ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXXIV, № 3, 1981 Механика

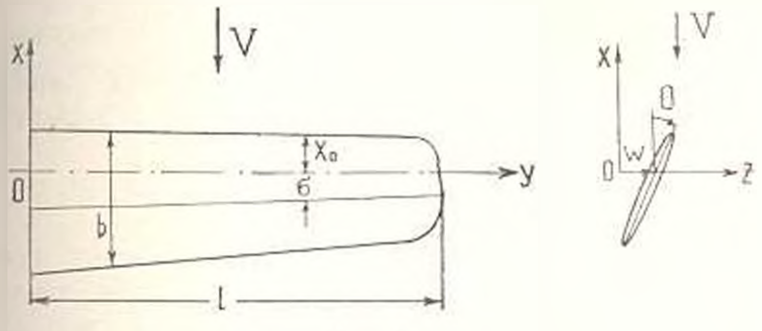
А. П. СЕЙРАНЯН

ВЛИЯНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ МАСС И ЖЕСТКОСТЕЙ НА КРИТИЧЕСКУЮ СКОРОСТЬ ФЛАТТЕРА

Исследуется влияние распределений масс и жесткостей крыла большого удлинения на критическую скорость изгибно-крутильного флаттера в несжимаемом потоке газа. Выведены соотношения, описывающие изменение флаттерных характеристик в зависимости от вариаций масс и жесткостей по размаху крыла. Описан алгоритм перераспределения этих величин с целью повышения критической скорости флаттера. Приведены и проанализированы результаты численных расчетов.

Задачи оптимизации флаттерных характеристик в дискретной постановке рассматривались в работах [1—4].

1. Рассмотрим колебания тонкого крыла в несжимаемом потоке газа. Предполагается, что крыло представляет собой упругую балку тонкостенного сечения с прямой упругой осью Oy, перпендикулярной фюзеляжу (фиг. 1). Ось Oz направлена перпендикулярно вверх к плоскости чертежа. Ось инерции показана на фиг. 1 сплошной линией.



Фиг. 1.

Деформация крыла характеризуется перемещением $w(x, t)$ и углом поворота $\Theta(x, t)$ относительно упругой оси. Уравнения движения крыла в потоке имеют вид [5, 6]

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(EI\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)+m\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}-m\sigma\frac{\partial^2\Theta}{\partial t^2}=L_a$$

$$-\frac{\partial}{\partial y}\left(GJ\frac{\partial\Theta}{\partial y}\right)-m\sigma\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+I_m\frac{\partial^2\Theta}{\partial t^2}=M_a \qquad (1.1)$$

В этих уравнениях EI и GJ — жесткости на изгиб и кручение, m и I_m — масса и массовый момент инерции, приходящиеся на единицу размаха, σ — расстояние между упругой осью и осью инерции, L_a и M_a — соответственно аэродинамические сила и момент относительно упругой оси на единицу размаха.

Для описания аэродинамических сил примем гипотезу стационарности [5, 6], согласно которой аэродинамические характеристики крыла в неустановившемся движении заменяются в каждый момент времени характеристиками того же крыла, движущегося с постоянной линейной и угловой скоростями, равными скоростям действительного движения. Выражения для L_a и M_a записываются в виде

$$L_a = C_y^a \rho V^2 b \left[\theta + \frac{b}{V}\left(\frac{3}{4} - \frac{x_0}{b}\right)\frac{\partial\theta}{\partial t} - \frac{1}{V}\frac{\partial w}{\partial t} \right]$$

$$M_a = C_m^a \rho V^2 b^2 \left[\theta + \frac{b}{V}\left(\frac{3}{4} - \frac{x_0}{b} - \frac{\pi}{16\, C_m^a}\right)\frac{\partial\theta}{\partial t} - \frac{1}{V}\frac{\partial w}{\partial t} \right] \tag{1.2}$$

где b — хорда крыла, x_0 — расстояние от передней кромки до упругой оси, ρ — плотность газа, V — скорость потока. Теоретические значения аэродинамических коэффициентов C_y^a и C_m^a для тонкого крыла бесконечного размаха составляют соответственно $C_y^a = \pi$, $C_m^a = \pi(x_0/b - 0.25)$. Граничные условия для w и θ имеют вид

$$w = \frac{\partial w}{\partial y} = \theta = 0 \quad \text{при} \quad y = 0 \tag{1.3}$$

$$EI\,\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(EI\,\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) = GJ\,\frac{\partial\theta}{\partial y} = 0 \quad \text{при} \quad y = l$$

Система уравнений (1.1)—(1.3) представляет собой линейную однородную краевую задачу. Решение уравнений (1.1)—(1.3) будем искать в виде

$$w(y,\ t) = u(y)\, e^{\lambda t}, \quad \theta(y,\ t) = v(y)\, e^{\lambda t} \tag{1.4}$$

где λ — собственное значение, $u(y)$, $v(y)$ — собственные функции. В силу неконсервативности задачи λ, $u(y)$, $v(y)$ — вообще говоря, комплексные величины, $\lambda = q + i\omega$, $u(y) = u_1(y) + iu_2(y)$, $v(y) = v_1(y) + iv_2(y)$, i — мнимая единица. В зависимости от скорости потока V амплитуда колебаний может убывать с течением времени ($\operatorname{Re}\lambda < 0$, устойчивость), либо возрастать ($\operatorname{Re}\lambda > 0$, неустойчивость). Различают два типа потери устойчивости: колебательный тип (флаттер) и апериодический (дивергенция) [7]. Критическая скорость флаттера V_f характеризуется соотношениями $\operatorname{Re}\lambda = 0$, $\operatorname{Im}\lambda = \omega \neq 0$, где ω — частота флаттера, а критическая скорость дивергенции V_d — равенством $\lambda = 0$.

Запишем уравнения движения крыла при флаттере. Для этого в (1.4) положим $\lambda = i\omega$. Подставим затем выражения (1.4) в (1.1)—(1.3) и используем в них $V = V_f$. В результате придем к системе уравнений для собственных функций $u(y)$, $v(y)$. Искомыми величинами также являются критическая скорость флаттера V_f и частота флаттера ω

$$Lf=\begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}=0 \tag{1.5}$$

где L_{ij} — линейные дифференциальные операторы вида

$$L_{11}=\frac{d^2}{dy^2}\left(EI\frac{d^2}{dy^2}\right)-m\omega^2+i\omega C_y^\alpha \rho V_f b$$

$$L_{12}=m\sigma\omega^2-C_y^\alpha \rho V_f^2 b-i\omega C_y^\alpha \rho V_f\left(\frac{3}{4}-\frac{x_0}{b}\right)b^2 \tag{1.6}$$

$$L_{21}=m\sigma\omega^2+i\omega C_m^\alpha \rho V_f b^2$$

$$L_{22}=-\frac{d}{dy}\left(GJ\frac{d}{dy}\right)-I_m\omega^2-C_m^\alpha \rho V_f^2 b^3-$$

$$-C_m^\alpha \rho V_f b^3\left(\frac{3}{4}-\frac{x_0}{b}-\frac{\pi}{16C_m^\alpha}\right)i\omega$$

Граничные условия для функций u и v следуют из условий (1.3)

$$u=\frac{du}{dy}=v=0 \quad \text{при } y=0$$

$$EI\frac{d^2u}{dy^2}=\frac{d}{dy}\left(EI\frac{d^2u}{dy^2}\right)=GJ\frac{dv}{dy}=0 \quad \text{при } y=l \tag{1.7}$$

Рассмотрим теперь задачу о дивергенции крыла в потоке газа. Для этого в выражениях (1.4)—(1.6) положим $\lambda=0$. В результате придем к самосопряженной и положительно определенной задаче на собственные значения [9]

$$\frac{d}{dy}\left(GJ\frac{dv_d}{dy}\right)+C_m^\alpha \rho V_d^2 b^2 v_d=0 \tag{1.8}$$

$$v_d(0)=0, \quad \left(GJ\frac{dv_d}{dy}\right)_{y=l}=0$$

Здесь через $v_d(y)$ обозначена собственная функция дивергенции. Критическая скорость дивергенции V_d определяется наименьшим собственным значением задачи (1.8).

Введем управляющую функцию $h(y)$. Предположим, что сечение крыла плоскостью $y=\mathrm{const}$ представляет собой тонкостенный замкнутый профиль произвольного вида. Если изменить толщины всех силовых элементов профиля в h раз, то жесткостные и массовые характеристики этого сечения EI, GJ, I_m, m также изменятся в h раз, а величины σ, x_0 останутся неизменными. Поэтому можно положить

$$EI(y)=EI_0(y)\,h(y),\quad GJ(y)=GJ_0(y)\,h(y)$$

$$I_m(y)=I_{m_0}(y)\,h(y),\quad m(y)=m_0(y)\,h(y) \tag{1.9}$$

где EI_0, GJ_0, I_{m_0}, m_0 — некоторые фиксированные начальные распределения массовых и жесткостных характеристик.

Функция $h(y)$ будет служить безразмерной управляющей функцией. По смыслу $h(y) \geqslant 0$. Варьирование ею приводит к перераспределению масс и жесткостей и, следовательно, к изменению критических скоростей флаттера и дивергенции.

Наша цель состоит в исследовании влияния различных распределений $h(y)$ на критическую скорость флаттера, а также в том, чтобы целенаправленным изменением $h(y)$ добиться увеличения критической скорости потери устойчивости, сохраняя полную массу крыла неизменной.

2. Вычислим приращение критической скорости флаттера в зависимости от вариации δh.

Введем в рассмотрение сопряженную [8] к (1.5), (1.7) задачу о флаттере, которая потребуется в дальнейшем

$$L^T p = \begin{pmatrix} L_{11} & L_{21} \\ L_{12} & L_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix} = 0 \tag{2.1}$$

Операторы L_{ij} определяются выражениями (1.6). Функции $\varphi(y)$ и $\psi(y)$ — комплексные величины $\varphi = \varphi_1 + i\varphi_2$, $\psi = \psi_1 + i\psi_2$. Граничные условия для них имеют вид

$$\varphi = \frac{d\varphi}{dy} = \psi = 0 \quad \text{при} \quad y = 0$$

$$EI\frac{d^2\varphi}{dy^2} = \frac{d}{dy}\left(EI\frac{d^2\varphi}{dy^2}\right) = GJ\frac{d\psi}{dy} = 0 \quad \text{при} \quad y = l \tag{2.2}$$

В силу сопряженности краевых задач можно показать, что критическая скорость и частота в задачах (1.5), (1.7) и (2.1), (2.2) совпадают. Эти задачи линейны и однородны относительно вектор-функций f и p, поэтому f и p определены с точностью до произвольного комплексного множителя.

Перейдем к вычислению вариаций. Для этого вернемся к задаче о флаттере (1.5), (1.7) с учетом (1.9). Вариация $\delta h(y)$ приводит к приращениям величин V_f, ω и комплексной вектор-функции $f(y)$. Приращения $\delta h(y)$, δV_f, $\delta\omega$ — действительные величины, вариация комплексной функции $\delta f(y)$ имеет вид

$$\delta f(y) = \begin{pmatrix} \delta u_1(y) + i\delta u_2(y) \\ \delta v_1(y) + i\delta v_2(y) \end{pmatrix}$$

Запишем для задачи (1.5), (1.7) уравнения в вариациях

$$K(\delta h) f + L_{V_f} f \delta V_f + L_\omega f \delta\omega + L\delta f = 0$$

$$\delta u = \frac{d}{dy}\delta u = \delta v = 0 \quad \text{при} \quad y = 0 \tag{2.3}$$

$$EI_0\delta h\frac{d^2u}{dy^2}+EI\frac{d^2\delta u}{dy^2}=\frac{d}{dy}\left(EI_0\delta h\frac{d^2u}{dy^2}+EI\frac{d^2\delta u}{dy^2}\right)=$$

$$=GJ_0\delta h\frac{dv}{dy}+GJ\frac{d}{dy}\delta v=0 \quad \text{при} \quad y=l$$

где матрицы L_{V_f} и L_ω получаются из матрицы L, см. (1.5), (1.6), формальным дифференцированием по параметрам V_f и ω соответственно, а матричный оператор $K(\delta h)$ имеет вид

$$K(\delta h)=\begin{pmatrix}\dfrac{d^2}{dy^2}\left(EI_0\delta h\dfrac{d^2}{dy^2}\right)-m_0\omega^2\delta h, & m_0\sigma\omega^2\delta h\\ m_0\sigma\omega^2\delta h, & -\dfrac{d}{dy}\left(GJ_0\delta h\dfrac{d}{dy}\right)-I_{m_0}\omega^2\delta h\end{pmatrix} \tag{2.4}$$

Умножим уравнение (2.3) слева на вектор-функцию строку $p^T(y)=(\varphi(y),\ \psi(y))$, где p является решением сопряженной задачи (2.1), (2.2) и результат проинтегрируем от 0 до l

$$\int_0^l[p^TK(\delta h)f+(p^TL_{V_f}f)\delta V_f+(p^TL_\omega f)\delta\omega+p^TL\delta f]\,dy=0 \tag{2.5}$$

Интегрируя далее по частям и учитывая граничные условия (2.2), (2.4), можно убедиться в том, что

$$\int_0^l(p^TL\delta f)\,dy=\int_0^l(\delta fL^Tp)\,dy=0$$

(последнее равенство справедливо в силу (2.1)), а первый член в (2.5) приводится к виду

$$\int_0^l p^TK(\delta h)f\,dy=\int_0^l H\,\delta h\,dy$$

$$H=EI_0\frac{d^2u}{dy^2}\frac{d^2\varphi}{dy^2}+GJ_0\frac{dv}{dy}\frac{d\psi}{dy}+\omega^2p^T\begin{pmatrix}-m_0 & m_0\sigma\\ m_0\sigma, & -I_{m_0}\end{pmatrix}f \tag{2.6}$$

Введем также обозначения

$$A=\int_0^l(p^TL_{V_f}f)\,dy,\quad B=\int_0^l(p^TL_\omega f)\,dy \tag{2.7}$$

В результате (2.5) примет вид

$$\int_0^l H\delta h\,dy+A\delta V_f+B\delta\omega=0 \tag{2.8}$$

Отметим, что функция H представляет собой комплексную функцию действительного переменного y, а константы A и B — комплексные числа. Умножим (2.8) на комплексно сопряженную к B величину $\overline{B}$ и от результата возьмем мнимую часть. В силу того, что $\operatorname{Im}(B\overline{B}) = 0$ и δV_f, $\delta\omega$ — действительные величины, приходим к выражению для вариации

$$\delta V_f = \int_0^l g\,\delta h\,dy, \quad g = -\frac{\operatorname{Im}(H\overline{B})}{\operatorname{Im}(A\overline{B})} \tag{2.9}$$

Таким образом, функция g является градиентом функционала критической скорости флаттера по управляющей функции h.

Аналогично из (2.8) можно найти также вариацию частоты флаттера

$$\delta\omega = \int_0^l e\,\delta h\,dy, \quad e = -\frac{\operatorname{Im}(H\overline{A})}{\operatorname{Im}(B\overline{A})} \tag{2.10}$$

Таким образом, для определения градиентов g и e следует решить прямую и сопряженную задачи о флаттере (1.5), (1.7); (2.1), (2.2) и определить комплексные вектор-функции $f(y)$, $p(y)$ и значения V_f и ω. По ним согласно (2.6), (2.7) следует вычислить комплексные константы A и B и функцию H, а затем из (2.9), (2.10) найти градиенты g и e.

Описанный в этом параграфе способ вычисления градиентов от флаттерных характеристик по управляющей функции $h(y)$ можно использовать при вычислении градиентов по любым другим независимым функциям или параметрам задачи. Знание градиента от критической скорости флаттера по различным распределениям и параметрам позволяет рациональным образом улучшить флаттерные характеристики конструкции.

3. Выведем необходимые условия максимума критической скорости флаттера при заданной полной массе материала, из которого изготовлено крыло.

Ограничение на полную массу характеризуется постоянством интеграла

$$M = \int_0^l h(y)\,m_0(y)\,dy = \int_0^l m_0(y)\,dy \tag{3.1}$$

Градиент функционала M по h равен m_0. Рассмотрим дополнительное ограничение на управляющую функцию $h(y)$

$$h_{\min} \leqslant h(y) \leqslant h_{\max} \tag{3.2}$$

С учетом выражения для градиента критической скорости флаттера (2.9) и условия (3.1) запишем первую вариацию

$$\delta V_f = \int_0^l (g(y) + \mu m_0(y))\,\delta h(y)\,dy \tag{3.3}$$

Здесь μ — неизвестный множитель Лагранжа.

Если функция $h_0(y)$ такова, что функционал V_f достигает своего максимума, то $\delta V_f \leqslant 0$ на произвольных вариациях δh, удовлетворяющих ограничению (3.2). Отсюда с использованием выражения (3.3) получим необходимые условия локального максимума функционала V_f при ограничениях (3.1), (3.2)

$$
\begin{array}{ll}
g(y) + \mu m_0(y) > 0 & h_0(y) = h_{\max} \\
g(y) + \mu m_0(y) = 0 & h_{\min} < h_0(y) < h_{\max} \\
g(y) + \mu m_0(y) < 0 & h_0(y) = h_{\min}
\end{array}
\qquad (3.4)
$$

где множитель μ определяется изопериметрическим условием (3.1).

Основываясь на необходимых условиях экстремума, запишем итерационную формулу

$$h^{(n+1)} = h^{(n)} + \delta h^{(n)}, \quad \delta h^{(n)} = \alpha^{(n)}[g^{(n)}(y) + \mu^{(n)} m_0(y)] \qquad (3.5)$$

где верхний индекс в скобках (n) означает номер итерации; $\alpha^{(n)}$ — шаг по градиенту, выбираемый вычислителем,

$$\alpha^{(n)} > 0; \quad \mu^{(n)} = -\int_{\Omega^{(n)}} m_0 g^{(n)}\, dy \Big/ \int_{\Omega^{(n)}} m_0^2\, dy,$$

$\Omega^{(n)}$ — область, в которой $h_{\min} < h^{(n)} < h_{\max}$, $\Omega^{(n)} \subset [0, l]$. Начальную функцию $h^{(0)}(y)$ следует выбирать удовлетворяющей ограничениям (3.1), (3.2). После выполнения очередной итерации по формуле (3.5) проверяется ограничение (3.2) и в случае его нарушения функция $\delta h^{(n)}$ исправляется на допустимую следующим образом:

$$
\begin{array}{lcl}
\delta h^{(n)} > h_{\max} - h^{(n)} & & \delta h^{(n)} = h_{\max} - h^{(n)} \\
 & \text{, то} & \\
\delta h^{(n)} < h_{\min} - h^{(n)} & & \delta h^{(n)} = h_{\min} - h^{(n)}
\end{array}
\qquad (3.6)
$$

если

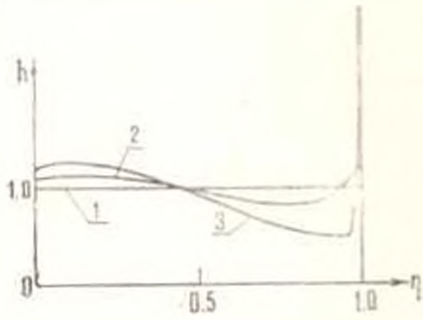
Из соотношений (3.3), (3.5) следует, что при отсутствии ограничения (3.2) на каждом шаге итерационной процедуры выполняется условие (3.1), и критическая скорость флаттера возрастает $\delta V_f \geqslant 0$. Можно показать, что это утверждение остается справедливым и при наличии ограничения (3.2).

На каждом шаге градиентной процедуры по h для вычисления следующего приближения следует решать прямую и сопряженную задачу о флаттере. Решение задачи о флаттере (1.5), (1.7) в данной работе осуществлялось методом последовательных приближений, изложенным в [5]. Решение сопряженной задачи о флаттере (2.1), (2.2) также осуществлялось методом последовательных приближений по аналогичной программе. Получающиеся в прямой и сопряженной задаче значения V_f и ω сравнивались, что являлось одним из признаков верной работы алгоритма решения флаттерной задачи.

Кроме задачи о флаттере, на каждом шаге градиентной процедуры решалась задача о дивергенции (1.8). Решение этой задачи осуществлялось методом последовательных приближений, изложенным в [9]. В результате определялась критическая скорость дивергенции V_d.

Опишем весь ход вычислительного процесса: 1) задается приближение $h^{(n)}(y)$, удовлетворяющее ограничениям (3.1), (3.2); 2) решаются прямая и сопряженная задачи о флаттере (1.5), (1.7), (2.1), (2.2) и находятся функции $u^{(n)}$, $v^{(n)}$, $\varphi^{(n)}$, $\psi^{(n)}$, их производные и значения $V_f^{(n)}$ и $\omega^{(n)}$; 3) вычисляются величины $H^{(n)}(y)$, $A^{(n)}$, $B^{(n)}$ согласно (2.6), (2.7) и находится градиент $g^{(n)}(y)$; 4) определяется область $\Omega^{(n)}$, находится константа $\mu^{(n)}$ и вычисляется вариация $\delta h^{(n)}(y)$ согласно (3.5), (3.6), определяется $h^{(n+1)}(y)$ и т. д.

4. В качестве примера рассматривалось прямоугольное крыло с постоянными по размаху характеристиками. Исходные данные EI_0, GJ_0, I_{m0}, m_0, b, l, σ, x_0, C_y^α, C_m брались из [5], крыло № 3. Значение плотности газа при расчетах полагалось равным $\rho = 0.125$ кг/м³. Для удобства расчетов вводилась безразмерная переменная $\eta = y/l$. Отрезок [0, 1] разбивался на $N = 20$, 40 равных промежутков, численное интегрирование осуществлялось методом трапеций. В ограничении (3.2) полагалось $h_{min} = 0$, $h_{max} = 4.5$. Изопериметрическое условие (3.1) ввиду постоянства m_0 принимает вид



Фиг. 2

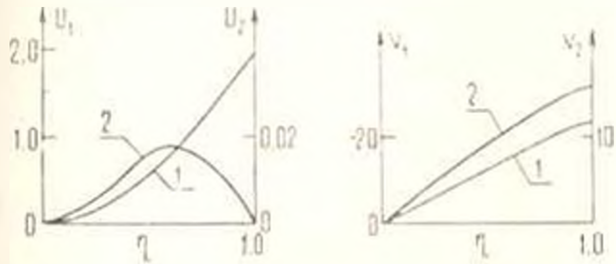
$$\int_0^1 h(\eta)\, d\eta = 1.$$

В качестве начального приближения возьмем функцию $h^{(0)}(\eta) = 1$. На фиг. 2 цифрами 1, 2, 3 показано поведение распределений $h(\eta)$ в зависимости от возрастающего числа итераций. Остановка итерационного процесса (3.5), (3.6) производилась при выполнении необходимых условий локального максимума (3.4) с точностью до $\varepsilon = 10^{-3}$.

Функция $h_*(\eta)$, реализующая максимум критической скорости флаттера, отмечена на фиг. 2 цифрой 3. Функция $h_*(\eta)$ независимо от параметра h_{max} выходит на верхнее ограничение при $\eta \to 1$. Физически это означает, что для повышения скорости флаттера на свободном конце крыла следует сосредоточить массу.

Критическая скорость флаттера со значения $V_f = 29.4$ м/сек, соответствующего начальному приближению $h^{(0)}(\eta) = 1$, повышается до величины $V_f = 30.9$ м/сек для распределения $h_*(\eta)$. При этом частота флаттера ω изменяется от начального значения 107.1 сек$^{-1}$ до 112.4 сек$^{-1}$. Таким образом, выигрыш в критической скорости флаттера невелик, он составляет $\approx 5\%$. Отметим, что критическая скорость дивергенции для распределений $h(\eta)$, представленных на фиг. 2, значительно превышает соответствующую скорость флаттера.

Собственные функции $u(\eta) = u_1(\eta) + iu_2(\eta)$, $v(\eta) = v_1(\eta) + iv_2(\eta)$, соответствующие распределению $h_*(\eta)$, представлены на фиг. 3. Эти функции определены с точностью до произвольного комплексного множителя. В работе была использована следующая нормировка собственных функций u и v: $u(1) = 2$. Отметим, что в ходе итерации характер этих кривых не изменялся.



Фиг. 3.

К распределению $h_*(\eta)$, описанному выше, можно придти, начиная итерационный процесс не только с функции $h^{(0)}(\eta) = 1$, но и с других начальных приближений, например, с $h^{(0)}(\eta) = 1.95 - 1.9\,\eta$ и пр.

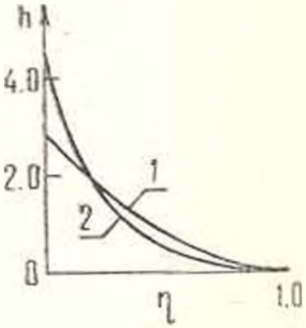
Однако оказывается, что функция $h_*(\eta)$ реализует лишь локальный максимум функционала критической скорости флаттера при заданной полной массе. Так начальное приближение $h_1(\eta) = 2.7\,(1-\eta)^2 + 0.1$, помеченное на фиг. 4 цифрой 1, хотя и приводит к небольшому значению критической скорости $V_f = 29.1$ *м/сек* ($V_d = 57.5$ *м/сек*), однако градиент функционала $g_1(\eta)$ при этом распределении оказывается большим по абсолютной величине (фиг. 5).

Отметим, что функция $g_1(\eta)$ в отличие от градиентов в случае распределений, представленных на фиг. 2, на отрезке $[0, 1]$ меняет знак. Из рассмотрения фиг. 5 следует, что особенно чувствительным к вариациям распределений $h(\eta)$ оказывается свободный конец крыла ($\eta \to 1$). Незначительное уменьшение материала в этой области может привести к заметному повышению значений V_f.

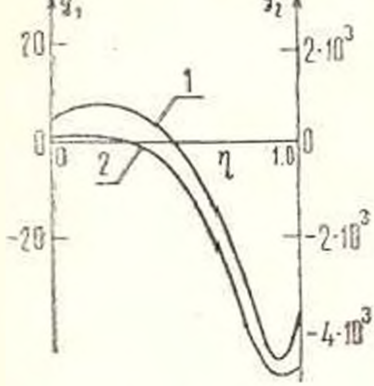
Из того, что градиент $g_1(\eta)$ принимает на отрезке $[0, 1]$ отрицательные значения, следует вывод о том, что функционал V_f можно повышать, уменьшая при этом полную массу крыла. Таким образом, существуют распределения $h(\eta)$, для которых уменьшение веса не противоречит повышению критической скорости флаттера.

Несколько итераций с малым шагом от распределения $h_1(\eta)$ приводят к значительному повышению критической скорости флаттера. Распределение $h_2(\eta)$, отмеченное цифрой 2 на фиг. 4, обладает значением $V_f = 48.3$ *м/сек.*, однако при этом оказывается $V_d = 48.0$ *м/сек* $< V_f$. Поэтому конструкция крыла с таким распределением материала теряет устойчивость по дивергенции. Выигрыш в критической скорости потери устойчивости по сравнению с исходным вариантом составляет $\approx 63\%$.

Интересно отметить, что в ходе итерационного процесса от распределения $h_1(\eta)$ и $h_2(\eta)$ характер колебаний при флаттере существенно изменяется. На формах колебаний $u(\eta)$, $v(\eta)$ появляются узлы. Частота флаттера при этом возрастает от значения $\omega_1 = 224.5$ сек$^{-1}$ до величины $\omega_2 = 262.0$ сек$^{-1}$.



Фиг. 4.



Фиг. 5.

Институт проблем
механики АН СССР

Поступила 23 IV 1980

Ա. Պ. ՍԵՅՐԱՆՅԱՆ

ԶԱՆԳՎԱԾՆԵՐԻ ԵՎ ԿՈՇՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԲԱՇԽՈՒՄՆԵՐԻ ԱԶԴԵՑՈՒԹՅՈՒՆԸ ՖԼԱՏԵՐԻ ԿՐԻՏԻԿԱԿԱՆ ԱՐԱԳՈՒԹՅԱՆ ՎՐԱ

Ամփոփում

Ուսումնասիրվում է զանգվածների և կոշտությունների բաշխումների ազդեցությունը չսեղմվող գազի հոսքում թևի ծռման-ոլորման ֆլատերի կրիտիկական արագության վրա։ Ստացվել են արտահայտություններ ֆլատերի կրիտիկական արագության գրադիենտների և ըստ թևի բացվածքի զանգվածների և կոշտությունների բաշխումների ֆլատերի ժամանակ տատանումների հաճախականության համար։ Նկարագրված է այդ մեծությունների վերաբաշխման ալգորիթմը ֆլատերի կրիտիկական արագության մեծացման նպատակով, երբ սահմանափակվում է թևի լրիվ զանգվածը։ Բերվում են և վերլուծվում թվային հաշվումների արդյունքները։

INFLUENCE OF MASS AND STIFFNESS DISTRIBUTIONS ON FLUTTER VELOCITY

A. P. SEYRANIAN

Summary

Influence of spanwise mass and stiffness distributions of a wing in incompressible gas flow on the bending—torsional flutter velocity is investigated. The gradients of flutter velocity and flutter frequency are obtained. The algorithm for redistribution of these values is proposed to increase the critical velocity of flutter with the constraints on the total weight of a wing. Numerical results are presented and discussed.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Буньков В. Г.* Расчет оптимальных флаттерных характеристик методом градиента. Тр. ЦАГИ, 1969, № 1166.
2. *Бирюк В. И.* О задаче оптимального проектирования конструкции крыла из условий прочности и аэроупругости. Ученые записки ЦАГИ, 1972, № 4.
3. *Haftka R. T., Starnes J. H. Jr., Barton F. W., Dixon S. C.* Comparison of two types of structural optimization procedures for flutter requirements. AIAA J. 1975, vol. 13, № 10.
4. *McIntosh S. C. Jr., Ashley H.* On the optimization of discrete structures with aeroelastic constraints. Computers and Structures, 1978, vol. 8, № 3/4.
5. *Гроссман Е. П.* Флаттер. Тр. ЦАГИ, 1937, № 284.
6. *Фын Я. Ц.* Введение в теорию аэроупругости. М., Физматгиз, 1959.
7. *Болотин В. В.* Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М., Физматгиз, 1961.
8. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М., «Наука», 1976.
9. *Коллатц Л.* Задачи на собственные значения. М., «Мир», 1969.