АСТРОФИЗИКА

ТОМ 52 НОЯБРЬ, 2009 ВЫПУСК 4

ВАКУУМНЫЕ ФЛУКТУАЦИИ В КОСМОЛОГИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ С КОМПАКТНЫМИ ИЗМЕРЕНИЯМИ

А.Л.МХИТАРЯН

Поступила 17 апреля 2009
Принята к печати 16 сентября 2009

Исследованы квантовые эффекты скалярного поля в космологических моделях Фридмана-Робертсона-Уокера со степенным масштабным фактором и с пространственной топологией $R^p \times (S^1)^q$. Получены рекуррентные формулы для положительно-частотной функции Вайтмана и вакуумного среднего квадрата поля. Исследовано асимптотическое поведение вакуумного среднего в ранних и поздних стадиях космологической эволюции.

Ключевые слова: *Космология:вакуумные флуктуации:теории Калузы-Клейна*

1. *Введение*. Многие физические теории, включая супергравитацию и теорию струн, формулируются в пространстве-времени с компактными пространственными измерениями. Такие модели обеспечивают естественные начальные условия для инфляционной фазы в ранней стадии эволюции Вселенной [1]. Квантовая генерация Вселенной с тороидальными компактными измерениями рассмотрена в работах [2-5] в рамках различных теорий супергравитации.

Компактификация пространственных измерений приводит к ряду интересных квантово-полевых эффектов включая нестабильности в теории взаимодействующих полей [6], генерацию топологической массы [7,8], нарушение симметрии [9-11]. В моделях с компактными измерениями граничные условия, налагаемые на поля, приводят к модификации спектра нулевых колебаний вакуума и в результате изменяются вакуумные средние физических величин. Это явление известно под названием топологического эффекта Казимира (см., например, [12,13]). В моделях типа Калузы-Клейна этот эффект используется в качестве механизма стабилизации полей модулей, параметризующих размер дополнительных измерений. Энергия Казимира может также выступить в качестве модели темной энергии [14,15], необходимой для объяснения ускоренного расширения Вселенной в настоящую эпоху.

В данной работе исследованы квантовые эффекты скалярного поля в космологических моделях Фридмана-Робертсона-Уокера со степенным масштабным фактором и компактными пространственными измерениями.

Работа организована следующим образом. В разделе 2 описана геометрия задачи, представляющей пространство-время Фридмана-Робертсона-Уокера с топологией $R^p \times (S^1)^q$. В разделе 3 получены собственные функции безмассового скалярного поля с периодическими граничными условиями вдоль компактных измерений. Далее рассмотрены положительно частотная функция Вайтмана (раздел 4) и вакуумное среднее квадрата поля (раздел 5). Исследованы асимптотики в ранних и поздних стадиях космологической эволюции. Основные результаты работы подытожены в разделе 6.

2. *Геометрия задачи*. Рассмотрим $(D+1)$-мерное пространство-время Фридмана-Робертсона-Уокера с линейным элементом

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)\sum_{\alpha=1}^{D}\left(dx^\alpha\right)^2 \tag{1}$$

и с масштабным фактором специального вида

$$a(t) = \sigma t^c, \quad 0 \le t < \infty, \tag{2}$$

где σ и c - постоянные. Вводя конформную временную координату η согласно $\eta = t^{1-c}/[\sigma(1-c)]$, рассматриваемую метрику можно привести к более удобному для дальнейших вычислений виду

$$ds^2 = C(\eta)\left[d\eta^2 - \sum_{\alpha=1}^{D}\left(dx^\alpha\right)^2\right], \tag{3}$$

где масштабный фактор определяется выражением

$$C(\eta) = \sigma_1|\eta|^{\frac{2c}{1-c}}, \quad \sigma_1 = |1-c|^{\frac{2c}{1-c}}\sigma^{\frac{2}{1-c}}. \tag{4}$$

Заметим, что $0 \le \eta < \infty$ при $c < 1$ и $-\infty < \eta \le 0$ при $c > 1$.

Для метрики, соответствующей линейному элементу (1), ненулевые компоненты тензора Риччи определяются соотношениями

$$R_{00} = D\frac{a''(t)}{a(t)}, \quad R_{\alpha\alpha} = -a''(t)a(t) - (D-1)a'^2(t), \tag{5}$$

где штрих означает производную по t. Соответствующий скаляр Риччи определяется выражением

$$R = Dc(c-2+Dc)t^{-2} = Dc(c-2+Dc)|1-c|^{\frac{2}{c-1}}|\sigma\eta|^{\frac{2}{c-1}}. \tag{6}$$

Мы предполагаем, что пространственные координаты x^l, $l = p+1,\ldots,D$, компактифицированы на окружность S^1 с длиной $L_l : 0 \le x^l \le L_l$, а для остальных координат имеем $-\infty < x^l < +\infty$, $l = 1,\ldots,p$. Следовательно мы рассматриваем пространственную топологию $R^p \times (S^1)^q$, где $q = D-p$ (о физической мотивации моделей с компактными измерениями см. [16]).

3. *Собственные функции*. Рассмотрим свободное безмассовое скалярное поле φ на фоне $(D+1)$-мерного пространства-времени Фридмана-

Робертсона-Уокера с масштабным фактором специального вида (2). Соответствующее уравнение поля имеет вид

$$\left(\nabla_l \nabla^l + \xi R\right)\varphi = 0\,, \tag{7}$$

где ∇_l - ковариантная производная, соответствующая линейному элементу (1), R - скаляр Риччи фонового пространства времени, а ξ - параметр связи с кривизной. Частные случаи $\xi = 0$ и $\xi = \xi_D \equiv (D-1)/4D$ соответствуют скалярным полям с минимальной и конформной связью, соответственно.

Для скалярного поля с периодическими граничными условиями имеем вдоль компактных направлений

$$\varphi\left(t, \mathbf{x}_p, \mathbf{x}_q + L_l \mathbf{e}_l\right) = \varphi\left(t, \mathbf{x}_p, \mathbf{x}_q\right), \tag{8}$$

где $l = p+1, \ldots, D$ и $\mathbf{e}_l$ - единичный вектор вдоль координаты x^l. Здесь и ниже будем пользоваться обозначениями $\mathbf{x}_p = \left(x^1, \ldots, x^p\right)$ и $\mathbf{x}_q = \left(x^{p+1}, \ldots, x^D\right)$ для некомпактифицированных и компактифицированных координат, соответственно.

Из симметрии задачи следует, что пространственную зависимость собственных функций $\varphi_\chi(x)$ можно взять в стандартном плосковолновом виде $e^{i\mathbf{kx}}$. Следовательно, для собственных функций имеем представление

$$\varphi_\chi(x) = \phi_\chi(\eta) e^{i\mathbf{k}_p\mathbf{x}_p + i\mathbf{k}_q\mathbf{x}_q}\,, \tag{9}$$

где для волнового вектора введены следующие обозначения

$$\mathbf{k}_p = \left(k_1, \ldots, k_p\right), \quad \mathbf{k}_q = \left(k_{p+1}, \ldots, k_D\right), \quad k = \sqrt{\mathbf{k}_p^2 + \mathbf{k}_q^2}\,,$$
$$k_l = \frac{2\pi n_l}{L_l}, \quad n_l = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \quad l = p+1, \ldots, D. \tag{10}$$

Подстановка функции (9) в уравнение поля (7) приводит к следующему уравнению для функции $\phi_\chi(\eta)$:

$$\phi''_\chi(\eta) + \frac{c(D-1)}{1-c}\frac{1}{\eta}\phi'_\chi(\mu) + \left(\mathbf{k}^2 + \frac{\xi Dc(c-2+Dc)}{(1-c)^2\eta^2}\right)\phi_\chi(\eta) = 0\,. \tag{11}$$

Представив решение этого уравнения в виде $\phi_\chi(\eta) = \eta^\beta h_\chi(\eta)$, с

$$\beta = \frac{1}{2}\frac{cD-1}{c-1}\,, \tag{12}$$

для функции $h_\chi(\eta)$ получаем уравнение Бесселя

$$\eta^2 h''_\chi(\eta) + \eta h'_\chi(\eta) + \left(\mathbf{k}^2\eta^2 - \upsilon^2\right)h_\chi(\eta) = 0 \tag{13}$$

с параметром

$$\upsilon^2 = \frac{1 - Dc\left[2 - Dc + 4\xi(Dc + c - 2)\right]}{4(c-1)^2}\,. \tag{14}$$

Общее решение уравнения (13) можно представить в виде

$$h_\chi(\eta) = c_1 H_\upsilon^{(1)}(k|\eta|) + c_2 H_\upsilon^{(2)}(k|\eta|)\,, \tag{15}$$

где $H_{\upsilon}^{(1,2)}(k|\eta|)$ - функции Ганкеля первого и второго рода. Заметим, что для конформно-связанного поля имеем $\upsilon = 1/2$ и функции Ганкеля выражаются через элементарные функции.

В результате выражение собственных функций скалярного поля для рассматриваемой геометрии имеет вид

$$\varphi_{\chi}(x) = \eta^{\beta}\left[c_1 H_{\upsilon}^{(1)}(k|\eta|) + c_2 H_{\upsilon}^{(2)}(k|\eta|)\right] e^{i\mathbf{k}_p\mathbf{x}_p + i\mathbf{k}_q\mathbf{x}_q} . \tag{16}$$

Различные значения постоянных c_1 и c_2 соответствуют различным вакуумным состояниям. Ниже будем полагать, что коэффициент $c_2 = 0$. Это соответствует выбору состояния Банча-Девиса в качестве вакуумного состояния квантованного скалярного поля [17]. Заметим, что собственные функции определяются набором собственных чисел $\chi = (\mathbf{k}_p, n_{p+1}, \ldots, n_D)$.

Таким образом, полагая, что поле находится в вакуумном состоянии Банча-Девиса, для собственных функций имеем

$$\varphi_{\chi}(x) = C_{\chi}\, \eta^{\beta} H_{\upsilon}^{(1)}(k|\eta|) e^{i\mathbf{k}_p\mathbf{x}_p + i\mathbf{k}_q\mathbf{x}_q} . \tag{17}$$

Коэффициенты C_{χ} определяются из стандартного условия ортонормировки для уравнения Клейна-Гордона: (см., например, [16])

$$i\int d^D x \sqrt{|g|}\, g^{00}\left[\varphi_{\chi}(x)\partial_{\eta}\varphi_{\chi'}^{*}(x) - \varphi_{\chi'}^{*}(x)\partial_{\eta}\varphi_{\chi}(x)\right] = \delta_{\chi\chi'} , \tag{18}$$

где интегрирование проводится по пространственной гиперповерхности $\eta = \mathrm{const}$. Под символом $\delta_{\chi\chi'}$ здесь подразумевается символ Кронекера для дискретных индексов и дельта функция Дирака для непрерывных индексов. Подставляя выражение для собственных функций и используя Вронскиан для функций Ганкеля, для нормировочного коэффициента получим формулу

$$|C_{\chi}|^2 = \frac{\sigma_1^{(1-D)/2}\, e^{(\upsilon-\upsilon^*)\pi i}}{2^{p+2}\pi^{p-1} V_q} , \tag{19}$$

где $V_q = L_{p+1} \cdots L_D$ - объем компактного подпространства.

4. *Функция Вайтмана*. Компактификация пространственных измерений приводит к изменению спектра нулевых колебаний квантованного скалярного поля. В результате изменяются вакуумные средние физических величин (о квантовых эффектах в моделях Фридмана-Робертсона-Уокера с тривиальной топологией см. [12,18]). Одним из наиболее важных характеристик вакуумного состояния является вакуумное среднее квадрата поля, $\langle 0|\varphi^2|0\rangle$. Это среднее можно получить из положительно-частотной функции Вайтмана $G_{p,q}^{+}(x, x')$ в пределе совпадения аргументов. Функция Вайтмана также важна при рассмотрении отклика детекторов частиц типа Унру-ДеВитта. Разлагая оператор поля по полному набору собственных функций $\{\varphi_{\chi}(x), \varphi_{\chi}^{*}(x)\}$, удовлетворяющих периодическим граничным условиям,

функцию Вайтмана можно представить в виде суммы по собственным модам:

$$G^{+}_{p,q}(x,x') = \langle 0|\varphi(x)\varphi(x')|0\rangle = \sum_{\chi}\varphi_{\chi}(x)\varphi^{*}_{\chi}(x'), \tag{20}$$

где $|0\rangle$ - амплитуда соответствующего вакуумного состояния (вакуум Банча-Девиса). В формуле (20) подразумевается суммирование по дискретным индексам и интегрирование по непрерывным.

Подставляя собственные функции (17) в формулу (20), для функции Вайтмана получим следующее выражение

$$G^{+}_{p,q}(x,x') = \frac{\sigma_1^{(1-D)/2}\, e^{(2\upsilon^{*})\pi i}}{2^{p+2}\pi^{p-1}V_q}(\eta\eta')^{\frac{cD-1}{2(c-1)}}\int d\mathbf{k}_p\, e^{i\mathbf{k}_p\Delta\mathbf{x}_p}\times$$

$$\times\sum_{n_{p+1}=-\infty}^{\infty}\cdots\sum_{n_D=-\infty}^{\infty} e^{i\mathbf{k}_q\Delta\mathbf{x}_q}\, H^{(1)}_{\upsilon}(k|\eta|)\left[H^{(1)}_{\upsilon}(k|\eta'|)\right]^{*}. \tag{21}$$

В дальнейшем удобно перейти от функций Ганкеля к функции Макдональда с помощью соотношения

$$H^{(1)}_{\upsilon}(k|\eta|)\left[H^{(1)}_{\upsilon}(k|\eta'|)\right]^{*} = \frac{4}{\pi^2}K_{\upsilon}\left(k\eta e^{-\frac{\pi i}{2}}\right)K_{\upsilon}\left(k\eta' e^{\frac{\pi i}{2}}\right). \tag{22}$$

В качестве следующего шага применим формулу Абеля-Плана

$$\sum_{n=0}^{\infty}{}' f(n) = \int_0^{\infty} du f(u) + i\int_0^{\infty} du\frac{f(iu)-f(-iu)}{e^{2\pi u}-1} \tag{23}$$

к суммированию по n_{p+1} в (21). В результате функция Вайтмана представится в виде

$$G^{+}_{p,q}(x,x') = G^{+}_{p+1,q-1}(x,x') + \Delta_{p+1}G^{+}_{p,q}(x,x'), \tag{24}$$

где $G^{+}_{p+1,q-1}(x,x')$ соответствует первому слагаемому в правой части формулы (23). Второе слагаемое в правой части (24) определяется выражением

$$\Delta_{p+1}G^{+}_{p,q}(x,x') = \frac{\sigma_1^{(1-D)/2}}{2^{p}\pi^{p+2}V_q}(\eta\eta')^{\frac{cD-1}{2(c-1)}}\int d\mathbf{k}_p\, e^{i\mathbf{k}_p\Delta\mathbf{x}_p}\times$$

$$\times\sum_{n_{p+2}=-\infty}^{\infty} e^{\frac{2\pi i}{L_{p+2}}n_{p+2}\Delta x_{p+2}}\cdots\sum_{n_D=-\infty}^{\infty} e^{\frac{2\pi i}{L_D}n_D\Delta x_D}\times$$

$$\times\int_0^{\infty} du\frac{u\cosh\left(\sqrt{u^2+\mathbf{k}_p^2+\mathbf{k}_{q-1}^2}\,\Delta x_{p+1}\right)}{\sqrt{u^2+\mathbf{k}_p^2+\mathbf{k}_{q-1}^2}\left(e^{L_{p+1}\sqrt{u^2+\mathbf{k}_p^2+\mathbf{k}_{q-1}^2}}-1\right)}\times \tag{25}$$

$$\times\left[K_{\upsilon}(u|\eta|)I_{-\upsilon}(u|\eta'|) + I_{\upsilon}(u|\eta|)K_{\upsilon}(u|\eta'|)\right]$$

и обусловлено компактностью направления x_{p+1}. В (25) $I_{\upsilon}(x)$ - модифицированная функция Бесселя первого рода.

Повторным применением рекуррентного соотношения (24), функцию Вайтмана в пространстве-времени Фридмана-Робертсона-Уокера с топологией $R^p\times\left(S^1\right)^q$ можно представить в виде

$$G^+_{p,q}(x,x')=G^+_{RW}(x,x')+\Delta G^+_{p,q}(x,x'), \tag{26}$$

где $G^+_{RW}(x,x')=G^+_{D,0}(x,x')$ соответствующая функция Вайтмана в некомпактифицированном пространстве-времени Фридмана-Робертсона-Уокера, а слагаемое

$$\Delta G^+_{p,q}(x,x')=\sum_{l=1}^{q}\Delta_{D-l+1}G^+_{D-l,l}(x,x') \tag{27}$$

обусловлено тороидальной компактификацией q-мерного подпространства.

5. ***Вакуумное среднее квадрата поля.*** Вакуумное среднее квадрата поля в пространстве Фридмана-Робертсона-Уокера с пространственной топологией $R^p\times\left(S^1\right)^q$ будем обозначать через $\left\langle\varphi^2\right\rangle_{p,q}$. Имея функцию Вайтмана, это среднее можно вычислить в пределе совпадения аргументов:

$$\left\langle\varphi^2\right\rangle_{p,q}=\lim_{x'\to x}G^+_{p,q}(x,x'). \tag{28}$$

Конечно, в этом пределе двухточечные функции расходятся и необходима процедура перенормировки. Важный момент здесь заключается в том, что в результате тороидальной компактификации локальная геометрия не меняется и расходимости те же, что и в случае пространства-времени без компактификации. Поскольку мы уже выделили функцию Вайтмана $G^+_{RW}(x,x')$, перенормировка вакуумного среднего сводится к перенормировке соответствующего среднего для модели Фридмана-Робертсона-Уокера без компактификации. В соответствии с (24), для вакуумного среднего получим формулу

$$\left\langle\varphi^2\right\rangle_{p,q}=\left\langle\varphi^2\right\rangle_{p+1,q-1}+\Delta_{p+1}\left\langle\varphi^2\right\rangle_{p,q}. \tag{29}$$

Здесь слагаемое $\Delta_{p+1}\left\langle\varphi^2\right\rangle_{p,q}$ обусловлено компактностью направления x_{p+1}. Повторным применением этой рекуррентной формулы вакуумное среднее для топологии $R^p\times\left(S^1\right)^q$ представится в виде

$$\left\langle\varphi^2\right\rangle_{p,q}=\left\langle\varphi^2\right\rangle_{RW}+\left\langle\varphi^2\right\rangle_{c},\quad \left\langle\varphi^2\right\rangle_{c}=\sum_{l=1}^{q}\Delta_{D-l+1}\left\langle\varphi^2\right\rangle_{p,q}, \tag{30}$$

где $\left\langle\varphi^2\right\rangle_{RW}$ - вакуумное среднее в некомпактифицированной модели Робертсона-Уокера, а часть $\left\langle\varphi^2\right\rangle_{c}$ обусловлена компактификацией q-мерного подпространства.

Здесь мы будем исследовать топологическую часть $\Delta_{p+1}\left\langle\varphi^2\right\rangle_{p,q}$, которая определяется из формулы (25) согласно

$$\Delta_{p+1}\left\langle\varphi^2\right\rangle_{p,q} = \lim_{x'\to x}\Delta_{p+1}G^+_{p,q}(x,x'). \quad (31)$$

Интегрируя по направлениям $\mathbf{k}_p$, вводя новое переменное $y=\sqrt{u^2+\left|\mathbf{k}_p\right|^2+\mathbf{k}_{q-1}^2}$ и разлагая $\left(e^{Ly}-1\right)^{-1}=\sum_{n=1}^{\infty}e^{-nLy}$, интегрирование по $\left|\mathbf{k}_p\right|$ проводится явно. В результате получим следующую формулу

$$\Delta_{p+1}\left\langle\varphi^2\right\rangle_{p,q} = \frac{\sigma_1^{(1-D)/2}}{2^{\frac{p-1}{2}}\pi^{\frac{p+3}{2}}V_q}|\eta|^{\frac{cD-1}{c-1}}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{n_{p+2}=-\infty}^{\infty}\cdots\sum_{n_D=-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty}du\times$$
$$\times uK_\upsilon(u|\eta|)\frac{I_{-\upsilon}(u|\eta|)+I_\upsilon(u|\eta|)}{(nL_{p+1})^{p-1}}f_{(p-1)/2}\left(nL_{p+1}\sqrt{u^2+\mathbf{k}_{q-1}^2}\right), \quad (32)$$

где введено обозначение

$$f_\mu(y)=y^\mu K_\mu(y). \quad (33)$$

Для конформно связанного скалярного поля имеем $\upsilon=1/2$ и, следовательно, $K_\upsilon(u|\eta|)\left[I_{-\upsilon}(u|\eta|)+I_\upsilon(u|\eta|)\right]=1/(u|\eta|)$. В этом случае интегрирование по u в (32) проводится явно и получим

$$\Delta_{p+1}\left\langle\varphi^2\right\rangle_{p,q} = \frac{\left(\sigma t^c\right)^{1-D}}{2^{\frac{p}{2}}\pi^{\frac{p}{2}+1}L_{p+1}^{\frac{p}{2}-1}V_q}\sum_{n_{p+2}=-\infty}^{\infty}\cdots\sum_{n_D=-\infty}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}k_{q-1}^{\frac{p}{2}}n^{-\frac{p}{2}}K_{\frac{p}{2}}\left(nL_{p+1}k_{q-1}^2\right). \quad (34)$$

В частности, топологическая часть (34) всегда положительна. Этот результат можно получить также из соответствующей формулы в $(D+1)$-мерном пространстве-времени Минковского с пространственной топологией $R^p\times\left(S^1\right)^q$, принимая во внимание, что эти проблемы конформно связаны [18]:

$$\Delta_{p+1}\left\langle\varphi^2\right\rangle_{p,q} = C^{1-D}(\eta)\Delta_{p+1}\left\langle\varphi^2\right\rangle^M_{p,q}, \quad (35)$$

где масштабный фактор $C(\eta)$ определяется выражением (4). Соотношение (35) верно для любого конформно-плоского фона (3). Аналогичное соотношение имеет место и для полной топологической части $\left\langle\varphi^2\right\rangle_c$.

Рассмотрим теперь поведение топологической части $\Delta_{p+1}\left\langle\varphi^2\right\rangle_{p,q}$ в вакуумном среднем квадрата поля в асимптотических областях значений отношения $L_{p+1}/|\eta|$. Введя новую переменную интегрирования $y=L_{p+1}u$, и используя асимптотические формулы для модифицированных функций Бесселя при больших значениях аргумента, для малых значений этого отношения, $L_{p+1}/|\eta|\ll 1$, получим

$$\Delta_{p+1}\left\langle\varphi^2\right\rangle_{p,q} \approx \frac{\left(\sigma t^c\right)^{1-D}}{2^{\frac{p}{2}}\pi^{\frac{p}{2}+1}L_{p+1}^{\frac{p}{2}}V_q}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{n_{p+2}=-\infty}^{\infty}\cdots\sum_{n_D=-\infty}^{\infty}k_{q-1}^{\frac{p}{2}}n^{-\frac{p}{2}}K_{\frac{p}{2}}\left(nL_{p+1}k_{q-1}^2\right). \quad (36)$$

Этот результат совпадает с соответствующей формулой (34) для конформно связанного поля. Формула (36) описывает поведение вакуумного среднего квадрата поля в поздних стадиях расширения Вселенной ($t \to \infty$) при $c < 1$ и в ранних стадиях ($t \to 0$) при $c > 1$.

Для малых значений отношения $|\eta|/L_{p+1} \ll 1$, отдельно рассмотрим случаи реальных и мнимых υ. Используя формулы модифицированных функций Бесселя для реальных значений порядка υ и малых значений аргументов, из (32) получаем

$$\Delta_{p+1}\left\langle\varphi^2\right\rangle_{p,q} \approx \frac{\sigma_1^{\frac{1-D}{2}}\Gamma(\upsilon)|\eta|^{\frac{cD-1}{c-1}-2\upsilon}}{2^{\frac{p+1}{2}-\upsilon}\pi^{\frac{p+3}{2}}L_{p+1}^{\frac{p-1}{2}-\upsilon}V_q}\times$$
$$\times\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{n_{p+2}=-\infty}^{\infty}\cdots\sum_{n_D=-\infty}^{\infty}k_{q-1}^{\frac{p+1}{2}-\upsilon}n^{\upsilon-\frac{p+1}{2}}K_{\frac{p+1}{2}-\upsilon}\left(nL_{p+1}k_{q-1}\right). \tag{37}$$

Заметим, что для минимально связанного поля и при $c > 1$ имеем $2\upsilon = (Dc-1)/(c-1)$ и выражение (37) не зависит от времени. Для мнимых значений υ аналогичным образом имеем

$$\Delta_{p+1}\left\langle\varphi^2\right\rangle_{p,q} \approx \frac{\sigma_1^{\frac{1-D}{2}}\eta^{\frac{cD-1}{c-1}}}{2^{\frac{p-1}{2}}\pi^{\frac{p+3}{2}}L_{p+1}^{p}V_q}\frac{\pi}{\sin(|\upsilon|\pi)}\mathrm{Im}\left[B\left(\frac{L_{p+1}}{\eta}\right)^{2i|\upsilon|}\right], \tag{38}$$

где введено следующее обозначение

$$B = \frac{2^{i|\upsilon|}}{\Gamma(1-i|\upsilon|)}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{n_{p+2}=-\infty}^{\infty}\cdots\sum_{n_D=-\infty}^{\infty}n^{2i|\upsilon|-p-1}f_{\frac{p+1}{2}-i|\upsilon|}\left(nL_{p+1}k_{q-1}\right). \tag{39}$$

Разделяя модуль и фазу в последнем выражении согласно $B = |B|e^{i\phi_0}$, окончательно получим асимптотическую формулу

$$\Delta_{p+1}\left\langle\varphi^2\right\rangle_{p,q} \approx \frac{\sigma_1^{\frac{1-D}{2}}\eta^{\frac{cD-1}{c-1}}}{2^{\frac{p-1}{2}}\pi^{\frac{p+3}{2}}L_{p+1}^{p}V_q}\frac{\pi|B|}{\sin(|\upsilon|\pi)}\sin\left[2|\upsilon|\ln\left(\frac{L_{p+1}}{\eta}\right)+\phi_0\right]. \tag{40}$$

Отсюда следует, что при мнимых значениях υ топологической части имеет осциляционный характер. Рассмотренный предел соответствует ранним стадиям расширения при $c < 1$ и поздним стадиям - при $c > 1$.

6. *Заключение*. В данной работе исследованы квантовые вакуумные эффекты скалярного поля в космологических моделях Фридмана-Робертсона-Уокера с топологией пространства $R^p \times (S^1)^q$ и с масштабным фактором со степенной зависимостью от времени. Одним из наиболее важных характеристик вакуумного состояния является вакуумное среднее квадрата поля. Эта величина играет ключевую роль в инфляционных

моделях, где она является источником для генерации крупномасштабной структуры Вселенной. Для исследования топологической части в вакуумном среднем квадрата поля, в разделе 4 построена соответствующая функция Вайтмана. С помощью формулы суммирования Абеля-Плана выведена рекуррентная формула для этой функции в геометрии, с произвольным числом компактных измерений. Вакуумное среднее квадрата поля получается из функции Вайтмана в пределе совпадения аргументов и исследовано в разделе 5. Поскольку тороидальная компактификация не изменяет локальную геометрию пространства-времени, перенормировка вакуумного среднего квадрата сводится к соответствующей перенормировке в пространстве Фридмана-Робертсона-Уокера с тривиальной топологией R^D Исследовано поведение вакуумного среднего в ранние и поздние стадии космологического расширения. Другой важной характеристикой вакуумного состояния является плотность энергии. Соответствующие результаты для рассмотренной здесь задачи будут представлены в следующей работе.

Ереванский государственный университет,
Армения, e-mail: aram.mkhitaryan@googlemail.com

VACUUM FLUCTUATIONS IN COSMOLOGICAL MODELS WITH COMPACTIFIED DIMENSIONS

A.L.MKHITARYAN

Quantum effects for a scalar field are investigated in Friedman-Robertson-Walker cosmological models with power-low scale factor and with spatial topology $R^p\times\left(S^1\right)^q$. Recurrent formulae are derived for positive frequency Wightman function and for the vacuum expectation value of the field squared. Asymptotic behavior of the vacuum expectation value is investigated at early and late stages of the cosmological evolution.

Key words: *Cosmology:vacuum fluctuations:Kaluza-Klein theories*

ЛИТЕРАТУРА

1. *A.Linde*, JCAP, 10, 004, 2004.
2. *Y.B.Zeldovich*, *A.A.Starobinsky*, Sov. Astron. Lett., 10, 135, 1984.
3. *Yu.P.Goncharov*, *A.A.Bytsenko*, Phys. Lett., B160, 385, 1985.
4. *Yu.P.Goncharov*, *A.A.Bytsenko*, Phys. Lett., B169, 171, 1986.
5. *Yu.P.Goncharov*, *A.A.Bytsenko*, Class. Quantum. Grav., 4, 555, 1987.
6. *L.H.Ford*, Phys. Rev. D, 22, 3003, 1980.
7. *L.H.Ford*, *T.Yoshimura*, Phys. Lett., A70, 89, 1979.
8. *D.J.Toms*, Phys. Rev., D21, 928, 1980.
9. *D.J.Toms*, Phys. Rev., D21, 2805, 1980.
10. *S.D.Odintsov*, Sov. J. Nucl. Phys., 48, 729, 1988.
11. *I.L.Buchbinder*, *S.D.Odintsov*, Fortschr. Phys., 37, 225, 1989.
12. *V.M.Mostepanenko*, *N.N.Trunov*, The Casimir effect and its applications, Clarendon, Oxford, 1997.
13. *K.A.Milton*, The Casimir effect: Physical manifestation of zero-point energy, World Scientific, Singapore, 2002.
14. *B.Greene*, *J.Levin*, JHEP, 096, 2007.
15. *P.Burikham*, *A.Chatrabhuti*, *P.Patcharamaneepakorn*, *K.Pimsamaran*, JHEP 087, O8, 2008.
16. *J.Levin*, Phys. Rep., 365, 121, 2002.
17. *T.S.Bunch*, *P.C.W.Davies*, Proc. R. Soc., A360, 117, 1978.
18. *N.D.Birrel*, *P.C.W.Devies*, Quantum fields in curved space, Cambridge, 1982.