

## СТРУННАЯ ЭФФЕКТИВНАЯ ГРАВИТАЦИЯ И РАСТЯНУТАЯ ИНФЛЯЦИЯ

А.А. СААРЯН

Поступила 10 апреля 1995

Принята к печати 23 мая 1995

Рассмотрена низкоэнергетическая струнная гравитация для случая редукции с переменным (в струнных единицах) внутренним пространством. Построена плоская космологическая модель соответствующей четырехмерной теории. Проведен качественный анализ уравнений модели для потенциально-доминированного скалярного поля в качестве источника. Показано, что в отличие от случая постоянного внутреннего пространства, здесь возможна стадия растянутой инфляции с одним лишь скалярным полем дилатона. Обсуждается картина космологической эволюции в различных конформных представлениях.

1. *Введение.* Общепринято, что классическая теория гравитации должна быть эффективным приближением более фундаментальной квантовой гравитации. В настоящее время наиболее реальным кандидатом такой фундаментальной теории является теория струн [1]. В отличие от обычной квантовой теории поля, теория струн постулирует, что элементарными составляющими материи являются струны - одномерно протяженные объекты, размер и энергия возбуждения которых характеризуется планковской длиной и планковской массой. Все струнные модели в своем бозонном гравитационном секторе, помимо гравитона (симметричное тензорное поле  $G_{MN}$ ), содержат также антисимметричное тензорное поле  $B_{MN}$  и скалярное поле дилатона  $\phi$ .

В низкоэнергетическом приближении теория струн приводит к эффективной локальной теории поля, действие которой может быть получено различными способами: а) из условия обращения в нуль соответствующих  $\beta$ -функций [2,3], б) интегрированием по квантовым флуктуациям струны [4,5], в) из выражений для соответствующих струнных амплитуд рассеяния [6]. В древесном приближении, с точностью до членов линейных по натяжению струны, такое действие имеет вид

$$S^{(D)} = \int d^D x \sqrt{-\tilde{G}} e^{-2\tilde{\varphi}} \left[ -\frac{1}{16\pi k_D} \left( \tilde{R} + 4\tilde{\partial}^M \tilde{\varphi} \partial_M \tilde{\varphi} - \right) - \frac{1}{12} H_{MNP} \tilde{H}^{MNP} \right] + L_m, \quad (1)$$

где  $D$  - размерность пространственно-временного многообразия, на фоне которого распространяется струна (одним из замечательных достижений квантовой теории струн является предсказание значения  $D$ :  $D=26$  для бозонных струн и  $D=10$  для суперструн), константа  $k_D$  определяет  $D$ -мерную гравитационную постоянную  $\tilde{\partial}^M \tilde{\varphi} = \tilde{G}^{MN} \partial_N \tilde{\varphi}$ ,  $\tilde{R}$  - скаляр Риччи метрики  $\tilde{G}_{MN}$ ,  $H_{MNP} = 3\delta_{[P} B_{MN]}$  - антисимметричный тензор напряженности поля  $B_{MN}$ . Здесь и ниже символом  $\sim$  над буквой будем обозначать величины в струнном конформном представлении, когда  $L_m$  в рассматриваемом приближении не зависит от дилатона:

$$L_m = L_m(\tilde{G}_{MN}, \psi), \quad (2)$$

где  $\psi$  - другие поля, а индексы обозначаемые большими латинскими буквами пробегает значения  $0, 1, \dots, D-1$ .

Четырехмерную теорию, получившуюся из (1) размерной редукцией, обычно рассматривают как возможную основу для реализации сценария растянутой (extended) инфляции [7,8]. В работе [9] показано, что решения такого типа отсутствуют в варианте редукции с постоянным внутренним пространством и нулевым антисимметричным тензором. В данной работе рассмотрена редукция с переменным внутренним пространством. В разделе 2 исследованы конформные свойства действия (1). Показано, что оно описывает  $D$ -мерную обобщенную скалярно-тензорную теорию. Размерная редукция этой теории для случая постоянного в конформном представлении внутреннего пространства проведена в разделе 3. Гравитационная часть действия соответствующей четырехмерной теории совпадает с гравитационным действием теории Йордана-Бранса-Дикке (ЙБД) для определенного значения параметра  $\omega$ . Эти теории отличает наличие в лагранжиане струнной гравитации непосредственного взаимодействия дилатон-материя. Выбором конформного представления зависимость негравитационного лагранжиана от дилатона можно устранить лишь в частных случаях. В разделе 4 выведены уравнения теории. Для плоской космологической модели они сводятся к динамической системе второго

порядка (раздел 5). Подробно рассмотрен случай потенциально-доминированного скалярного поля. Выписаны частные решения для масштабного фактора и гравитационного скаляра, имеющие вид степенных функций от времени, а также проведен качественный анализ динамической системы (раздел 6), результаты которого подытожены на рис.1. Показано, что возможна реализация модели растянутой инфляции. Обсуждается картина расширения в различных конформных представлениях. Показано, что они являются физически эквивалентными и соответствуют различным выборам единиц измерения. В конце рассмотрены возможные эффекты многопетлевых струнных поправок, приводящие к отличной от (1) связи дилатон-материи. В данной работе не обсуждаются возможные ограничения на параметры струнной эффективной гравитации, следующие из современных наблюдательных данных на гравитационное взаимодействие. Это можно найти в работе [10].

**2. Конформные свойства.** В гравитационных теориях важную роль играют конформные преобразования метрики, позволяющие по известным решениям одной модели генерировать решения другой (см., например, [11-14]). С их помощью теорию можно записать в различных физически эквивалентных представлениях, отличающихся единицами измерения. Например, в теории ЙБД [15,16] обычно рассматривают два представления. В первом из них, называемом представлением Йордана, лагранжиан негравитационной материи не зависит от скалярного поля (гравитационный скаляр) и калибровочные константы постоянны, в то время как эффективная гравитационная "постоянная" является функцией пространственно-временных координат. В другом представлении [17] часть действия, содержащая скаляр Риччи, имеет эйнштейновский вид, но лагранжиан материи зависит от скалярного поля. В этом, так называемом эйнштейновском представлении, гравитационная константа связи постоянна, но вследствие зависимости лагранжиана материи от скалярного поля эффективные калибровочные коэффициенты связи являются переменными.

Рассмотрим поведение струнного эффективного действия (1) при конформных преобразованиях

$$\tilde{G}_{MN} = e^{c\phi} G_{MN} \quad (3)$$

$D$  - мерной метрики, где  $c$  - произвольная постоянная, различные значения

которой соответствуют тому или иному конформному представлению: С помощью закона преобразования

$$\tilde{R} = e^{-c\tilde{\varphi}} \left[ R - c(D-1)G^{MN}D_M D_N \tilde{\varphi} - \frac{c^2}{4}(D-1)(D-2)\partial^M \tilde{\varphi} \partial_M \tilde{\varphi} \right],$$

где  $D_M$  - ковариантная производная по метрике  $G_{MN}$ , в новом представлении действие (1) запишется в виде

$$S^{(D)} = \int d^D x \sqrt{-G} e^{b\tilde{\varphi}} \left\{ -\frac{1}{16k_D \pi} \left[ R + \left( \frac{c^2}{4}(D-1)(D-2) - 2c(D-1) + 4 \right) \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \partial_M \tilde{\varphi} \partial^M \tilde{\varphi} - \frac{1}{12} e^{-2c\tilde{\varphi}} H_{MNP} H^{MNP} \right] + e^{c\tilde{\varphi}} L_m(e^{c\tilde{\varphi}} G_{MN}, \Psi) \right\}, \quad (4)$$

где введено обозначение

$$b = c D/2 - c - 2. \quad (5)$$

Выбирая конкретное значение

$$c = 4/(D-2) \quad (6)$$

приходим к эйнштейновскому представлению

$$S^{(D)} = \int d^D x \sqrt{-G} \left\{ -\frac{1}{16\pi k_D} \left[ R - \frac{4}{(D-2)} \partial^M \tilde{\varphi} \partial_M \tilde{\varphi} - \frac{1}{12} \exp\left(-\frac{8\tilde{\varphi}}{D-2}\right) \times \right. \right. \\ \left. \left. \times H_{MNP} H^{MNP} \right] + \exp\left(\frac{4\tilde{\varphi}}{D-2}\right) L_m\left(\exp\left(\frac{4\tilde{\varphi}}{D-2}\right) G_{MN}, \Psi\right) \right\}, \quad (7)$$

где в отличие от струнного представления кинетический член дилатона имеет правильный знак. В частности, для безмассового скалярного поля  $\psi$  с лагранжианом  $L_m = \partial^M \psi \partial_M \psi$  негравитационная часть действия в этом представлении не содержит поля дилатона.

В дальнейшем нас будут интересовать эффекты дилатонного поля и антисимметричный тензор мы положим равным нулю. В этом случае для произвольного значения параметра  $c$  действие (4) представляет обобщенную многомерную скалярно-тензорную теорию, которую удобно записать через новос скалярное поле

$$\Phi = e^{b\bar{\phi}}, \quad b \neq 0. \quad (8)$$

Действие представится в виде

$$S^{(D)} = \int d^D x \sqrt{-G} \left[ \frac{1}{16\pi k_D} (-\Phi R + \omega \bar{\sigma}^m \Phi \partial_m \Phi / \Phi) + \right. \\ \left. + \Phi^{1+c/b} L_m \left( \Phi^{c/b} G_{MN}, \Psi \right) \right] \quad (9)$$

с параметром

$$\omega = -(D-1-4/b^2)/(D-2) \quad (10)$$

и эффективным лагранжианом материи зависящим от скалярного поля  $\Phi$ . Заместим, что вообще говоря, выбором параметра  $c$  эту зависимость невозможно устранить.

3. *Размерная редукция эффективного действия.* Действие (9) описывает теорию гравитации в  $D$  измерениях. Для того, чтобы можно было дать такой теории четырехмерную интерпретацию,  $D$ -мерное пространственно-временное многообразие должно быть произведением компактного  $(D-4)$ -мерного пространства и обычного четырехмерного пространства-времени. Четырехмерная физика получается размерной редукцией  $D$ -мерной теории.

Рассмотрим простейший вариант редукции с фиксированным внутренним пространством:

$$G_{MN} = \text{diag}(g_{\mu\nu}, g_{mn}), \quad g_{mn} = \text{const}, \quad (11)$$

где греческие индексы принимают значения  $0 - 3$ , а малые латинские индексы - значения  $\overline{1, D-4}$ . Разлагая поля по координатам внутреннего пространства и удерживая лишь нулевые моды (о такой процедуре для различных полей см., например, [18]), подходящим преобразованием констант связи и полей, для редуцированного действия получим (чтобы не усложнять запись дальнейших формул новые поля мы будем обозначать теми же символами, что и исходные)

$$S = \frac{1}{16\pi} \int d^4 x \sqrt{-g} \left[ -\Phi R + \omega \partial^m \Phi \partial_m \Phi / \Phi + \right. \\ \left. + 16\pi \Phi^{1+c/b} L_m \left( \Phi^{c/b} g_{\mu\nu}, \Psi \right) \right], \quad (12)$$

где мы выбрали единицы измерения, в которых значение ньютоновской гравитационной постоянной равно единице,  $g = \det g_{\mu\nu}$ , а  $R$  - скаляр Риччи метрики  $g_{\mu\nu}$ . Выражение (12) отличается от действия теории ЙБД зависимостью негравитационной части от поля дилатона. Лишь тогда, когда конформным преобразованием метрики эту зависимость можно устранить, струнная эффективная гравитация эквивалентна теории ЙБД с соответствующим значением параметра  $\omega$ . При отсутствии же негравитационной материи в теории струн можно получить любое значение  $\omega$  в зависимости от конформного параметра  $c$  (см. (10)), т.е. эта теория не фиксирует  $\omega$ . Этот факт был указан в работе [9].

Рассмотрим конформные свойства четырехмерного действия (13) относительно преобразований

$$g_{\mu\nu} = \Phi^d \bar{g}_{\mu\nu}, \quad (13)$$

где  $d$  - произвольная постоянная. С учетом приведенного выше закона преобразования скаляра Риччи (с  $D=4$ ) действие можно представить в виде

$$S = \frac{1}{16\pi} \int d^4 x \sqrt{-\bar{g}} \Phi^{1+d} \left\{ -\bar{R} + \left[ \omega - 3d(d/2 + 1) \right] \bar{g}^{\mu\nu} \partial_\mu \Phi \partial_\nu \Phi / \Phi^2 + \right. \\ \left. + 16\pi \Phi^{d+c/b} L_m \left( \Phi^{d+c/b} \bar{g}_{\mu\nu}, \Psi \right) \right\}. \quad (14)$$

Наиболее важными частными случаями являются значения  $d=-1$ , соответствующие эйнштейновскому представлению:

$$S = \frac{1}{16\pi} \int d^4 x \sqrt{-\bar{g}} \left\{ -\bar{R} + \left( \omega + \frac{3}{2} \right) \bar{g}^{\mu\nu} \partial_\mu \Phi \partial_\nu \Phi / \Phi^2 + \right. \\ \left. + 16\pi \Phi^{c/b-1} L_m \left( \Phi^{c/b-1} \bar{g}_{\mu\nu}, \Psi \right) \right\}. \quad (15)$$

и значение  $d=-c/b$ , соответствующее струнному представлению

$$S = \frac{1}{16\pi} \int d^d x \sqrt{-\bar{g}} \Phi^{1-c/b} \left\{ -\bar{R} + \left[ \omega + \frac{3c}{b} \left( 1 - \frac{c}{2b} \right) \right] \bar{g}^{\mu\nu} \partial_\mu \Phi \partial_\nu \Phi / \Phi^2 + \right. \\ \left. + 16\pi L_m(\bar{g}_{\mu\nu}, \Psi) \right\}. \quad (16)$$

Из этих выражений следует важный вывод: струнная эффективная теория (12) при

$$c = 4/(D-4), \quad (17)$$

когда  $b=c$ , эквивалентна ОТО независимо от характера негравитационной материи. Покажем, что действия (12) для различных значений параметра  $c$  конформно неэквивалентны: т.е. не существует конформное преобразование (13) и одновременно преобразование поля  $\Phi$  связывающее эти действия. В противном случае, как это следует из вышесказанного, теория (12) при любом  $c$  была бы эквивалентна ОТО. Запишем (14) через новую функцию  $\varphi = \Phi^{1+d}$

$$S = \frac{1}{16\pi} \int d^d x \sqrt{-\bar{g}} \varphi \left\{ -\bar{R} + [\omega - 3d(d/2 + 1)](d+1)^{-2} \bar{g}^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi / \varphi^2 + \right. \\ \left. + 16\pi \varphi^{d_1} L_m(\varphi^{d_1} \bar{g}_{\mu\nu}, \Psi) \right\}, \quad d_1 = \frac{d+c/b}{d+1}. \quad (18)$$

Чтобы это действие снова имело вид (12) с некоторым  $c_1 \neq c$  должно быть выполнено

$$(d+1)^2 \omega_1 = \omega - 3d(d/2 + 1), \quad (d+1)c_1/b_1 = d+c/b,$$

где  $\omega_1$  и  $b_1$  определяются согласно (5), (10) с заменой  $c \rightarrow c_1$ . Для произвольно заданных  $c$  и  $c_1$  эта система не имеет решения относительно  $d$ , что и означает конформную неэквивалентность действий (12) со значениями  $c$  и  $c_1$ . Исключением является случай  $D=4$ , когда выбором  $d=b_1/b-1$  можно удовлетворить оба уравнения. В этом случае теории с различными  $c$  конформно эквивалентны (см. ниже).

Из выражения (14) следует, что вообще говоря, для произвольного  $c$

не существует конформное представление, в котором негравитационная часть лагранжиана не зависит от поля дилатона (аналог представления Йордана в теории ЙБД). Такое представление существует, когда лагранжиан материи является однородной функцией метрики со степенью однородности  $\beta$ . Тогда выбор конформного фактора из условия

$$d(\beta+2) = -1-(1+\beta)c/b \quad (19)$$

приводит к требуемому результату. Исключением является случай  $\beta=-2$  (электромагнитное поле).

Рассмотрим конкретные примеры лагранжианов. Для системы не-взаимодействующих точечных частиц [16]

$$L_m(g_{\mu\nu}, x_n^\mu) = -\frac{1}{\sqrt{-g}} \sum_n m_n \int d\tau_n \left[ g_{\mu\nu}(x_n) \frac{dx_n^\mu}{d\tau_n} \frac{dx_n^\nu}{d\tau_n} \right]^{1/2} \delta^{(4)}(x-x_n), \quad (20)$$

где  $\tau_n$  и  $x_n^\mu$  собственное время и мировая линия  $n$ -ой частицы, степень однородности равна  $\beta=-3/2$ . Лагранжиан скалярного поля  $\psi$

$$L_m = \partial^\mu \psi \partial_\mu \psi - V(\psi) \quad (21)$$

представляет собой пример, когда представление Йордана не существует. Для свободного массивного поля  $V(\psi)=m_0^2\psi^2$ . Из (14) следует, что в конформном представлении (14) масса частиц поля является переменной и равна

$$m = \Omega^{d+c/b} m_0 \quad (22)$$

В потенциально доминированном случае (важном, в частности, в инфляционных космологических моделях) вкладом кинетического члена в (21) можно пренебречь. Такому лагранжиану соответствует  $\beta=0$  и выбор

$$d = -(1+c/b)/2 \quad (23)$$

исключает поле дилатона из негравитационной части действия.

Мы рассмотрели редукцию (11) десятимерного пространства времени с внутренним пространством, постоянным в конформном представлении (3). В струнных единицах это соответствует переменному внутреннему пространству с метрикой

$$\tilde{g}_{mn} = e^{c\bar{\varphi}} g_{mn} = \Phi^{c/b} g_{mn}, \quad g_{mn} = \text{const.} \quad (24)$$

Редукцию можно было бы провести непосредственно в струнном представлении (см., например, [19])

$$\tilde{G}_{MN} = \text{diag}(\tilde{g}_{\mu\nu}, \tilde{g}_{mn}), \quad \tilde{g}_{mn} = \text{const} \quad (25)$$

и далее исследовать свойства соответствующего действия по отношению к конформным преобразованиям

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = e^{c\bar{\varphi}} g_{\mu\nu}. \quad (26)$$

Получающееся эффективное четырехмерное действие по-прежнему имеет вид (12) (это действие можно получить и из (5) подстановкой  $c=0$  с конформным преобразованием (14)), однако, в отличие от рассматриваемого нами случая (12), когда  $D=10$ , теперь нужно положить  $D=4$ , и теории с различными значениями  $c$  конформно эквивалентны. Заметим, что в этом варианте исключается возможность (17), когда теория эквивалентна ОТО. Для потенциально доминированного скалярного поля, соответствующая (26) теория эквивалентна теории ЙБД с  $\omega=1/2$  [9]. Таким образом, в зависимости от последовательности двух операций: конформного преобразования и редукции с постоянным внутренним пространством, получаются различные теории. Этого и следовало ожидать в силу некоммутативности указанных операций.

4. *Уравнения поля.* Проведенный в предыдущем разделе анализ показывает, что действие эффективной четырехмерной струнной гравитации в произвольном конформном представлении можно записать в виде

$$S = \frac{1}{16\pi} \int d^4 x \sqrt{-g} \{-\varphi R + \bar{\omega} g^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi / \varphi + \\ + 16\pi \bar{L}_m(\varphi, g_{\mu\nu}, \psi)\}, \quad (27)$$

где метрика  $g_{\mu\nu}$  и скалярное поле  $\varphi$  связаны с соответствующими величинами в струнном представлении соотношениями

$$g_{\mu\nu} = e^{-(c+bd)\bar{\varphi}} \tilde{g}_{\mu\nu}, \quad \varphi = e^{(1+d)b\bar{\varphi}}, \quad (28)$$

$d$  - произвольный параметр, определяющий выбор конформного представления (при  $d=-1$  действие задается выражением (15)). В (27) введены следующие обозначения

$$\bar{\omega} = \frac{\omega + 3/2}{(d+1)^2} - \frac{3}{2}, \quad \bar{L}_m = \varphi^{1+d_i} L_m(\varphi^{d_i} g_{\mu\nu}, \psi), \quad (29)$$

а  $d_i$  определено согласно (18). Напомним, что параметром  $s$  определяется эволюция внутреннего пространства в струнных единицах (см. (24)).

Действие (27) представляет обобщенную скалярно-тензорную теорию, характерной чертой которого является зависимость негравитационной части от дилатона. Соответствующие уравнения имеют вид (см. также [19, 20])

$$R_{\mu\nu} = 8\pi \left( T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T \right) / \varphi + \bar{\omega} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi / \varphi^2 + \left( D_\mu D_\nu \varphi + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \varphi \right) \quad (30a)$$

$$\square \varphi = \frac{8\pi}{2\bar{\omega} + 3} \left[ T + \frac{2\varphi}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\bar{L}_m \sqrt{-g})}{\delta\varphi} \right], \quad (30b)$$

где  $\square$  - ковариантный даламбертиан,

$$T_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\bar{L}_m \sqrt{-g})}{\delta g^{\mu\nu}} \quad (31)$$

-тензор энергии-импульса негравитационной материи с ковариантной дивергенцией

$$D_\nu T_\mu^\nu = - \frac{\partial_\mu \varphi}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\bar{L}_m \sqrt{-g})}{\delta\varphi} \quad (32)$$

При выводе второго уравнения (30) использована свертка первого. Для однородных по метрике лагранжианов

$$L_m(\varphi g_{\mu\nu}, \psi) = \varphi^\beta L_m(g_{\mu\nu}, \psi), \quad T = -2(\beta + 2) \bar{L}_m, \quad (33)$$

в частности, для электромагнитного поля  $\beta=-2$  и  $T=0$ . Подстановка  $\bar{L}_m$  из (33) в уравнения (30b) и (32) при  $\beta \neq -2$  приводит к следующему

результату

$$\square \varphi = \frac{8\pi T}{2\bar{\omega} + 3} (1 - 2\xi), \quad D_\nu T_\mu^\nu = \xi T \partial_\mu \varphi / \varphi, \quad (34)$$

где

$$\xi = \frac{(1 + \beta) d_I + 1}{2\beta + 4} \quad (35)$$

Если выбрать конформное представление согласно (19), то  $\xi=0$  и уравнения теории совпадают с уравнениями теории ЙБД.

5. *Плоская космологическая модель.* В ранних стадиях эволюции Вселенной, когда важны струнные поправки, эффектами кривизны пространства можно пренебречь. Поэтому здесь мы рассмотрим однородную и изотропную плоскую космологическую модель. Четырехмерный метрический тензор и гравитационный скаляр имеют вид

$$g_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -R^2, -R^2, -R^2), \quad R=R(t), \quad \varphi=\varphi(t) \quad (36)$$

Из уравнения (30а) следует диагональность тензора энергии-импульса и равенство его пространственных компонент. Введя соответствующие обозначения можно написать

$$T_\mu^\nu = \text{diag}(\varepsilon, -p, -p, -p). \quad (37)$$

Уравнения поля, дополненные уравнением (34) ковариантной дивергенции тензора энергии-импульса, сводятся к следующей системе (см., также соответствующие уравнения в теории ЙБД [16] и [19])

$$\begin{aligned} \left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 - \frac{\bar{\omega}}{6} \left(\frac{\dot{\varphi}}{\varphi}\right)^2 + \frac{\dot{R}}{R} \frac{\dot{\varphi}}{\varphi} &= \frac{8\pi\varepsilon}{3\varphi} \\ \bar{\varphi} + 3 \frac{\dot{R}}{R} \dot{\varphi} &= 8\pi(\varepsilon - 3p) \frac{1 - 2\xi}{2\bar{\omega} + 3} \\ \dot{\varepsilon} + 3 \frac{\dot{R}}{R}(\varepsilon + p) &= \xi(\varepsilon - 3p) \frac{\dot{\varphi}}{\varphi}. \end{aligned} \quad (38)$$

Для полноты она должна быть дополнена уравнением состояния, которое мы выберем в наиболее простом виде

$$p = a\epsilon, \quad -1 \leq a \leq 1, \quad (39)$$

включающее в себя наиболее важные частные случаи пылевидной материи ( $a=0$ ), излучения ( $a=1/3$ ) и скалярного вакуума ( $a=-1$ ). Обозначая

$$x = 3\dot{R}/R, \quad y = \dot{\phi}/\phi, \quad f(x, y) = x^2 + 3xy - 3\bar{\omega}y^2/2, \quad (40)$$

систему (38) можно записать в более симметричном виде

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -x(x+y) + b_1 f(x, y) \\ \dot{y} &= -y(x+y) + b_2 f(x, y), \end{aligned} \quad (41)$$

где коэффициенты  $b_i$  равны

$$b_1 = [\bar{\omega}(1-a) + \xi(1-3a) + 1] / (2\bar{\omega} + 3), \quad b_2 = (1-2\xi)(1-3a) / (6\bar{\omega} + 9). \quad (42)$$

Плотность энергии теперь выражается через функцию  $f$  согласно

$$\epsilon = \phi f(x, y) / 24\pi. \quad (43)$$

Уравнения (41) представляют собой автономную динамическую систему второго порядка. Аналогичные системы возникают и при исследовании плоских космологических моделей ряда других теорий гравитации. В работе [21] они подробно исследованы с точки зрения качественной теории динамических систем, где в параметрическом виде выписаны также точные решения. Здесь мы остановимся лишь на моделях космологической инфляции.

**6. Модель инфляции.** Модель космологической инфляции была предложена как возможное решение ряда проблем стандартной теории горячей Вселенной, таких как проблемы горизонта, плоскостности пространства, крупномасштабной однородности и изотропии, образования галактик и т.д. (см. [22, 23]). Согласно этой модели, Вселенная на самых ранних стадиях своей эволюции находилась в неустойчивом вакуумно-подобном состоянии и быстро расширялась. Затем происходил распад вакуумно-подобного состояния. Вселенная разогревалась, дальнейшая ее эволюция описывалась стандартной теорией горячей Вселенной. В настоящее время существует несколько реализаций сценария инфляционной Вселенной (см., например, [24]). Однако каждая из них приводит к новым проблемам. Например, старая инфляционная модель [25]

сталкивается с проблемой “красивого выхода” (“graceful exit” problem) [26], в то время как новая [27] и хаотическая [28] сценарии требуют точной подгонки (fine-tuning) микрофизических параметров. В модели растянутой инфляции [7, 8], основанной на теории ЙБД, была возрождена основная идея старой инфляции, согласно которой переход из метастабильной фазы в стабильное происходит путем фазового перехода первого рода с образованием пузырьков новой фазы. В связи с тем, что космологические ограничения на параметр теории ЙБД, возникающие в модели растянутой инфляции [29] трудно согласовать с современными наблюдательными данными в Солнечной системе [20], в настоящее время эта модель обсуждается в рамках других скалярно-тензорных теорий [30-33], и теорий типа Калузы-Клейна [34, 35]. Обычно в качестве аргумента в пользу модели растянутой инфляции приводят тот факт, что теории типа ЙБД являются низкоэнергетическими приближениями теории струн. В работе [9] показано, что в эффективной теории струн с одним лишь дилатонным полем (о моделях с дополнительными модулярными (modulus) полями см. [36]) в варианте редукции (25) модель растянутой инфляции не реализуется. Здесь мы рассмотрим вариант редукции (11) с постоянным в конформном представлении внутренним пространством.

В большинстве моделей инфляции источником гравитации является потенциально доминированное скалярное поле  $\psi$  с потенциалом  $V(\psi)$ . Как уже было отмечено, в этом случае выбор конформного параметра  $d$ , согласно (23), соответствует представлению, в котором  $\bar{L}_m$  не зависит от поля дилатона. Струнная эффективная гравитация теперь эквивалентна теории ЙБД с

$$\bar{\omega} = 2(D-2) \frac{D-4+8/b^2}{(D-4-4/b)^2} - \frac{3}{2}, \quad \bar{\omega} \geq 1/2. \quad (44)$$

В варианте редукции (25) нужно положить  $D=4$  и мы приходим к значению  $\bar{\omega} = 1/2$  [9] независимо от значения параметра  $c$ . Это является отражением отмеченного выше факта, что в этом случае различные значения  $c$  соответствуют конформно-эквивалентным представлениям. Значения коэффициентов  $b_i$  получаются из (42) подстановкой  $\xi=0$ ,  $a = -1$ :

$$b_1 = \frac{2\bar{\omega}+1}{2\bar{\omega}+3}, \quad b_2 = \frac{4}{6\bar{\omega}+9}. \quad (45)$$

Для этих значений динамическая система (41) имеет частные решения типа

$$x = v_i, y, i = \overline{1,3}; v_1 = 3(2\overline{\omega} + 1) / 4, v_{2,3} = \frac{3}{2}(-1 \pm \sqrt{2\overline{\omega} / 3 + 1}), \quad (46)$$

имеющие вид [37-40]

$$y = \frac{1}{a_i t + c_1}, \quad \varphi = \text{const} |a_i t + c_1|^{1/a_i}, \quad R = \text{const} |a_i t + c_1|^{v_i/3a_i}, \quad (47)$$

где  $c_1$  - постоянная интегрирования, определяющая начало отсчета времени,

$$a_i = 1/2, a_i = v_i + 1, i = 2, 3, \quad (48)$$

причем, так как  $v_i/a_i > 0$ , то эти решения описывают модели расширения при  $t > -c_1/a_i$  и сжатия - при  $t < -c_1/a_i$ . Отметим, что инфляционные модели со степенным законом масштабного фактора существуют и в ОТО для скалярных полей с экспоненциальными потенциалами [41-43]. Это непосредственно видно также из (15), которое при соответствующем переопределении  $\Phi$  представляет собой ОТО со скалярным полем с экспоненциальным потенциалом.

Обычно, в качестве решения, реализующим модель растянутой инфляции выбирают решение (47) с  $k=1$ . При  $D=4$  получается линейный закон расширения и мы приходим к заключению работы [9] о невозможности растянутой инфляции в струнной гравитации для случая редукции (25) с постоянным в струнных единицах внутренним пространством (необходимым условием инфляции для закона расширения  $R \sim t^p$  является  $p > 1$  [41, 42]). Для редукции же (11) с изменяющимся по закону (24) внутренним пространством нужно положить  $D=10$  и расширение происходит по закону  $R \sim t^{\overline{\omega}+1/2}$  с зависящим от  $c$  параметром, определяемым согласно (44). Что касается двух остальных решений из (47) ( $i=2, 3$ ), то для них получаем  $\epsilon=0$ , т.е. они описывают расширение пустого пространства.

Качественная картина фазовых траекторий динамической системы определяется расположением и характером особых точек, для которых правые части системы одновременно обращаются в нуль [44, 45]. В случае системы (41) единственной особой точкой в конечной части фазовой плоскости является начало координат  $x=y=0$  с равными нулю

собственными числами (вырожденная особая точка.) При исследовании таких точек, обычно переходят к полярным координатам в плоскости  $(x, y)$ . При этом вместо точки  $(0, 0)$  вклеивается окружность  $S^1 = \{r = 0, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$  (см. рисунок). Особыми точками системы (40), написанной в полярных координатах, являются следующие точки окружности  $S^1$ :

$$A_m(r = 0, \theta = \theta_m), \quad m = \overline{1, 6}; \quad \theta_n = \arctg v_n, \quad \theta_{n+3} = \theta_n + \pi, \quad n = \overline{1, 3}. \quad (49)$$

Поведение фазовых траекторий в окрестности этих точек определяется знаком и относительной величиной собственных чисел  $\lambda_i^{(m)}$ ,  $i=1, 2$ . Конкретный расчет показывает, что они отличны от нуля и действительны, т.е. точки  $A_m$  невырождены и являются или узлами, или седловыми точками. Далее, как нетрудно убедиться из вида правых частей системы (41), собственные векторы  $\bar{n}_i$ , соответствующие собственным числам  $\lambda_i$ , в полярных координатах имеют компоненты  $\bar{n}_1(1, 0)$ ,  $\bar{n}_2(0, 1)$ , т.е. совпадают с осями координатной системы  $(r, \theta)$ . Знаки и относительные величины собственных чисел следующие:

$$\begin{aligned} \lambda_1^{(1)} < 0, \lambda_1^{(2)} < 0 < \lambda_2^{(2)}, \lambda_1^{(3)} < 0 < \lambda_2^{(3)} \\ |\lambda_1^{(m)}| < |\lambda_2^{(m)}|, \lambda_i^{(m+3)} = -\lambda_i^{(m)}, \quad i = 1, 2, \quad m = \overline{1, 3}, \end{aligned} \quad (50)$$

где  $\lambda_1^{(m)}$  - собственные числа точки  $A_m$ . Последнее соотношение между собственными числами первой и второй тройки особых точек является следствием инвариантности системы (41) относительно замены

$$(x, y, t) \rightarrow (-x, -y, -t). \quad (51)$$

Таким образом, согласно (50), точка  $A_1 (A_4)$  является устойчивым (неустойчивым) узлом, а точки  $A_2, A_3, A_5, A_6$  - седловыми точками. Поскольку для всех точек  $|\lambda_1| < |\lambda_2|$ , то в окрестности узлов все траектории, кроме исключительных, касаются собственного вектора  $\bar{n}_1$ , т.е. входят в узел радиально.

Для исследования поведения фазовых траекторий на бесконечности воспользуемся координатами  $(\rho, \theta)$ ,  $\rho = 1/r$ . При таком отображении бесконечно удаленные точки переходят в точки окружности  $\bar{S}^1 = \{\rho = 0, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$ . Анализ получающейся системы аналогичен

вышеприведенному. Здесь особыми являются точки

$$\bar{A}_m(\rho = 0, \theta = \theta_m), \quad m = \overline{1, 6}, \quad (52)$$

собственные числа  $\bar{\lambda}_i^{(m)}$  которых связаны с соответствующими величинами точек  $A_m$  соотношениями

$$\bar{\lambda}_1^{(m)} = -\lambda_1^{(m)}, \quad \bar{\lambda}_2^{(m)} = \lambda_2^{(m)}, \quad (53)$$

а собственные векторы, по-прежнему, совпадают с ортами полярной системы координат. Отсюда следует, что точки  $\bar{A}_1$  и  $\bar{A}_4$  являются седловыми точками,  $\bar{A}_2$  и  $\bar{A}_3$  ( $\bar{A}_5$  и  $\bar{A}_6$ ) неустойчивыми (устойчивыми) узлами. В окрестности узлов, все траектории, кроме исключительных, входят в эти точки касаясь радиального направления.

Основанный на этом анализе фазовый портрет динамической системы (41) для параметров из (45) изображен на рис. 1.

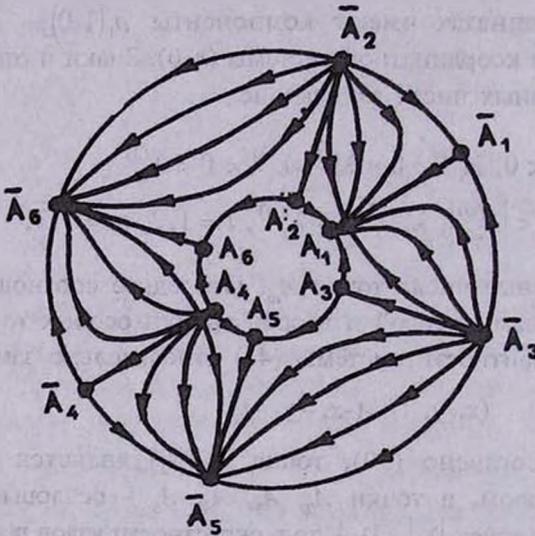


Рис. 1. Фазовый портрет динамической системы (41) для потенциально-доминированных космологических моделей (значения параметров из (45)). Предварительно проведено отображение фазовой плоскости на кольцеобразную область между окружностями

$$A_1 \dots A_6 \quad (r = 0, 0 \leq \theta \leq 2\pi) \quad \text{и} \quad \bar{A}_1 \dots \bar{A}_6 \quad (r = \infty, 0 \leq \theta \leq 2\pi).$$

Траектории  $A_l \bar{A}_l$ ,  $l = 1, 3$  соответствуют частным решениям (46), (47).

Предварительно проведено отображение фазовой плоскости  $(x, y)$  на кольцообразную область между окружностями  $A_1 \dots A_6$  (образ  $S^1$ ) и  $\bar{A}_1 \dots \bar{A}_6$  (образ  $\bar{S}^1$ ). Частным решениям (47) соответствуют траектории  $\bar{A}_1 A_1, A_4 \bar{A}_4$  ( $i = 1$ ),  $\bar{A}_2 A_2, A_5 \bar{A}_5$  ( $i = 2$ ) и  $\bar{A}_3 A_3, A_6 \bar{A}_6$  ( $i = 3$ ), являющиеся сепаратрисами соответствующих седловых точек. Из инвариантности системы относительно (51) следует, что траектории, соответствующие моделям сжатия ( $x < 0$ ), получаются из траекторий расширения заменой  $(x, y) \rightarrow (-x, -y)$  и изменением направления стрелок. Из рисунка видно, что расширение пустого пространства ( $\varepsilon = 0$ ), описываемое траекториями  $\bar{A}_i A_i$ ,  $i = 2, 3$ , неустойчиво: при появлении сколь угодно малого  $\varepsilon$  траектории удаляются от них. Траектория же расширения  $\bar{A}_1 A_1$  устойчива и при  $t \rightarrow \infty$  является аттрактором для решений с  $\varepsilon \neq 0$ . Внутри областей  $A_2 A_3 \bar{A}_3 \bar{A}_2$  и  $A_5 A_6 \bar{A}_6 \bar{A}_5$  отношение  $\varepsilon/\varphi$ , поэтому и  $\varepsilon$  положительно (так как согласно (28)  $\varphi$  положительно), причем траектория решения (47) с  $i = 1$  находится в этих областях (поскольку  $v_3^{-1} < v_1^{-1} < v_2^{-1}$ ).

Анализ потенциально доминированных космологических моделей проводился выше в конформном представлении с независимым от поля дилатона негравитационным лагранжианом. Рассмотрим картину космологической эволюции в струнном представлении для случая редукции (11). Эти представления связаны соотношением (28), где  $d$  определяется из (23). Метрика четырехмерного пространства-времени в струнном представлении запишется в виде

$$d\bar{s}^2 = \varphi^{-1} \left( dt^2 - R^2 (dx^\alpha)^2 \right) = d\bar{t}^2 - \bar{R}^2 (dx^\alpha)^2,$$

где для придания метрике вида Робертсона-Уокера введено новое время согласно

$$d\bar{t} = \varphi^{-1/2} dt,$$

а функция

$$\bar{R} = \varphi^{-1/2} R(t)$$

- масштабный фактор. Например, для решения (47) с  $i = 1$  имеем

$$t = t_0 \exp(\tilde{r}/\tilde{r}_0), \quad \tilde{R} \sim t^{\alpha-1/2} \sim \exp[(\bar{\alpha} - 1/2)\tilde{r}/\tilde{r}_0].$$

Физика, конечно, не должна зависеть от конкретного конформного представления. Пусть, например, длины измеряются в единицах комптоновской длины волны частиц свободного массивного скалярного поля  $\psi$ . В представлении (14), (23)

$$\lambda_c \sim m^{-1} = m_0^{-1} \Phi^{-(d+c/b)/2} = m_0^{-1} \Phi^{1/2}$$

и поэтому

$$R(t) / \lambda_c \sim R(t) \Phi^{-1/2} = \tilde{R}(t) \sim \tilde{R}(t) / \tilde{\lambda}_c,$$

так как в струнном представлении массы частиц постоянны. Следовательно, в обоих представлениях масштабные факторы, измеренные в единицах комптоновской длины волны, равны [9].

Выше мы рассмотрели связь дилатона с материей в форме задаваемой действием (1), где как уже отмечалось  $L_{\text{м}}$  не зависит от дилатона. Такая связь соответствует древесному приближению струнных диаграмм. Чтобы установить вид связи дилатон-материя вне этого приближения заметим, что параметром струнного петлевого разложения является  $e^{2\bar{\phi}}$  [46]. Соответствующее разложение для эффективного действия в струнном представлении можно записать в виде

$$S^{(D)} = \sum_{l=0}^{\infty} S_l^{(D)}, \quad (54)$$

где  $S_0^{(D)}$  задается формулой (1), а

$$S_l^{(D)} = \int d^D x \sqrt{-\tilde{G}} e^{2(l-1)\bar{\phi}} L^{(l)}, \quad l \geq 1$$

является вкладом струнных диаграмм с  $l$  ручками (петлями), такие поправки изменяют как кинетические, так и потенциальные члены исходного лагранжиана. Здесь нас будут интересовать эффекты потенциала  $V^0$ , когда потенциалы низших порядков равны нулю, т.е. действие имеет вид

$$S^{(D)} = S_0^{(D)} - \int d^D x \sqrt{-\tilde{G}} e^{2(l-1)\bar{\phi}} V^{(l)} + \dots \quad (55)$$

Соответствующее редуцированное действие дается выражением (14), где теперь

$$\bar{L}_m = -\varphi^{1+d} \frac{2\sqrt{b}l}{d+1} V^{(l)}.$$

Исключение поля дилатона из этого лагранжиана достигается выбором

$$d = -\frac{1}{2} \left( 1 + \frac{c+2l}{b} \right).$$

Соответствующая теория эквивалентна теории ИБД с параметром

$$\bar{\omega} = 2(D-2) \frac{D-4+8/b^2}{[D-4-2(2+(D-2)l/b)]^2} - \frac{3}{2},$$

$$\bar{\omega} \geq 2 \left( 1 + 2l + \frac{D-2}{2} l^2 \right)^{-1} - \frac{3}{2}. \quad (57)$$

При  $D=4$  отсюда получим  $\bar{\omega} = 2(l+1)^{-2} - \frac{3}{2} < -1$ , при  $l \geq 1$ , т.е. как и при  $l=0$  модели растянутой инфляции в этом варианте отсутствуют [9]. В случае редукции (11) нужно положить  $D=10$  и модели растянутой инфляции реализуются в интервале

$$-\sqrt{6l(2l+1)} < \frac{4(l+1/4)^2 - 1}{2c-1} - 3(l+1/4) < \sqrt{6l(2l+1)}, \quad l \geq 1$$

для значений параметра  $c$ . Напомним, что при  $l=0$  расширения типа растянутой инфляции существуют при любом отличном от нуля значении  $c$ . Таким образом, в варианте компактификации с постоянным в конформном представлении (3) внутренним пространством, модель растянутой инфляции можно реализовать, как в древесном, так и в многопетловом приближениях.

В конце сделаем следующее замечание. В рассмотренном выше струнном эффективном действии отсутствует потенциальный член для поля дилатона. Возможный такой член должен иметь непертурбативный характер и обычно связывается с нарушением суперсимметрии в теории [47-49].

Автор признателен Г.С.Саакяну и Л.Ш.Григоряну за ценные обсуждения и поддержку.

Ереванский государственный университет,  
Армения

## STRING EFFECTIVE GRAVITATION AND THE EXTENDED INFLATION

A.A.SAHARIAN

The low-energy string gravitation is considered in the case of the variable (in string units) inner space reduction. The flat cosmological model of the corresponding four dimensional theory is constructed. Unlike the case of the constant inner space, in the suggested variant the realization of the extended inflation scenario is possible. The other dilaton-matter couplings, which arise beyond string tree level, are considered. The cosmological expansion is discussed in the various conformal frames.

### ЛИТЕРАТУРА

1. М.Грин, Дж.Шварц Э.Виттен, Теория суперструн, т.1, 2, Мир.М., 1990.
2. C.G.Callan, D.Friedan, E.J.Martinec, M.J.Perry, Nucl.Phys., **B262**, 593, 1985.
3. C.G.Callan, I.R.Klebanov, M.J.Perry, Nucl.Phys., **B278**, 78, 1986.
4. E.S.Fradkin, A.A.Tseytlin, Phys.Lett., **B158**, 316, 1985.
5. E.S.Fradkin, A.A.Tseytlin, Nucl. Phys., **B261**, 1, 1985.
6. D.J.Gross, J.H.Sloan, Nucl. Phys., **B291**, 41, 1987.
7. D.La, P.J.Steinhardt, Phys. Rev.Lett., **62**, 376, 1989.
8. D.La, P.J.Steinhardt, Phys.Lett., **B220**, 375, 1989.
9. B.A.Campbell, A.Linde, K.A.Olive, Nucl.Phys., **B355**, 146, 1991.
10. T.Damour, A.M.Polyakov, Nucl.Phys., **B423**, 532, 1994.
11. Г.Г.Арутюнян, В.В.Папоян, Астрофизика, **25**, 217, 1986.

12. Г.Г.Арутюнян, В.В.Папоян, *Астрофизика*, **30**, 409, 1989.
13. C.Wetterich, *Nucl.Phys.*, **B302**, 645, 1988.
14. S.Kalara, N.Kaloper, K.A.Olive, *Nucl.Phys*, **B341**, 252, 1990.
15. C.Brans, R.H.Dicke, *Phys.Rev.*, **124**, 925, 1961.
16. С.Вайнберг, *Гравитация и космология*, Мир, М., 1975.
17. R.H.Dicke, *Phys.Rev.*, **125**, 2163, 1962.
18. Е.Креммер, в кн.: "Введение в супергравитацию", Мир, М., 1985.
19. J.A.Casas, J.Garcia-Bellido, M.Quiros, *Nucl.Phys*, **B361**, 713, 1991.
20. К.Уилл, *Теория и эксперимент в гравитационной физике*, Энергоатомиздат, М., 1985.
21. А.А.Саарян, *Астрофизика*, **37**, 481, 1994.
22. А.Д.Линде, *Физика элементарных частиц и инфляционная космология*, Наука, М., 1990.
23. K.A.Olive, *Phys.Rep.*, **190**, 307, 1990.
24. J.D.Barrow, *Phys.Rev.D*, **48**, 1585, 1993.
25. A.H.Guth, *Phys.Rev.D*, **23**, 347, 1981.
26. A.H.Guth, E.J.Weinberg, *Nucl.Phys.*, **B212**, 321, 1983.
27. A.D.Linde, *Phys. Lett.*, **B108**, 389, 1982.
28. A.D.Linde, *Phys. Lett.*, **B129**, 177, 1983.
29. E.J.Weinberg, *Phys. Rev. D*, **40**, 3950, 1983.
30. E.S.Accetta, J.J.Trester, *Phys. Rev. D*, **39**, 3854, 1989.
31. P.J.Steinhardt, F.S.Accetta, *Phys. Rev.Lett.*, **64**, 2740, 1990.
32. R.Holman, E.W.Kolb, Y.Wang, *Phys. Rev.Lett.*, **65**, 17, 1990.
33. J.Garcia-Bellido, M.Quiros, *Phys. Lett.*, **B243**, 45, 1990.
34. R.Holman, E.W.Kolb, S.L.Vadas, Y.Wang, *Phys. Rev. D*, **43**, 995, 1991.
35. A.S.Majumdar, S.K.Sethi, *Phys. Rev. D*, **46**, 5315, 1992.
36. J.Garcia-Bellido, M.Quiros, *Nucl. Phys.*, **B368**, 463, 1992.
37. R.H.Dicke, *Astrophys. J.*, **154**, 892, 1968.
38. H.Nariai, *Prog.Theor. Phys.*, **40**, 49, 1968; **42**, 544, 1968.
39. J.O'Hanlon, B.J.Tupper, *Nuovo Cimento*, **37**, 305, 1972.
40. C.Romero, H.P.Oliveira, *Astrophys. Space Sci.*, **159**, 1, 1989.
41. L.F.Abbot, M.B.Wise, *Nucl.Phys.*, **B244**, 541, 1984.
42. F.Lucchin, S.Matarrese, *Phys. Rev. D*, **32**, 1316, 1985.
43. A.L.Berkin, K.J.Maeda, J.Yokoyama, *Phys. Rev. Lett.*, **65**, 141, 1990.
44. Н.И.Баутин, Е.А.Леснтович, *Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости*, Наука, М., 1976.

45. О.И.Богоявленский, Методы качественной теории динамических систем в астрофизике и газовой динамике, Наука, М.,1980.
46. E.Witten, Phys.Lett., B149, 351, 1984.
47. J.P.Derendinger, L.E.Ibanez, H.P.Niles, Phys. Lett., B155, 65, 1985.
48. M.Dine, R.Rohm, N.Sciberg, E.Witten, Phys. Lett., B156, 55, 1985.
49. S.Ferrara, N.Magnoli, T.R.Taylor, G.Veneziano, Phys.Lett., B245, 409, 1990.