ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XL, № 4, 1987 Механика

УДК 532.58:620.22

ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОНИКАНИЯ ТОНКОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА В ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНУЮ СРЕДУ

БАГДОЕВ А. Г., ВАНЦЯН А. А.

Рассматривается задача проникания тонкого твердого тела в первоначально упругую анизотропную среду, в которой вблизи тела образуется область пластичности (фиг. 1). Подобные вопросы были решены в работе [1], где принималась, как и для изотропной среды, [2] гипотеза плоских сечений, согласно которой изменения по радиальной координате r намного превосходят изменения по осевой координате x и считается, что компонента тензора скорости деформации $\dot{\varepsilon}_x \ll \dot{\varepsilon}_r$. При этом для среды, в которой пределы текучести по осям r, x связаны равенством $\tau_{xr} = 2\tau_{yz}$, напряжение на теле было равно бесконечности.

В настоящей работе дается анализ соотношений пластичности и дано приближенное решение без гипотезы плоских сечений.

Рассматривается трансверсально изотропная среда. В области пластического течения тензор скоростей деформации и тензор девиатора напряжений связаны зависимостями [3]

$$\frac{\dot{\varepsilon}_r}{a} = H(\sigma_r' - \sigma_\theta') + G(\sigma_r' - \sigma_x'), \quad \frac{\dot{\varepsilon}_\theta}{a} = H(\sigma_\theta' - \sigma_r') + F(\sigma_\theta' - \sigma_x')$$

$$\frac{\dot{\varepsilon}_x}{a} = G(\sigma_x' - \sigma_r') + H(\sigma_x' - \sigma_\theta'), \quad \sigma_x' + \sigma_\theta' + \sigma_r' = 0 \tag{1}$$

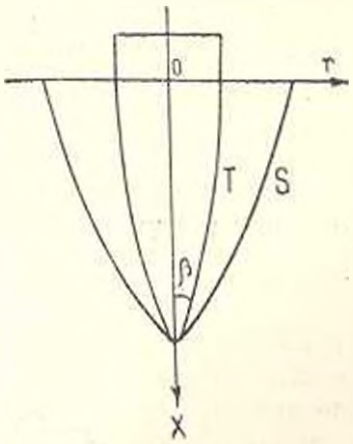
где a—параметр пластичности,

$$2F = \frac{1}{\tau_{s\theta}^2} + \frac{1}{\tau_{sx}^2} - \frac{1}{\tau_{sr}^2}, \quad 2G = \frac{1}{\tau_{sx}^2} + \frac{1}{\tau_{sr}^2} - \frac{1}{\tau_{s\theta}^2}, \quad 2H = \frac{1}{\tau_{sr}^2} + \frac{1}{\tau_{s\theta}^2} - \frac{1}{\tau_{sx}^2} \tag{2}$$

τ_s—пределы текучести по соответствующим направлениям. Уравнения (1) описывают осесимметричное течение среды в предположении идеальной пластичности. Из второго, третьего и четвертого уравнений (1) получится

$$\sigma_r' = -\frac{\frac{\dot{\varepsilon}_\theta}{a}(2F+G) + \frac{\dot{\varepsilon}_x}{a}(2F+H)}{\alpha}, \quad \sigma_\theta' = \frac{\frac{\dot{\varepsilon}_\theta}{a}(2G+F) + \frac{\dot{\varepsilon}_x}{a}(F-H)}{\alpha}$$

$$\sigma_x' = -\frac{\frac{\dot{\varepsilon}_\theta}{a}(F-G) + \frac{\dot{\varepsilon}_x}{a}(F+2H)}{\alpha}, \quad \alpha = 3(FG+FH+GH) \tag{3}$$



Фиг. 1

Уравнение текучести в основных порядках ($\tau_{sx} \ll \sigma_r$) имеет вид

$$H(\sigma_r - \sigma_\theta)^2 + G(\sigma_r - \sigma_x)^2 + F(\sigma_\theta - \sigma_x)^2 = 1 \qquad (4)$$

Для трансверсально изотропной среды

$$G = F = \frac{1}{2\tau_{sx}^2}, \quad H = \frac{1}{\tau_{sr}^2} - \frac{1}{2\tau_{sx}^2}$$

$$\alpha = \frac{3}{\tau_{sx}^2}\left(\frac{1}{\tau_{sr}^2} - \frac{1}{4\tau_{sx}^2}\right) \qquad (5)$$

Подставляя (3) и (5) в (4), получим

$$\frac{1}{\tau_{sx}^2}\left(\frac{\varepsilon_\theta}{a}\right)^2 + \frac{1}{\tau_{sr}^2}\left(\frac{\varepsilon_x}{a}\right)^2 + \frac{1}{\tau_{sx}^2}\frac{\varepsilon_\theta}{a}\frac{\varepsilon_x}{a} = \frac{1}{\tau_{sx}^2}\left(\frac{1}{\tau_{sr}^2} - \frac{1}{4\tau_{sx}^2}\right) \qquad (6)$$

Откуда следует

$$\frac{\varepsilon_x}{a} = \frac{\tau_{sr}^2}{\tau_{sx}^2}\left(-\frac{\varepsilon_\theta}{2a} \pm \left[\left(\frac{\varepsilon_\theta}{2a}\right)^2 - \left(\frac{1}{\tau_{sr}^2} - \frac{1}{4\tau_{sx}^2}\right) + \left(\frac{\varepsilon_\theta}{a}\right)^2\right]^{1/2}\right) \qquad (7)$$

Из (3) можно получить

$$\sigma_r - \sigma_\theta = \frac{3}{a\alpha\tau_{sx}^2}\left(\varepsilon_\theta + \frac{\varepsilon_x}{2}\right) \qquad (8)$$

Как и в случае гипотезы плоских сечений [2], можно считать

а) $\varepsilon_x = 0 \quad \varepsilon_\theta \neq 0$

тогда $\sigma_r - \sigma_\theta = \infty$ при $\tau_{sr} = 2\tau_{sx}$

в) Поскольку при проникании возможны различные виды касания тела и среды, можно изучить случай

$$\frac{\varepsilon_\theta}{a} = -\frac{\varepsilon_x}{2a} \quad \text{при} \quad \tau_{sr} = 2\tau_{sx}$$

тогда $\sigma_r - \sigma_\theta$ получается конечным, как это видно из (8).

Для нахождения решения задачи о проникании тонкого тела в среду следует применять численные методы. Однако, можно для качественного вида решения принять

$$\varepsilon_x = n\varepsilon_\theta, \quad n = \frac{-4\sin^2\beta\tau_{sx}}{2\tau_{sx} - \tau_{sr}\cos^2\beta} \qquad (9)$$

при этом для $\tau_{sr} \neq 2\tau_{sx}$ $n \sim \beta^2$, то есть имеет место допущение [1]. Для $\tau_{sr} = 2\tau_{sx}$ $n = -2$. Тогда из уравнения неразрывности

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} + \varepsilon_x = 0$$

следует

$$v_r = \frac{r_k^{n+1}}{r^{n+1}} \frac{\partial r_k}{\partial t}$$

где v_r—радиальная скорость частиц, $r = r_k(x, t)$ есть уравнение меридиана тела. Тогда получится

$$\varepsilon_\theta = \frac{r_k^{n+1}}{r^{n+2}} \frac{\partial r_k}{\partial t}, \quad \varepsilon_r = -(n+1)\frac{r_k^{n+1}}{r^{n+2}} \frac{\partial r_k}{\partial t}$$

Подставляя полученные значения ε_r, ε_θ, τ_x в (6), можно получить

$$\frac{\varepsilon_\theta}{a} = \sqrt{\frac{a}{3}}\left[\frac{n^2}{\tau_{sr}^2} + \frac{n+1}{\tau_{sx}^2}\right]^{-1/2}, \quad \sigma_r' - \sigma_\theta' = -\sqrt{\frac{3}{a}}\left[\frac{n+1}{\tau_{sx}^2} + \frac{n^2}{\tau_{sr}^2}\right]^{-1/2}\frac{n+2}{\tau_{sx}^2} \tag{10}$$

Полученная формула дает в пределах выбранной гипотезы решение задачи проникания. При этом для $\lambda \ll 1$ имеем по (9) при малых β $\tau_{sr} = \tau_{sx}(2 - \lambda)$ и $-n = 2\sin^2\beta/(\sin^2\beta + \lambda/2\cos^2\beta)$. Для $\lambda \gg \beta^2$ $n \sim 0$, $\alpha \gg \beta^2$, $\sigma_r' - \sigma_\theta' = \sqrt{\frac{3}{\alpha}}\frac{2}{\tau_{sx}}$. Вместе с тем, полагая $\lambda \ll \beta^2$, получим $n = -2(1 - \lambda/2\operatorname{ctg}^2\beta)$, $\sigma_r' - \sigma_\theta' = 2\tau_{sx}\operatorname{ctg}\beta$.

Таким образом, не исключено, что при точном решении задачи проникания тела в трансверсально-изотропную среду при $\tau_{sr} = 2\tau_{sx}$ давление на теле будет конечное в то время, как согласно решению [1], полученному по пункту а), на теле $\sigma_r = \infty$ при $\tau_{sr} = 2\tau_{sx}$. Разумеется, зная $\sigma_r' - \sigma_\theta'$ из (10), следует решать уравнение движения

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r' - \sigma_\theta'}{r} = 0$$

где, как и в [1], берется одномерная по r квазистационарная задача и затем решение в области пластичности соединяется с решением в упругой области σ^e.

При этом получится после интеграции

$$\sigma_r = -(\sigma_r' - \sigma_\theta')\ln\frac{r}{r_k\xi_0} + \sigma^e \tag{11}$$

где $r = r_k\xi_0$ есть граница пластической области, постоянная ξ_0 находится подстановкой упругого решения в (4). Таким образом, приближенное решение, найденное согласно (9), устраняет бесконечность в σ_r, полученную по теории [1], где $\varepsilon_x \approx 0$. Однако, для малых β по-прежнему остается в силе вывод о больших значениях при $\tau_{sr} = 2\tau_{sx}$ напряжения.

Для проверки полученного эффекта были проделаны совместно с М. С. Григоряном эксперименты по проникании со скоростью 800 м/сек стальных инденторов массой $\sim 10^{-2}$ кг в композиты, состоящие из ~ 50 слоев чередующихся металлов (алюминий, свинец, дюраль). Толщина

пластинок от 10^{-3} м до $6\cdot10^{-3}$ м. В силу большого количества слоев и периодичности можно считать, что образец однородный и трансверсально изотропный. Слои металлов соединены клеем ГИПК 113. Результаты эксперимента показали хорошее соответствие с теорией. Основной эффект значительного уменьшения глубины проникания в композит по сравнению с цельными образцами из составляющих металлов наблюдался в пределах $1{,}6<\tau_{sr}/\tau_{sx}<3{,}6$. Значение τ_{sr} находилось по Фойхту $\tau_{sr}=\dfrac{h_1\tau_{s1}+h_2\tau_{s2}}{h_1+h_2}$, где индексы 1, 2 относятся к металлам, $h_{1,2}$—толщины пластин, τ_{sx} измерялось для образца опытами на сжатие. При проникании в композит, состоящий из алюминия ($h_1=1{,}6\cdot10^{-3}$ м) и свинца ($h_2=2\cdot10^{-3}$ м) получились глубины проникания, соответственно, в алюминий 10^{-1} м, в свинец более $12\cdot10^{-3}$м, в композит $6\cdot10^{-2}$ м, $\tau_{sr}/2\tau_{sx}=2{,}3$.

THE INVESTIGATION OF PENETRATION OF THIN RIGID BODY IN TRANSVERSAL ISOTROPIC MEDIUM

A. G. BAGDOEV, A. A. VANTCIAN

ՏՐԱՆՍՎԵՐՍԱԼ ԻԶՈՏՐՈՊ ՄԻՋԱՎԱՅՐՈՒՄ ԲԱՐԱԿ ՊԻՆԴ ՄԱՐՄՆԻ ՆԵՐԹԱՓԱՆՑՄԱՆ ԽՆԴՐԻ ՈՒՍՈՒՄՆԱՍԻՐՈՒԹՅՈՒՆԸ

Ա. Գ. ԲԱՂԴՈԵՎ, Ա. Ա. ՎԱՆՑՅԱՆ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Դիտարկվում է տրանսվերսալ իզոտրոպ միջավայրում, որտեղ մարմնի մոտիքում տեղի է ունենում պլաստիկ հոսունություն, բարակ պինդ մարմնի ներթափանցման խնդիրը։ Տրվում է պլաստիկության հարաբերությունների վերլուծությունը գլանային կոորդինատներով և ցույց է տրվում, որ այն միջավայրերի համար, որտեղ հոսունության սահմանը շառավղային ուղղությամբ երկու անգամ մեծ է առանցքայինից, դեֆորմացիաների արագությունները ըստ առանցքի և անկյան՝ համասեռ են, որը հակասում է նախապես ընդունված հարթ կտրվածքների վարկածին։ Ներթափանցման վարքի պարզաբանման համար վերը նշված մեծությունների միջև ընդունված է առնչություն, որից ստացվում են սահմանային դեպքերը։ Գտնված է նորմալ լարումը մարմնի վրա, որը նշված միջավայրի համար բարակ մարմինների դեպքում տալիս է մեծ լարումներ, դա ցույց է տալիս, որ նախկինում կատարած ընդհանուր ենթադրությունները ճիշտ էին։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Багдоев А. Г., Ванцян А. А.* Проникание тонкого тела в упругие анизотропные среды.—Изв. АН АрмССР. Механика, 1983, т. *36*, № 6, с. 23—30.
2. *Багдоев А. Г., Ванцян А. А.* Проникание тонкого тела в металлы и грунты.—Изв. АН АрмССР. Механика, 1981, т. *34*, № 3, с. 25—38.
3. *Хилл Р.* Математическая теория пластичности. М.: Гостехиздат. 1956. 407 с.

Институт механики АН Армянской ССР

Поступила в редакцию
14.II.1986