АСТРОФИЗИКА

ТОМ 42 МАЙ, 1999 ВЫПУСК 2

УДК: 524.354.6

СТРАТИФИЦИРОВАННАЯ МОДЕЛЬ НЕЙТРОННОЙ ЗВЕЗДЫ

С.И.БАСТРУКОВ[1], В.В.ПАПОЯН[1,2], Д.В.ПОДГАЙНЫЙ[1]

Поступила 22 июля 1998

Принята к печати 1 сентября 1998

Эволюционные расчеты, основанные на реалистических уравнениях состояния, свидетельствуют о стратифицированном характере распределения адронного вещества в недрах нейтронных звезд. В предложенной модели стратифицированная структура нейтронной звезды трактуется как жесткий инертный кор, окруженный динамическим слоем. Физическую основу модели составляет представление о звездном веществе периферийной оболочки как упругом ферми-континууме, движения которого описываются уравнениями ядерной эластодинамики, предложенных в макроскопической теории коллективных процессов лабораторной ядерной физики. Показано, что вибрационная динамика нейтронной звезды характеризуется двумя ветвями собственных гравитационно-упругих сфероидальных (s-мода) и торсионных (t-мода) нерадиальных колебаний. Полученные оценки периодов глобальных гравитационных нерадиальных мод дают основания предположить, что этим колебаниям могут быть приписаны вариации интенсивности микроимпульсов, наблюдаемых в миллисекундном диапазоне спектра С-пульсаров. Представленная двухкомпонентная модель нейтронной звезды позволяет взглянуть на сбой в радиоизлучении пульсара как на звездотрясение, вызванное прохождением компаньоном периастра двойной системы.

1. *Введение.* По современным представлениям конечной стадией эволюции звезд главной последовательности является образование компактных объектов: белых карликов, нейтронных звезд и черных дыр, процесс рождения которых сопровождается взрывом сверхновой с последующим быстрым коллапсом ее кора [1]. Концепция звездного коллапса впервые была введена Г.Гамовым и М.Шонбергом [2]. Согласно теории звездной эволюции, нейтронными могут стать массивные звезды главной последовательности массой $M \sim 4 - 8\, M_{\odot}$, но не выше десяти солнечных масс. Конечной стадией эволюции звезд с массами, превышающими $10\, M_{\odot}$, являются черные дыры [3]. Обнаружение пульсара Краб, в окрестности которого отчетливо просматриваются признаки распыленного взрывом вещества, подтвердило гипотезу Бааде и Цвикки [4] о генетической связи нейтронных звезд со вспышками сверхновых [5]. Качественную картину рождения этого пульсара объясняет магниторотационный сценарий имплозивного рождения (имплозия - взрыв вовнутрь) во вспышке сверхновой 1054 года [6,7]. В основе этого сценария лежит предположение о том, что в критический момент исчерпания запасов ядерного топ-

лива в звезде-предшественнице возникает гравитационная неустойчивость, которая приводит к стремительному падению вещества на центр. Процесс уплотнения звездного вещества происходит до тех пор, пока силы гравитационного сжатия не будут приведены в равновесие давлением вырожденного нейтронного ферми-континуума. Образующийся в центре сильно намагниченный и быстро вращающийся компактный объект в конечном итоге формируется как нейтронная звезда, а остальная (значительно бóльшая, порядка 2 - 6 $M_{\odot}$) часть массы первоначальной звезды отбрасывается магнитным давлением в окружающее пространство в виде быстро остывающей радиоизлучающей туманности. В процессе формирования нейтронной звезды звездное вещество разогревается до температуры 10^{11} K (10 МэВ) и затем быстро остывает до температуры $T \sim 10^7 - 10^8$ K (10-100 кеВ) [8].

Сформировавшаяся нейтронная звезда (пульсар) представляет собой сферический компактный объект радиуса $R \sim 10 - 15$ км (для сравнения, $R_{\odot} = 695980$ км) и массой $0.3 - 2.5\, M_{\odot}$ ($M_{\odot} = 1.989 \cdot 10^{33}$ г). В недрах нейтронной звезды вещество сконденсировано силами собственного тяготения до плотностей, близких к нормальной ядерной плотности $\rho \sim 2.8 \cdot 10^{14}$ г/см^3. Момент инерции нейтронной звезды составляет $J = (2/5) MR^2 \sim 10^{44} - 10^{45}$ г см^2. Пространственное распределение пульсаров обнаруживает четко выраженное сгущение к плоскости галактического диска толщиной около 500 пк, а средний возраст активности в радиодиапазоне оценивается величиной $\tau \sim 10^6 - 10^8$ лет. По современным оценкам нейтронная звезда рождается каждые 15-20 лет [3,9]. Характерные периоды радиоизлучения пульсаров лежат в интервале от 1.6 миллисекунд (PSR 1937+21 - самый быстрый на данный момент пульсар) до 4.3 секунд (PSR 1845-19 - самый медленный).

В теоретических исследованиях последних лет, затрагивающих ядерные аспекты физики нейтронных звезд, центральное место занимали работы, посвященные изучению равновесных свойств этих массивных компактных объектов. Эти исследования в значительной мере углубили ранние представления об уравнении состояния ядерной материи и основательно продвинули понимание термодинамических фазовых переходов в звездном ядерном веществе. Эволюционные расчеты, основанные на реалистических уравнениях состояния, явно свидетельствуют о стратифицированном характере распределения адронного вещества в недрах нейтронных звезд [9-11]. Плотность внутренней области приблизительно на три порядка выше, чем периферийной. Поэтому возмущения, индуцированные, например, остаточными флуктуациями вещества после взрыва сверхновой, вероятнее всего будут сохраняться только в периферийном слое звезды. В этой связи можно поставить вопрос о том, насколько частоты колебаний поверхностного слоя отличаются от частот нерадиальных колебаний всего объема нейтронной звезды. Такая модель может оказаться полезной при дальнейшем изучении приливных колебаний в нейтронной звезде, которая является объектом двойной системы, а приливы вызываются орбитальным движением массивного компаньона. Ниже мы приводим вычисления собственных мод сфероидальных и торсионных колебаний поверхностного слоя в рамках эластодинамического подхода.

2. *Равновесные параметры нейтронной звезды.* В предлагаемой ниже модели стратифицированная структура нейтронной звезды трактуется как жесткий инертный кор плотности ρ_c, окруженный динамическим слоем плотности $\rho \leq \rho_c$. В дальнейшем радиусы кора и всей звезды обозначены R_c и R, соответственно; $\Delta R = R - R_c$ - глубина внешней оболочки. В основе описания динамического поведения периферийной оболочки нейтронной звезды лежит предположение об упруго-подобных свойствах звездного вещества, движения которого описываются уравнениями ядерной эластодинамики [10,11]:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{\partial V_i}{\partial x_i} = 0, \qquad (2.1)$$

$$\rho \frac{\partial V_i}{dt} + \frac{\partial P_{ik}}{\partial x_k} + \rho \frac{\partial U}{\partial x_i} = 0, \qquad (2.2)$$

$$\frac{dP_{ij}}{dt} + P_{ik} \frac{\partial V_j}{\partial x_k} + P_{jk} \frac{\partial V_i}{\partial x_k} + P_{ij} \frac{\partial V_k}{\partial x_k} = 0, \qquad (2.3)$$

где V_i - компоненты поля скорости упругих смещений и P_{ij} - тензор упругих напряжений (по повторяющимся индексам подразумевается суммирование). Первое из уравнений, (2.1), представляет собой хорошо известное уравнение непрерывности. Уравнение (2.2) описывает движение потока ядерного вещества, (2.3) контролирует динамику внутренних напряжений и при линейных возмущениях обеспечивает адекватное описание анизотропных искажений в распределении объемных внутренних напряжений в соответствии с законом Гука, что фактически и означает отождествление поведения сплошной ядерной материи с поведением твердотельно-упругого материального континуума. Характерным динамическим признаком упругой сплошной среды является ее способность поддерживать незатухающие как продольные, так и поперечные колебания, в отличие от газов или жидкостей, в которых могут распространяться только продольные (звуковые) волны.

В дальнейшем, в рамках нерелятивистской модели, будут рассматриваться движения ядерной среды на таких масштабах, где доминирующую роль играют объемные силы собственного ньютоновского тяготения. Распределение ньютоновского гравитационного потенциала в стратифицированной нейтронной звезде определяется уравнениями:

$$\Delta U_c^{in} = 4\pi G \rho_c, \quad \Delta U^{in} = 4\pi G \rho, \quad \Delta U^{ex} = 0, \tag{2.4}$$

где U_c^{in} и U^{in} - гравитационные потенциалы кора и периферийной оболочки соответственно, U^{ex} - потенциал, создаваемый массой нейтронной звезды за ее пределами и G - гравитационная постоянная. В результате приходим к замкнутой системе уравнений (2.1)-(2.4), описывающей динамику идеально-упругой сплошной среды в поле собственного тяготения. В качестве граничных условий к уравнениям (2.4) выбираются стандартные условия, отражающие непрерывность ньютоновского потенциала и его радиальной производной внутри звезды и на ее поверхности:

$$\begin{gathered} U_c^{in}(r) = U^{in}(r)\Big|_{r=R_c}, \quad \left.\frac{\partial U_c^{in}(r)}{\partial r} = \frac{\partial U^{in}(r)}{\partial r}\right|_{r=R_c}, \\ U^{in}(r) = U^{ex}(r)\Big|_{r=R}, \quad \left.\frac{\partial U^{in}(r)}{\partial r} = \frac{\partial U^{ex}(r)}{\partial r}\right|_{r=R} \end{gathered} \tag{2.5}$$

Равновесное распределение поля собственной гравитации, являющееся решением уравнений (2.4) и удовлетворяющее граничным условиям (2.5), имеет вид:

$$U = \begin{cases} U_c^{in} = \dfrac{2\pi}{3} G \rho_c \left(r^2 - 3R_c^2\right) - 2\pi G \rho \left(R^2 - R_c^2\right), & r \le R_c, \\ U^{in} = \dfrac{2\pi}{3} G \rho \left(r^2 - 3R^2 + \dfrac{2R_c^3}{r}\right) - \dfrac{4\pi}{3} G \rho_c \dfrac{R_c^3}{r}, & R_c < r \le R, \\ U^{ex} = -\dfrac{4\pi}{3} G \rho \dfrac{\left(R^3 - R_c^3\right)}{r} - \dfrac{4\pi}{3} G \rho_c \dfrac{R_c^3}{r}, & r > R. \end{cases} \tag{2.6}$$

Следствием сферической симметрии гравитационного взаимодействия является изотропное равновесное распределение напряжений в объеме звезды:

$$P_{ij}^0(r) = P_0(r)\delta_{ij}. \tag{2.7}$$

Радиальная зависимость давления определяется из уравнений равновесия со следующими граничными условиями:

$$\begin{gathered} \frac{dP_1}{dr} = -\rho_c \frac{dU_c^{in}}{dr}, \quad P_1(0) = P_N(\rho_c), \\ \frac{dP_2}{dr} = -\rho \frac{dU^{in}}{dr}, \quad P_1(R_c) = P_2(R_c), \end{gathered} \tag{2.8}$$

где P_1 и P_2 - давления в коре и динамическом слое нейтронной звезды соответственно. Решение этих уравнений имеет вид:

$$P_1(r) = P_N(\rho_c) - \frac{2\pi}{3} G \rho_c r^2, \tag{2.9}$$

$$P_2(r) = P_N(\rho_c) + \frac{2\pi}{3} G\left[\rho^2\left(R_c^2 - r^2\right) - \rho_c^2 R_c^2\right] + \frac{4\pi}{3} G R_c^3 \rho(\rho - \rho_c)\left(\frac{1}{R_c} - \frac{1}{r}\right), \tag{2.10}$$

где $P_N(\rho_c)$ есть основная характеристика, несущая информацию об уравнении состояния ядерной материи и, таким образом, связывающая ядерную физику с физикой нейтронных звезд. В стандартной модели под $P_N(\rho_c)$ понимается давление вырожденного нейтронного вещества [3]:

$$P_N(\rho_c) = (2/3)\varepsilon_N(\rho_c) = K\rho_c^{5/3}, \quad \rho_c = m^* \frac{2}{3\pi^2}k_F^3, \quad K = \frac{\hbar\left(3\pi^2\right)^{2/3}}{5m^{*8/3}}. \tag{2.11}$$

Из формул (2.6) и (2.10) видно, что при $R_c \to 0$ (одновременно $\rho_c \to \rho$) мы получаем выражения для ньютоновского потенциала и равновесного давления однородной модели.

В литературе неоднократно отмечалось [9], что поскольку радиус нейтронной звезды R соизмерим с ее гравитационным радиусом $R_G = 2GM/c^2 \sim 3$ км, то надежные результаты могут быть получены лишь с учетом эффектов общей теории относительности. В рамках стандартной модели нейтронной звезды, которая базируется на ньютоновской гравитации и использует в качестве уравнения состояния ядерного вещества уравнение чисто нейтронной материи, были даны оценки значений интегральных равновесных параметров (массы, радиуса, момента инерции), которые хорошо согласуются с предсказаниями реалистических моделей нейтронных звезд [13,14]. Это позволяет надеяться на то, что использование нерелятивистской теории гравитации не приведет к серьезным ошибкам и при вычислении периодов нерадиальных гравитационно-упругих мод.

3. ***Нерадиальные гравитационно-упругие колебания периферийного слоя нейтронной звезды.*** Нерадиальные длинноволновые колебания в несжимаемой упругой среде являются единственно возможным типом динамической активности. Фундаментальные частоты нерадиальных колебаний периферийной оболочки нейтронной звезды могут быть вычислены аналитически на основе энергетического вариационного принципа [15]. Предполагая, что поток массы в равновесном состоянии отсутствует и используя стандартную процедуру линеаризации

$$\rho \to \rho + \delta\rho(=0), \quad V_i \to V_i(=0) + \delta V_i, \quad P_{ij} \to \delta_{ij}P_2 + \delta P_{ij}, \quad U \to U + \delta U,$$

уравнения (2.1)-(2.4), описывающие динамическое поведение звездного вещества нейтронной звезды, можно преобразовать к виду:

$$\frac{\partial \delta V_i}{\partial x_i} = 0, \tag{3.12}$$

$$\rho\frac{\partial \delta V_i}{\partial t} + \frac{\partial \delta P_{ij}}{\partial x_j} + \rho\frac{\partial \delta U}{\partial x_i} = 0, \tag{3.13}$$

$$\frac{\partial \delta P_{ij}}{\partial t} + P_2\left(\frac{\partial \delta V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \delta V_j}{\partial x_i}\right) + \delta_{ij}\left(\delta V_k \frac{\partial P_2}{\partial x_k}\right) = 0, \tag{3.14}$$

$$\Delta\delta U = 0. \tag{3.15}$$

Далее, умножая скалярно уравнение (3.13) на δV_i и интегрируя по объему динамического слоя звезды (V_σ), получаем уравнение энергетического баланса:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{V_\sigma}\frac{1}{2}\rho\delta V^2 d\tau - \int_{V_\sigma}\delta P_{ij}\frac{\partial\delta V_i}{\partial x_j}d\tau + \oint_S\left[\rho\delta U\,\delta V_i + \delta P_{ij}\,\delta V_j\right]d\sigma_i = 0, \tag{3.16}$$

которое контролирует сохранение энергии в процессе колебаний. Флуктуации скорости возмущенного потока δV_i и распределение потенциала гравитации δU представим в виде:

$$\delta V_i(r,t) = \xi_i^L(r)\dot{\alpha}_L(t), \qquad \delta U(r,t) = \phi^L(r)\alpha_L(t), \tag{3.17}$$

где L - мультипольный порядок колебания. Нормальная координата $\alpha_L(t)$ определяет зависимость от времени флуктуирующих переменных. Через $\xi^L(r)$ обозначено поле мгновенных упругих смещений, $\phi^L(r)$ определяет флуктуации гравитационного потенциала. Подставляя (3.17) в (3.14), находим, что флуктуации напряжений определяются тензором

$$\delta P_{ij}(r,t) = -\left[P_2(r)\left(\frac{\partial\xi_i^L(r)}{\partial x_j} + \frac{\partial\xi_j^L(r)}{\partial x_i}\right) + \delta_{ij}\left(\xi_k^L(r)\frac{\partial P_2(r)}{\partial x_k}\right)\right]\alpha_L(t). \tag{3.18}$$

Линейная связь тензора упругих напряжений δP_{ij} (являющегося динамической характеристикой упругости вещества) с тензором упругих натяжений u_{ij} (кинематической характеристикой эластодинамических смещений):

$$u_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\xi_i^L}{\partial x_j} + \frac{\partial\xi_j^L}{\partial x_i}\right) \tag{3.19}$$

показывает, что распространение упругих искажений в периферийном динамическом слое подчиняется закону Гука [16]. Разделение пространственной и временной зависимости флуктуирующих переменных (3.17), при подстановке (3.17) и (3.18) в уравнение энергетического баланса (3.16), позволяет преобразовать последнее к виду:

$$\frac{dH}{dt} = 0, \qquad H = \frac{M_L\dot{\alpha}_L^2}{2} + \frac{K_L\alpha_L^2}{2}, \tag{3.20}$$

где параметры жесткости K_L и инерции M_L определены следующим образом:

$$K_L = \frac{1}{2}\int_V P_2\left(\frac{\partial\xi_i^L}{\partial x_j} + \frac{\partial\xi_j^L}{\partial x_i}\right)^2 d\tau, \quad M_L = \int_V \rho\xi_i^L\xi_i^L\,d\tau. \tag{3.21}$$

При выводе выражения для жесткости K_L был использован эластодинамический аналог гидродинамического приближения Каулинга [17], которое может быть выражено соотношением:

$$\left[\rho\delta U - \delta V_k\frac{\partial P_2}{\partial x_k}\right]_R = 0. \tag{3.22}$$

Ниже это соотношение используется в качестве граничного условия для нахождения произвольных констант интегрирования при вычислении поля упругих смещений.

Из выражений для инерции M_L и жесткости K_L следует, что поле мгновенных смещений $\xi(r)$ является единственной подлежащей определению величиной, необходимой для вычисления частот собственных гравитационно-упругих нерадиальных колебаний. В работе [12] было показано, что поля мгновенных смещений, возникающих при нерадиальных колебаниях сферической массы упругой материи, определяются как решения векторного уравнения Лапласа:

$$\Delta\xi(r) = 0, \quad \mathrm{div}\,\xi(r) = 0. \tag{3.23}$$

В соответствии с трактовкой Ламба [18] собственных мод идеально упругого шара, они могут быть классифицированы как сфероидальные моды, описываемые полоидальным решением уравнения (3.23) и как торсионные, описываемые, соответственно, тороидальным решением. Компоненты полоидального поля смещений в сферической системе координат имеют вид:

$$\begin{aligned} \xi_r^L &= L A_1 r^{L-1} P_L(\mu) - (L+1) A_2 r^{-L-2} P_L^L(\mu), \\ \xi_\theta^L &= -A_1 r^{L-1}\left(1-\mu^2\right)^{1/2} \frac{dP_L(\mu)}{d\mu} - A_2 r^{-L-2}\left(1-\mu^2\right)^{1/2} \frac{dP_L(\mu)}{d\mu}, \\ \xi_\phi^L &= 0. \end{aligned} \tag{3.24}$$

Компоненты торсионного поля смещений можно представить следующим образом:

$$\xi_r^L = 0, \;\; \xi_\theta^L = 0, \;\; \xi_\phi^L = -\left(1-\mu^2\right)^{1/2}\left(LC_1 r^{l-1} - (l+1) C_2 r^{-l-1}\right)\frac{dP_L(\mu)}{d\mu}, \tag{3.25}$$

Здесь через $P_L(\mu)$ обозначены полиномы Лежандра мультипольного порядка L, $\mu = \cos(\theta)$. Следует отметить, что в сформулированном выше вариационном методе, частоты $\omega^2 = K_L/M_L$ обеих ветвей сфероидальных (s-мода) и торсионных (t-мода) колебаний могут быть вычислены с единых позиций как собственные моды осцилляторного гамильтониана (3.20).

3.1. ***Периоды сфероидальных гравитационно-упругих нерадиальных колебаний: s-мода.*** При сфероидальных мультипольных колебаниях произвольная сферическая поверхность в объеме периферийного слоя звезды приобретает формы гармонических сфероидов, задаваемых в сферической системе координат уравнением вида:

$$r'(t) = r\left[1 + \alpha_L(t)\, P_L(\cos\theta)\right], \tag{3.26}$$

где r - радиус невозмущенной сферической поверхности. Для определения произвольных констант A_1 и A_2 в выражении для полоидального поля мгновенных смещений (3.24) к уравнению (3.23) добавляются следующее динамические граничные условия:

$$\left[\rho\phi^L - \xi_r^L \frac{\partial P_2}{\partial r}\right]_{r=R} = 0,$$
$$\xi_r^L\Big|_{r=R_c} = 0. \tag{3.27}$$

В последнем выражении единственной неизвестной величиной остается функция ϕ^L, определяющая поверхностные флуктуации гравитационного потенциала (3.17). Вариации δU, удовлетворяющие уравнению Лапласа, определяются следующими решениями последнего:

$$\delta U_c^{in} = B_1^L r^L P_L(\cos\theta)\alpha_L, \quad r \le R_c, \tag{3.28}$$

$$\delta U^{in} = B_2^L r^L P_L(\cos\theta)\alpha_L + B_3^L r^{-(L+1)} P_L(\cos\theta)\alpha_L, \quad R_c < r \le R, \tag{3.29}$$

$$\delta U^{ex} = B_4^L r^{-(L+1)} P_L(\cos\theta)\alpha_L, \quad r > R. \tag{3.30}$$

Произвольные константы B_i^L фиксируются стандартными граничными условиями:

$$U_c^{in}(r) + \delta U_c^{in}(r) = U^{in}(r) + \delta U^{in}(r)\Big|_{r=R_c},$$
$$U^{in}(r') + \delta U^{in}(r') = U^{ex}(r') + \delta U^{ex}(r')\Big|_{r'=R',(r=R)},$$
$$\frac{\partial U_c^{in}(r)}{\partial r} + \frac{\partial \delta U_c^{in}(r)}{\partial r} = \frac{\partial U^{in}(r)}{\partial r} + \frac{\partial \delta U^{in}(r)}{\partial r}\Bigg|_{r=R_c},$$
$$\frac{\partial U^{in}(r')}{\partial r'} + \frac{\partial \delta U^{in}(r')}{\partial r'} = \frac{\partial U^{ex}(r')}{\partial r'} + \frac{\partial \delta U^{ex}(r')}{\partial r'}\Bigg|_{r'=R',(r=R)} \tag{3.31}$$

Подставляя (3.28)-(3.30) в (3.31) и удерживая члены не выше первого порядка по α_L, получаем, что ϕ^L на поверхности звезды определяется следующим образом:

$$\phi^L = -\frac{4\pi}{2L+1}\rho G R^2\left[1 + \frac{\rho_c - \rho}{\rho}\left(\frac{R_c}{R}\right)^{L+3}\right] P_L(\mu). \tag{3.32}$$

Подставляя (3.32), (3.24) и (2.10) в (3.27), находим:

$$A_1 = \frac{3A_L}{L(2L+1)}, \quad A_2 = \frac{3R_c^{2L+1}A_L}{(L+1)(2L+1)},$$
$$A_L = \frac{R^3}{R^{2L+1} - R_c^{2L+1}} \frac{\rho R^{L+3} + (\rho_c - \rho) R_c^{L+3}}{\rho R^3 - (\rho_c - \rho) R_c^3}. \tag{3.33}$$

Подстановка (3.24) и (2.10) в уравнение (3.21) и интегрирование по полному телесному углу приводит к следующим выражениям для инерции и жесткости:

$$M_L^s = 4\pi LA_1^2\int_{R_c}^{R}\rho(r)r^{2L}dr + 4\pi(L+1)A_2^2\int_{R_c}^{R_i}\rho(r)r^{-2L-2}dr,$$

$$K_L^s = \frac{1}{2}\int P_2(r)\left(\frac{d\xi_i^L}{dx_j}+\frac{d\xi_j^L}{dx_i}\right)dV = 8\pi A_1^2 L(L-1)\times$$
$$\times(2L-1)\int_{R_c}^{R}P_2(r)r^{2L-2}dr + 8\pi A_2^2(L+1)(L+2)(2L+3)\int_{R_c}^{R}P_2(r)r^{-2L-4}dr. \quad (3.34)$$

Детали вычислений этих интегралов вынесены в Приложение А. Частоты гравитационно-упругой s-моды определяются как квадратный корень отношения коэффициента упругости к массовому параметру:

$$\omega_s = \sqrt{\frac{K_L^s}{M_L^s}}.$$

Из выражения (3.34) для коэффициента жесткости следует, что в спектре собственных частот сфероидальных колебаний присутствует дипольная ($L=1$) мода, которая отсутствует в однородной модели.

Окончательное выражение для массового параметра имеет следующий вид:

$$M_L^s = \frac{3A_1^2 M_{cr}}{1-x^3}R^{2L-2}\frac{L}{2L+1}\gamma_L(x), \quad (3.35)$$

где M_{cr} - масса периферийной оболочки:

$$M_{cr} = M\left(1-x^3\right),\quad M = \frac{4\pi}{3}\rho R^3, \quad (3.36)$$

за x обозначено отношение радиуса кора R_c к радиусу звезды R. Функция $\gamma_L(x)$, входящая в (3.35), определяется выражением:

$$\gamma_L(x) = 1 - \frac{x^{2L+1}}{L+1}\left(1+Lx^{2L+1}\right). \quad (3.37)$$

Подставляя выражения для $P_2(r)$ и компоненты полоидального поля смещений в (3.34), получим следующее выражение для коэффициента жесткости:

$$K_L^s = 9A_1^2R^{2L-4}\frac{L(L-1)}{1-x^3}\left[E_N^{cr}\alpha_L(x) - \frac{5}{9}\frac{E_G^{cr}}{\left(1-x^3\right)}\frac{(2L-1)}{(2L+1)}\beta_L(x)\right], \quad (3.38)$$

где E_G^{cr} и E_N^{cr} - гравитационная и внутренняя энергии периферийной оболочки:

$$E_G^{cr} = E_G\left(1-x^3\right)^2,\quad E_N^{cr} = E_N\left(1-x^3\right),$$
$$E_G = \frac{3}{5}\frac{GM^2}{R},\qquad E_N = \frac{2}{3}P_N V. \quad (3.39)$$

Функции $\alpha_L(x)$ и $\beta_L(x)$ имеют вид:

$$\alpha_L(x) = 1 + \frac{2L+1}{L^2-1}x^{2L-1} - \frac{L(L+2)}{L^2-1}x^{4L+2},$$

$$\beta_L(x) = 1 - 3x^2\left(1 - \frac{2L-1}{3(L-1)}x\right) - \frac{3x^{2L+1}}{(L^2-1)(2L-1)} -$$

$$-\frac{(L+2)(2L+3)}{(L^2-1)(2L+1)}x^{4L+2}\left[1 - \frac{3(2L+1)}{2L+3}x^2\left(1 - \frac{2L+3}{3(L+2)}x\right)\right] + 2\frac{\rho_c(2L+1)}{\rho(2L-1)}\times$$

$$\times x\left[1 - \frac{2L-1}{2(L-1)}x + \frac{2L+1}{2(L^2-1)}x^{2L-1} - \frac{L(L+2)}{L^2-1}x^{4L+2}\left(1 - \frac{2L+3}{2(L+2)}x\right)\right] + \tag{3.40}$$

$$+\frac{\rho_c^2(2L+1)}{\rho^2(2L-1)}x\left[1 + \frac{2L+1}{L^2-1}x^{2L-1} - \frac{L(L+2)}{L^2-1}x^{4L+2}\right].$$

Отметим, что при $x \to 0$ $\alpha_L(x)$, $\beta_L(x)$ и $\gamma_L(x)$ стремятся к единице, а выражения для коэффициента жесткости и массового параметра сводятся к выражениям, следующим из стандартной модели:

$$M_L = \frac{27MR^2}{L(2L+1)^3}, \quad K_L = 81E_N\frac{L-1}{L(2L+1)^2} - 45E_G\frac{(L-1)(2L-1)}{L(2L+1)^3}. \tag{3.41}$$

При этом гравитационная и внутренняя энергии периферийной оболочки переходят в полную гравитационную и внутреннюю энергию соответствующей однородной модели нейтронной звезды:

$$E_G^{cr} = E_G = \frac{3}{5}\frac{GM^2}{R}, \qquad E_N^{cr} = E_N = \frac{2}{3}P_N V. \tag{3.42}$$

Из выражения для коэффициента жесткости (3.38) видно, что конструктивный вклад в жесткость гравитационно-упругих колебаний вносит энергия упругих деформаций (слагаемое, пропорциональное E_N), а деструктивный вклад определяется энергией гравитационного сжатия, которая пропорциональна E_G. Такое сочетание может привести к нестабильности, провоцирующей звездотрясения. Таким образом, нерадиальные колебания остаются стабильными до тех пор, пока доминирующий вклад в энергию деформаций звезды вносит энергия упругих искажений ферми-сферы нейтронного вещества. Окончательное выражение для частоты s-моды может быть записано в виде:

$$\omega_s^2 = 3\omega_0^2(L-1)(2L+1)\frac{\alpha_L(x)}{\gamma_L(x)}\left[1 - \frac{5}{9}\eta\frac{2L-1}{2L+1}\frac{\beta_L(x)}{\alpha_L(x)}\right], \tag{3.43}$$

где

$$\omega_0^2 = \frac{E_N}{MR^2}, \qquad \eta = \frac{E_G}{E_N}. \tag{3.44}$$

Формулу (3.43) можно также представить в виде:

$$\omega_s^2=\frac{3\omega_0^2}{\gamma_L(x)}\left((L-1)(2L+1)+\frac{(2L+1)^2}{L+1}x^{2L-1}-\frac{L(L+2)(2L+1)}{L+1}x^{4L+2}\right)\times$$
$$\times\left[1-\frac{5}{9}\eta\frac{2L-1}{2L+1}\frac{\beta_L(x)}{\alpha_L(x)}\right],$$

из которого явно следует, что, в отличие от однородного случая, дипольная мода является собственной модой спектра сфероидальных колебаний.

При $x\to 0$ выражение для частоты (3.43) совпадает с частотой собственных нерадиальных сфероидальных колебаний, полученной в рамках однородной модели

$$\omega_s^2=3\omega_0^2(L-1)(2L+1)\left[1-\frac{5}{9}\eta\frac{2L-1}{2L+1}\right]. \tag{3.45}$$

Численные значения собственных периодов сфероидальных колебаний, соответствующих (3.43) и (3.45), приведены в табл.1. Из этой таблицы следует, что значения собственных периодов сфероидальных колебаний для модели однородной нейтронной звезды лежат выше, чем в случае стратифицированной модели.

4. *Периоды тороидальных гравитационно-упругих нерадиальных колебаний: t-мода.* Благодаря свойству динамической упругости ферми-континуума в объеме периферийной оболочки нейтронной звезды возможно возникновение поперечно-сдвиговых, торсионных колебаний. Искажения сферической поверхности внутри динамического слоя, происходящие под действием крутильных деформаций, описываются уравнением:

$$r_t(\alpha_L)=r\left(1+\alpha_L P_L^1(\mu)\right),\quad P_L^1=\left(1-\mu^2\right)^{1/2}\frac{dP_L}{d\mu}. \tag{4.46}$$

Следующее представление тороидального поля скорости упругих смещений поясняет геометрическую картину торсионных колебаний:

$$\delta V=\left[\Omega(r,t)\times r\right], \tag{4.47}$$

где

$$\Omega(r,t)=\nabla\left[C_1 r^L P_L(\mu)+C_2 r^{(-L)}P_L(\mu)\right]\alpha_L(t) \tag{4.48}$$

есть поле угловой частоты дифференциально-вращательных колебаний. Нормальная координата $\alpha_L(t)$ в данном случае имеет смысл инфинитоземального угла кручения поля упругих смещений вокруг полярной оси. Произвольные константы C_1 и C_2 определяются из следующих граничных условий:

Таблица 1

ПЕРИОДЫ P_L [В МИКРОСЕКУНДАХ] НЕРАДИАЛЬНЫХ ГРАВИТАЦИОННО-УПРУГИХ СФЕРОИДАЛЬНЫХ (S-МОДА) ПУЛЬСАЦИЙ, ВЫЧИСЛЕННЫЕ В РАМКАХ ОДНОРОДНОЙ И СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ МОДЕЛЯХ НЕЙТРОННОЙ ЗВЕЗДЫ. $M_\odot = 1.98E+33$ г - МАССА СОЛНЦА, R - РАДИУС НЕЙТРОННОЙ ЗВЕЗДЫ, $\rho_n = 2.8E+14$ г/см³ - СРЕДНЯЯ ЯДЕРНАЯ ПЛОТНОСТЬ, $\rho_{од}$ - ПЛОТНОСТЬ ОДНОРОДНОЙ НЕЙТРОННОЙ ЗВЕЗДЫ, ρ_c и ρ - ПЛОТНОСТЬ КОРА И ПЕРИФЕРИЙНОЙ ОБОЛОЧКИ НЕЙТРОННОЙ ЗВЕЗДЫ СООТВЕТСТВЕННО

Параметры звезды		Однородная модель				Стратифицированная модель					
$M/M_\odot$	R [км]	$\rho_{од.}/\rho_n$	P_2	P_3	P_4	ΔR [км]	ρ_c/ρ_n	ρ [10^{13} г/см³]	P_1	P_2	P_3
1.67		2.36	14.6	8.80	6.38	0.60			1.19	1.56	2.2
1.57	10.6	2.23	14.8	8.96	6.49	0.80	2.8	2.24	1.31	1.58	1.8
1.48		2.10	15.1	9.13	6.61	1.00			1.40	1.60	1.7
0.99		1.67	15.2	9.19	6.65	0.60			1.19	1.51	1.9
0.94	10.0	1.58	15.5	9.35	6.76	0.78	2.0	1.40	1.30	1.53	1.7
0.88		1.48	15.8	9.54	6.90	0.98			1.39	1.55	1.6
0.52		1.21	15.1	9.06	6.55	0.62			0.63	0.76	0.8
0.50	9.0	1.15	15.3	9.21	6.65	0.76	1.5	0.28	0.68	0.77	0.8
0.46		1.07	15.7	9.43	6.81	0.96			0.73	0.78	0.8

$$\xi_\phi^L = \dot{R}, \quad r = R,$$
$$\xi_\phi^L = 0, \quad r = R_c. \qquad (4.49)$$

Подставив (4.47) и (4.48) в (4.49) найдем, что:

$$C_1 = -\frac{R^{L+2}}{R_c^{2L+1)} - R^{2L+1)}}, \quad C_2 = -\frac{R^{L+2}}{\left(R_c^{2L+1)} - R^{2L+1)}\right) R_c^{2L+1}}, \qquad (4.50)$$

В сферической системе координат компоненты тороидального поля упругих смещений определены следующим образом:

$$\xi_r^L = 0, \;\; \xi_\theta^L = 0, \;\; \xi_\phi^L = -\left(1-\mu^2\right)^{1/2}\left(LC_1 r^{l-1} - (l+1)C_2 r^{-l-1}\right)\frac{dP_L(\mu)}{d\mu}. \qquad (4.51)$$

Подставляя (4.51) в (3.21) и интегрируя по телесному углу, получим выражения для коэффициента жесткости и массового параметра торсионных колебаний:

$$K_L^t = 4\pi C_1^2\, L\left(L^2-1\right)\int_{R_c}^{R} P(r)\, r^{2L} dr + 4\pi C_2^2\, L(L+1)(L+2)\int_{R_c}^{R} P(r)\, r^{-2L-2} dr,$$

$$M_L^t = \frac{4\pi\, L(L+1)}{2L+1} C_1^2 \int_{R_c}^{R} \rho(r)\, r^{2L+2} dr + C_1 C_2 \int_{R_c}^{R} \rho(r)\, r dr + C_2 \int_{R_c}^{R} \rho(r)\, r^{-2L} dr. \quad (4.52)$$

Частота торсионных колебаний определяется также, как и в случае сфероидальных:

$$\omega_t = \sqrt{\frac{K_L^t}{M_L^t}}.$$

Из выражения для коэффициента жесткости (4.52) видно, что дипольная мода, так же, как и в случае сфероидальных колебаний, является нижайшей собственной модой спектра торсионных колебаний. Подставляя в (4.52) распределение равновесного давления $P_2(r)$ из (2.10), распределение тороидального поля смещений (4.51) и интегрируя по r, получим окончательные выражения для коэффициента жесткости и массового параметра:

$$K_L^t = \frac{9}{2}\frac{L\left(L^2-1\right)}{2L+1}\frac{\left(A_L^1\right)^2 R^{2L-2}}{1-x^3} E_N^{cr}\, \alpha_L(x)\left[1-\frac{5}{9}\eta\frac{(2L+1)\beta_L(x)}{(2L+3)\alpha_L(x)}\right],$$

$$M_L^t = \frac{3\left(A_L^1\right)^2 M_{cr}}{1-x^3} R^{2L}\frac{L(L+1)}{(2L+1)(2L+3)}\gamma_L(x), \quad (4.53)$$

где E_N^{cr}, η и M_{cr} определены выше ((3.39), (3.44) и (3.36)), а функции $\alpha_L(x)$, $\beta_L(x)$, $\gamma_L(x)$ имеют вид:

$$\alpha_L(x) = 1 + \frac{3x^{2L+1}}{L-1} - \frac{L+2}{L-1}x^{4L+2},$$

$$\beta_L(x) = 1 - \frac{3(2L+3)}{2L+1}x^2\left[1+\frac{(L+2)(2L+1)}{3(L-1)(2L-1)}x^{2L+2}\left\{1-\frac{3(5L-1)}{L(L+2)(2L+1)(2L+3)}\times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times\, x\left(1+\frac{L(L+2)(2L+3)(2L-1)}{5L-1}x^{2L+1}\left(1-\frac{2L+1}{3(L+1)}x^2\right)\right)\right\}\right] -$$

$$-\,2\frac{2L+3}{2L+1}\frac{\rho_c}{\rho}\left\{1-\frac{2L+1}{L}x\left(1-\frac{2L^2+2L-1}{2\left(L^2-1\right)(2L+1)}x^{2L}\left(1-\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.-\frac{2L(L+1)(L+2)}{2L^2+2L-1}x^{2l+1}\left(1-\frac{2L+1}{2(L+1)}x\right)\right)\right)+x\frac{\rho_c}{2\rho}\alpha_L(x)\right\},$$

$$\gamma_L(x) = 1-(2L+3)x^{2L+1}\left(1-\frac{(2L+1)^2}{(2L-1)(2L+3)}x^2\left(1-\frac{2L+3}{(2L+1)^2}x^{2L}\right)\right).$$

Собственная частота нерадиальных торсионных колебаний определяется следующим образом:

$$\omega_t^2 = \frac{3}{2}\omega_0^2(L-1)(2L+3)\frac{\alpha_L(x)}{\gamma_L(x)}\left[1-\frac{5}{9}\eta_{cr}\frac{2L+1}{2L+3}\frac{\beta_L(x)}{\alpha_L(x)}\right], \qquad (4.54)$$

где ω_0 определена выше (3.44). Для того, чтобы подчеркнуть, что дипольная мода является собственной модой торсионных колебаний, выражение для частоты можно представить в виде:

$$\omega_t^2 = \frac{3\omega_0^2(2L+3)}{2\gamma_L(x)}\left(1+3x^{2L+1}-(L+2)x^{4L+2}\right)\left[1-\frac{5}{9}\eta\frac{2L+1}{2L+3}\frac{\beta_L(x)}{\alpha_L(x)}\right]. \qquad (4.55)$$

Выражение (4.54) при $x \to 0$ переходит в выражение для частоты торсионных колебаний, полученной в рамках стандартной модели:

$$\omega_t^2 = \frac{3}{2}\omega_0^2(L-1)(2L+3)\left[1-\frac{5}{9}\eta\frac{2L+1}{2L+3}\right]. \qquad (4.56)$$

Сравнение численных значений периодов торсионных колебаний стратифицированной модели и периодов, соответствующих частотам (4.54) и (4.56), представлено в табл.2. Как видно из этой таблицы, значения собственных периодов в случае однородной модели лежат выше.

5. *Выводы*. В таблицах 1 и 2 представлены численные значения периодов собственных нерадиальных колебаний периферийной оболочки нейтронной звезды. Сравнение численных значений торсионных и сфероидальных периодов колебаний показывает, что торсионные колебания замедлены по сравнению со сфероидальными. Из таблиц 1 и 2 также следует, что собственные частоты, определяемые в рамках стандартной модели, определяют нижнюю границу частот как в случае сфероидальных, так и в случае торсионных колебаний. Отметим, что полученные выше периоды собственных нерадиальных колебаний лежат в пределах $P \sim 0.1$ мкс - 6 мкс, что соответствует тонким деталям спектра, так называемых, сложных или С-пульсаров.

Представленная выше двухкомпонентная модель нейтронной звезды (жесткая периферийная оболочка, совершающая упругие колебания относительно более плотного остова) позволяет взглянуть на сбой в радиоизлучении пульсара как на звездотрясение, вызванное прохождением компаньоном периастра двойной системы. Не исключено, что повторяющиеся сбои пульсирующего радиоизлучения нейтронных звезд как раз свидетельствуют о том, что эти пульсары являются компонентами двойных систем. В заключение отметим важную особенность, касающуюся возможностей сформулированного вариационного метода. В формулах, определяющих коэффициенты жесткости и массовые параметры сфероидальных и торсионных гравитационно-упругих нерадиальных колебаний (3.34) и (4.52), профили плотности $\rho(r)$ и давления $P_2(r)$ присутствуют

Таблица 2

ПЕРИОДЫ P_l [В МИКРОСЕКУНДАХ] НЕРАДИАЛЬНЫХ ГРАВИТАЦИОННО-УПРУГИХ ТОРСИОННЫХ (t-МОДА) КОЛЕБАНИЙ, ПОЛУЧЕННЫХ НА ОСНОВЕ ОДНОРОДНОЙ И ДВУХКОМПОНЕНТНОЙ МОДЕЛЕЙ НЕЙТРОННОЙ ЗВЕЗДЫ. ОБОЗНАЧЕНИЯ ТАКИЕ ЖЕ, КАК И В ПЕРВОЙ ТАБЛИЦЕ

Параметры звезды		Однородная модель				Стратифицированная модель					
$M/M_\odot$	R [км]	$\rho_{02}/\rho_н$	P_2	P_3	P_4	ΔR [км]	$\rho_c/\rho_н$	ρ [10^{13} г/см^3]	P_1	P_2	P_3
1.67		2.36	17.6	11.0	8.19	0.60			5.56	3.00	2.0
1.57	10.6	2.23	17.9	11.2	8.34	0.80	2.8	2.24	5.01	2.74	1.8
1.48		2.10	18.3	11.5	8.49	1.00			4.66	2.59	1.7
0.99		1.67	18.4	11.5	8.55	0.62			5.04	2.74	1.8
0.94	10.0	1.58	18.7	11.7	8.68	0.78	2.0	1.40	4.65	2.56	1.7
0.88		1.48	19.1	12.0	8.85	0.98			4.33	2.41	1.6
0.52		1.21	18.1	11.3	8.39	0.62			2.37	1.30	0.8
0.50	9.0	1.15	18.4	11.5	8.53	0.76	1.5	0.28	2.21	1.23	0.8
0.46		1.07	18.9	11.8	8.73	0.96			2.07	1.16	0.8

как входные параметры равновесной конфигурации. Имея это в виду, ограничение, связанное с использованием ньютоновского приближения, а также предположение об однородности распределения массы могут быть ослаблены. Для получения надежных оценок частот s- и t-мод эти локальные характеристики равновесия могут быть заимствованы из реалистических моделей нейтронных звезд.

[1] Объединенный институт ядерных исследований, Дубна, Россия
[2] Ереванский государственный университет, Армения

THE STRATIFIED MODEL OF NEUTRON STAR

S.I.BASTRUKOV[1], V.V.PAPOYAN[1,2], D.V.PODGAINY[1]

From evolution calculations it follows that distribution of density of hadron matter in neutron star interior is stratified. In proposal model the stratified structure of neutron star is treat like the stiff core surrounded by dynamical layer. The underlying physical assumption is that stellar matter

of outer layers has elastic properties and its dynamical behavior is described by nuclear elastodynamics equations borrowed from the laboratory nuclear physics. It was shown that vibration dynamics of neutron star is characterized by two branches of nonradial spheroidal (s-mode) and torsional (t-mode) gravitational-elastic eigenvibrations. From numerical value of periods of nonradial vibrations it follow that observable variations in the intensity of micropulses detected from C-pulsars can be assigned to their nonradial gravitational-elastic eigenvibrations. The proposal bicomponent model of neutron star allows to say that confusion in radio pulses of pulsar is the starquake called by companion of binary star system.

ЛИТЕРАТУРА

1. *H.-Y. Chiu*, Ann. Phys., **26**, 364, 1964.
2. *G.Gamom*, *M.Shonberg*, Phys. Rev., **59**, 539, 1941.
3. *S.L.Shapiro*, *S.A.Teukolsky*, Black Holes, White Dwarfs and Netron Stars, Wiley, New York, 1983.
4. *W.Baade*, *F.Zwicky*, Phys. Rev., **45**, 138, 1934.
5. *И.С.Шкловский*, Сверхновые звезды, Наука, М., 1976.
6. *Н.С.Кардашев*, Астрон. ж., **41**, 807, 1964.
7. *Н.В.Арделян*, *Г.С.Бисноватый-Коган*, *С.Г.Моисеенко*, Успехи физ. наук, **167**, 1128, 1997.
8. *Ch.Schaab*, *F.Weber*, *D.Voskresensky*, *A.Sedrakian*, *M.K.Weigel*, Astron. Astrophys., **321**, 591, 1997.
9. *Г.С.Саакян*, Физика нейтронных звезд, ОИЯИ, Дубна, 1995.
10. *Г.С.Саакян*, Равновесные конфигурации вырожденных газовых масс, Наука, М., 1972.
11. *L.Sh.Grigorian*, *G.S.Sahakian*, Astrophys. and Space Sci., **95**, 305-356, 1983.
12. *S.I.Bastrukov*, *J.Libert*, *I.V.Molodtsova*, Int. J. Mod. Phys., **E 6**, 89, 1997.
13. *S.I.Bastrukov*, *I.V.Molodtsova*, *V.V.Papoyan*, *F.Weber*, J. Phys. G, **22**, L33, 1996.
14. *S.I.Bastrukov*, Phys. Rev., **E 49**, 3166, 1994.
15. *N.K.Glendenning*, Compact Stars, Springer, Berlin, 1996.
16. *F.Weber*, Neutron and Quark Matter Stars as Probes of Superdence Relativistic Matter, Taylor & Fransic. Bristol, 1998.
17. *S.Chandrasekhar*, Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability, Clarendon, Oxford, 1961.
18. *Л.Д.Ландау*, *Е.М.Лифшиц*, Теория упругости, Наука, М., 1986.
19. *J.P.Cox*, Theory of Stellar Pulsations, Princeton Univ. Press, Princeton, 1980.
20. *Н.Ламб*, Гидродинамика, Пер. с англ., Гостехиздат, М., 1947.

Приложение А

В этом приложении приводится сводка формул, значительно облегчающих аналитические вычисления периодов собственных нерадиальных гравитационно-упругих колебаний. Все вычисления выполняются в сферической системе координат с фиксированной полярной осью z. Производные поля смещений в тензоре упругих напряжений определяются следующим образом:

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial \xi_1}{\partial x_1}=\frac{\partial \xi_r}{\partial r}, \quad \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2}=-\frac{\left(1-\mu^2\right)^{1/2}}{r}\frac{\partial \xi_\theta}{\partial \mu}+\frac{\xi_r}{r}, \quad \mu=\cos\theta, \\
\frac{\partial \xi_3}{\partial x_3}=\frac{1}{r\left(1-\mu^2\right)^{1/2}}\frac{\partial \xi_\phi}{\partial \phi}+\frac{\xi_r}{r}+\frac{\xi_\theta}{r}\frac{\mu}{\left(1-\mu^2\right)^{1/2}}, \\
\frac{\partial \xi_1}{\partial x_2}=-\frac{\left(1-\mu^2\right)^{1/2}}{r}\frac{\partial \xi_r}{\partial \mu}-\frac{\xi_\theta}{r}, \quad \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1}=\frac{\partial \xi_\theta}{\partial r}, \\
\frac{\partial \xi_1}{\partial x_3}=\frac{1}{r\left(1-\mu^2\right)^{1/2}}\frac{\partial \xi_r}{\partial \phi}-\frac{\xi_\phi}{r}, \quad \frac{\partial \xi_3}{\partial x_1}=\frac{\partial \xi_\theta}{\partial r}, \\
\frac{\partial \xi_2}{\partial x_3}=\frac{1}{r\left(1-\mu^2\right)^{1/2}}\frac{\partial \xi_\theta}{\partial \phi}-\frac{\xi_\phi}{r}\frac{\mu}{\left(1-\mu^2\right)^{1/2}}, \quad \frac{\partial \xi_3}{\partial x_2}=-\frac{\left(1-\mu^2\right)^{1/2}}{r}\frac{\partial \xi_\phi}{\partial \mu}.
\end{gathered}
\tag{A1}
$$

Непосредственно интегрируемое выражение для жесткости упругих нерадиальных колебаний имеет вид:

$$
\begin{aligned}
C &= \frac{1}{2}\int_v P(r)\left(\frac{\partial \xi_i}{\partial x_j}+\frac{\partial \xi_j}{\partial x_i}\right)^2 dV = \int_v P(r)\left(\frac{\partial \xi_i}{\partial x_j}+\frac{\partial \xi_j}{\partial x_i}\right)\frac{\partial \xi_j}{\partial x_i}dV = \\
&= \int_v P(r)\left\{2\left[\left(\frac{\partial \xi_1}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial \xi_2}{\partial x_2}\right)^2+\left(\frac{\partial \xi_3}{\partial x_3}\right)^2\right]+\right. \\
&\left.+\left[\left(\frac{\partial \xi_1}{\partial x_2}+\frac{\partial \xi_2}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial \xi_1}{\partial x_3}+\frac{\partial \xi_3}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial \xi_2}{\partial x_3}+\frac{\partial \xi_3}{\partial x_2}\right)^2\right]\right\}dV.
\end{aligned}
\tag{A2}
$$

В вычислениях использовалось следующее представление полоидального поля упругих смещений:

$$
\xi_r = LN_p r^{L-1}P_L(\mu), \quad \xi_\theta=-N_p\left(1-\mu^2\right)^{1/2} r^{L-1}\frac{dP_L(\mu)}{d\mu}, \quad \xi_\phi=0, \tag{A3}
$$

и их производных

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} = A_1 L(L-1) r^{L-2} P_L(\mu) + (L+1)(L+2) A_2 r^{-L-3} P_L(\mu),\\
&\frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} = A_1 r^{L-2}\left[\mu \frac{dP_L(\mu)}{d\mu} - L^2 P_L(\mu)\right] + A_2 r^{-L-3}\left[\mu \frac{dP_L(\mu)}{d\mu} - (L+1)^2 P_L(\mu)\right],\\
&\frac{\partial \xi_3}{\partial x_3} = A_1 r^{L-2}\left[L P_L(\mu) - \mu \frac{dP_L(\mu)}{d\mu}\right] - A_2 r^{-L-3}\left[\mu \frac{dP_L(\mu)}{d\mu} + (L+1) P_L(\mu)\right],\\
&\frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} = -A_1 (L-1) r^{L-2}\left(1-\mu^2\right)^{1/2} \frac{dP_L(\mu)}{d\mu} + A_2 (L+2) r^{-L-3}\left(1-\mu^2\right)^{1/2} \frac{dP_L(\mu)}{d\mu},\\
&\frac{\partial \xi_1}{\partial x_3} = 0, \quad \frac{\partial \xi_3}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial \xi_2}{\partial x_3} = 0, \quad \frac{\partial \xi_3}{\partial x_2} = 0.
\end{aligned}
\tag{A4}
$$

Сферические компоненты тороидального поля упругих торсионных смещений и их производных имеют вид

$$
\xi_r = 0, \quad \xi_\theta = 0, \quad \xi_\phi = -N_t r^L \left(1-\mu^2\right)^{1/2} \frac{dP_L(\mu)}{d\mu}. \tag{A5}
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial \xi_3}{\partial x_3} = 0, \quad \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} = 0,\\
&\frac{\partial \xi_1}{\partial x_3} = -\left(1-\mu^2\right)^{1/2}\left(C_1 r^{L-1} + C_2 r^{-L-2}\right)\frac{dP_L(\mu)}{d\mu},\\
&\frac{\partial \xi_3}{\partial x_1} = -\left(1-\mu^2\right)^{1/2}\left(L C_1 r^{L-1} - (L+1) C_2 r^{-L-2}\right)\frac{dP_L(\mu)}{d\mu},\\
&\frac{\partial \xi_2}{\partial x_3} = \left(L C_1 r^{L-1} - (L+1) C_2 r^{-L-2}\right)\mu \frac{dP_L(\mu)}{d\mu},\\
&\frac{\partial \xi_3}{\partial x_2} = \left(C_1 r^{L-1} + C_2 r^{-L-2}\right)\left[\mu \frac{dP_L(\mu)}{d\mu} - L(L+1) P_L(\mu)\right].
\end{aligned}
\tag{A6}
$$