of electromagnetic waves excited by a quasi-stationary sinusoidal voltage inside the TSL.