

А. А. БАБЛОЯН, Н. О. ГУАКАНЯН

## ОБ ОДНОЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ПРЯМОУГОЛЬНИКА

Решается плоская задача для прямоугольника, когда на всех прямолинейных участках граничные условия заданы в смешанном виде.

Плоская задача для прямоугольника ранее рассматривалась в работах Абрамина В. А. [1, 2]. В работе [1] дано точное решение указанной задачи при произвольном симметричном нагружении границ прямоугольника нормальными и тангенциальными напряжениями. В работе [2] решена та же задача при несимметричных граничных условиях, заданных в напряжениях.

Минасяном Р. С. [3] было дано решение уравнения Лапласа для прямоугольника, когда на одном участке границы краевые условия заданы в смешанном виде. Задача сведена к решению вполне регулярной бескопечной системы линейных уравнений.

Аналогичные задачи были также рассмотрены в других работах Минасяна Р. С. [4—5].

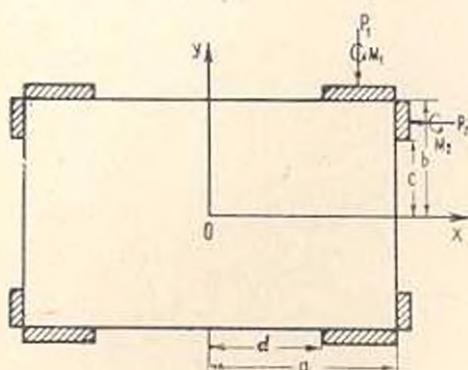
Насколько нам известно, плоская задача теории упругости для прямоугольника, когда краевые условия на всех участках границы заданы в смешанном виде, рассматривается впервые.

Принято, что по всему контуру заданы касательные напряжения. Для простоты выкладок также принято, что имеются две оси симметрии.

**§ 1. Постановка задачи.** Рассмотрим плоскую задачу для прямоугольника, сжимаемого по всем кромкам двумя одинаковыми симметрично расположенными у краев жесткими штампами. Длины штампов, приложенных на противоположных кромках, одинаковы, а на смежных — разные (фиг. 1).

Предполагается, что внешние нагрузки, приложенные как к штампам, так и к участкам контура прямоугольника вне штампов, симметричны относительно главных осей прямоугольника.

На границе области для рассматриваемой задачи должны удовлетворяться следующие граничные условия:



Фиг. 1.

$$\begin{aligned} \tau_{xy}(a, y) = 0 \quad (0 < y < b) & \quad \tau_{xy}(x, b) = 0 \quad (0 \leq x < a) \\ \tau_x(a, y) = f_1(y) \quad (0 < y < c) & \quad \tau_y(x, b) = f_3(x) \quad (0 \leq x < d) \\ u(a, y) = f_2(y) \quad (c < y \leq b) & \quad v(x, b) = f_4(x) \quad (d < x < a) \end{aligned} \quad (1.1)$$

На осях симметрии должны удовлетворяться условия симметрии

$$\begin{aligned} v(x, 0) = \tau_{xy}(x, 0) = 0 \\ u(0, y) = \tau_{xy}(0, y) = 0 \end{aligned} \quad (1.2)$$

Напряжения и перемещения определяются через бигармоническую функцию Эри по следующим формулам:

$$\tau_x = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}, \quad \tau_y = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \quad (1.3)$$

$$\begin{aligned} Eu = \int \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} dx - \nu \frac{\partial \Phi}{\partial x} - e_0 x + f_0 \\ Ev = \int \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} dy - \nu \frac{\partial \Phi}{\partial y} + e_0 y + g_0 \end{aligned} \quad (1.4)$$

В силу симметрии задачи функцию напряжений Эри ищем в виде

$$\begin{aligned} \Phi(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} [B_k \operatorname{ch} \alpha_k y + C_k \alpha_k y \operatorname{sh} \alpha_k y] \cos \alpha_k x + \\ + \sum_{k=1}^{\infty} [F_k \operatorname{ch} \beta_k x + G_k \beta_k x \operatorname{sh} \beta_k x] \cos \beta_k y + C_1 x^2 + C_2 y^2 \end{aligned} \quad (1.5)$$

где

$$\alpha_k = \frac{k\pi}{a}, \quad \beta_k = \frac{k\pi}{b} \quad (1.6)$$

При выборе функции  $\Phi(x, y)$  в виде (1.5) и  $e_0 = g_0 = f_0 = 0$  условия симметрии (1.2) будут удовлетворяться автоматически.

Удовлетворяя условиям равенства нулю тангенциальных напряжений на краях прямоугольника, между коэффициентами  $F_k$ ,  $G_k$ ,  $B_k$  и  $C_k$  получим соотношения

$$\begin{aligned} B_k = -C_k(1 + \alpha_k b \operatorname{cth} \alpha_k b) \\ F_k = -G_k(1 + \beta_k a \operatorname{cth} \beta_k a) \end{aligned} \quad (1.7)$$

Удовлетворяя затем смешанным граничным условиям на краях прямоугольника, учитывая (1.7) и отображая одномерные области  $(0 \leq x \leq a)$  и  $(0 \leq y \leq b)$  на область  $(0 \leq z \leq \pi)$ , получим следующую систему парных тригонометрических уравнений:

$$X_0 - \sum_{k=1}^{\infty} X_k \cos kz = \frac{b^2}{a^2} \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^{p+1} Y_p (1 - M_p) \left[ \frac{\operatorname{ch} p \frac{b}{a} z}{\operatorname{sh} \alpha_p b} - \right. \\ \left. - \alpha_p b \frac{\operatorname{ch} p \frac{b}{a} (\pi - z)}{\operatorname{sh}^2 \alpha_p b} - p \frac{b}{a} (\pi - z) \frac{\operatorname{sh} p \frac{b}{a} z}{\operatorname{sh} \alpha_p b} \right] + F_1(z) \quad (0 \leq z < z_1)$$

$$\gamma_1 X_0 + \sum_{k=1}^{\infty} k^{-1} X_k (1 - N_k) \cos kz = \gamma_2 Y_0 + F_2(z) \quad (z_1 < z \leq \pi) \quad (1.8)$$

$$Y_0 - \sum_{k=1}^{\infty} Y_k \cos kz = \frac{a^2}{b^2} \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^{p+1} X_p (1 - N_p) \left[ \frac{\operatorname{ch} p \frac{a}{b} z}{\operatorname{sh} \beta_p a} - \right. \\ \left. - \beta_p a \frac{\operatorname{ch} p \frac{a}{b} (\pi - z)}{\operatorname{sh}^2 \beta_p a} - p \frac{a}{b} (\pi - z) \frac{\operatorname{sh} p \frac{a}{b} z}{\operatorname{sh} \beta_p a} \right] + F_3(z) \quad (0 \leq z < z_2)$$

$$\gamma_2 Y_0 + \sum_{k=1}^{\infty} k^{-1} Y_k (1 - M_k) \cos kz = \gamma_1 X_0 + F_4(z) \quad (z_2 < z \leq \pi) \quad (1.9)$$

Здесь введены обозначения

$$X_k = k^2 C_k \left[ \operatorname{ch} \beta_k a + \frac{\beta_k a}{\operatorname{sh} \beta_k a} \right] \\ Y_k = k^2 C_k \left[ \operatorname{ch} \alpha_k b + \frac{\alpha_k b}{\operatorname{sh} \alpha_k b} \right] \\ X_0 = 2 \frac{b^2}{\pi^2} C_{\infty}, \quad Y_0 = 2 \frac{a^2}{\pi^2} C_1 \quad (1.10)$$

$$N_k = \frac{2\beta_k a + 1 - e^{-2\beta_k a}}{\operatorname{sh} 2\beta_k a + 2\beta_k a}, \quad M_k = \frac{2\alpha_k b + 1 - e^{-2\alpha_k b}}{\operatorname{sh} 2\alpha_k b + 2\alpha_k b}$$

$$F_1(z) = \frac{b^2}{\pi^2} f_1\left(\frac{zb}{\pi}\right), \quad F_2(z) = E \frac{b}{2\pi} f_2\left(\frac{zb}{\pi}\right)$$

$$F_3(z) = \frac{a^2}{\pi^2} f_3\left(\frac{za}{\pi}\right), \quad F_4(z) = E \frac{a}{2\pi} f_4\left(\frac{za}{\pi}\right)$$

$$z_1 = \frac{\pi c}{b}, \quad z_2 = \frac{\pi d}{a}, \quad \gamma_1 = \frac{\pi}{2} \frac{a}{b}, \quad \gamma_2 = \frac{\pi}{2} \frac{b}{a} \quad (1.11)$$

Считая правые части парных уравнений (1.8) и (1.9) известными и пользуясь решением такого рода тригонометрических парных уравнений [6, 7], приведем (1.8) и (1.9) к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} X_k &= \sum_{p=1}^{\infty} a_{kp}^{(1)} X_p + \sum_{p=1}^{\infty} b_{kp}^{(1)} Y_p + \gamma_k^{(1)} \\ Y_k &= \sum_{p=1}^{\infty} a_{kp}^{(2)} Y_p + \sum_{p=1}^{\infty} b_{kp}^{(2)} X_p + \gamma_k^{(2)} \quad (k=1, 2, \dots) \end{aligned} \quad (1.12)$$

Коэффициенты при неизвестных бесконечной системы (1.12) определяются по формулам

$$\begin{aligned} a_{kp}^{(1)} &= \frac{k}{2} N_p I_{k,p}(z_1), & a_{kp}^{(2)} &= \frac{k}{2} M_p I_{k,p}(z_2) \\ b_{kp}^{(1)} &= \frac{1}{2} \frac{b^p}{a^2} k (-1)^{p-1} \frac{1-M_p}{\operatorname{sh} z_p b} \left| (1 - \beta_p b \operatorname{cth} z_p b) J_{k,p \frac{a}{b}}(z_1) + \right. \\ & & & \left. + \frac{p b}{a} K_{k,p \frac{a}{b}}(z_1) \right| \\ b_{kp}^{(2)} &= \frac{1}{2} \frac{a^2}{b^2} k (-1)^{p-1} \frac{1-N_p}{\operatorname{sh} \beta_p a} \left| (1 - \beta_p a \operatorname{cth} \beta_p a) J_{k,p \frac{a}{b}}(z_2) + \right. \\ & & & \left. + p \frac{a}{b} K_{k,p \frac{a}{b}}(z_2) \right| \end{aligned} \quad (1.13)$$

а свободные члены — выражениями

$$\begin{aligned} \gamma_k^{(1)} &= \frac{k}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} y_k(\cos \theta) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} F_1'(\theta) d\theta + \\ & + \frac{k}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} y_k(\cos \theta) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} F_2'(\theta) d\theta - X_0 z_1(\cos z_1) \\ \gamma_k^{(2)} &= \frac{k}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} y_k(\cos \theta) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} F_3'(\theta) d\theta + \\ & + \frac{k}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} y_k(\cos \theta) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} F_4'(\theta) d\theta - Y_0 z_2(\cos z_2) \end{aligned} \quad (1.14)$$

Здесь функции  $F_i^*(\theta)$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) имеют вид

$$\begin{aligned}
 F_1^*(\theta) &= \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos \frac{z}{2}}{(\cos z - \cos \theta)^{1/2}} F_1(z) dz \\
 F_2^*(\theta) &= -\frac{2\sqrt{2}}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos \frac{z}{2}}{(\cos \theta - \cos z)^{1/2}} F_2(z) dz \\
 F_3^*(\theta) &= \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos \frac{z}{2}}{(\cos z - \cos \theta)^{1/2}} F_3(z) dz \\
 F_4^*(\theta) &= -\frac{2\sqrt{2}}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos \frac{z}{2}}{(\cos \theta - \cos z)^{1/2}} F_4(z) dz
 \end{aligned} \tag{1.15}$$

В формулах (1.13)—(1.14) введены обозначения:

$$\begin{aligned}
 I_{k,p}(z) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} y_k(\cos \theta) y_p(\cos \theta) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} d\theta \\
 J_{k,l}(z) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} y_k(\cos \theta) Y_l(\cos \theta) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} d\theta \\
 K_{k,l}(z) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} y_k(\cos \theta) V_l(\cos \theta) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} d\theta
 \end{aligned} \tag{1.16}$$

$$\begin{aligned}
 Y_p(\cos \theta) &= \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{ch} px \cos \frac{x}{2}}{(\cos x - \cos \theta)^{1/2}} dx \\
 V_p(\cos \theta) &= \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x \operatorname{sh} px \cos \frac{x}{2}}{(\cos x - \cos \theta)^{1/2}} dx
 \end{aligned} \tag{1.17}$$

Функции  $y_k(\cos \theta)$  и  $z_k(\cos \theta)$  представляют собой соответственно сумму и разность полиномов Лежандра. Рекуррентные и интегральные соотношения для этих функций приводятся в работе [6].

§2. Исследование функций  $Y_n(x)$  и  $V_n(x)$ . Отметим, что с функциями  $Y_n(x)$  и  $V_n(x)$  тесно связаны функции  $Z_n(x)$  и  $W_n(x)$ , выражаемые формулами

$$Z_n(\cos \theta) = \frac{2 \sqrt{2}}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sh} px \sin \frac{x}{2} dx}{(\cos x - \cos \theta)^n} \quad (2.1)$$

$$W_n(\cos \theta) = \frac{2 \sqrt{2}}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x \operatorname{ch} px \sin \frac{x}{2} dx}{(\cos x - \cos \theta)^n}$$

Непосредственной подстановкой нетрудно убедиться, что функции (1.8) и (2.1) удовлетворяют дифференциальным соотношениям

$$\begin{aligned} Y'_n(x) &= -\frac{n}{1-x} Z_n(x), & Z'_n(x) &= -\frac{n}{1+x} Y_n(x) \\ V'_n(x) &= -\frac{1}{1-x} [Z_n(x) + n W_n(x)] \\ W'_n(x) &= -\frac{1}{1+x} [Y_n(x) + n V_n(x)] \end{aligned} \quad (2.2)$$

( $-1 \leq x \leq 1$ )

а в точках  $x = \pm 1$  имеют значения

$$Z_n(1) = V_n(1) = W_n(1) = 0, \quad Y_n(1) = 2, \quad Y_n(-1) = \frac{2}{\pi n} \operatorname{sh} \pi n \quad (2.3)$$

$$V_n(-1) = \frac{2}{\pi n^2} [\pi n \operatorname{ch} \pi n - \operatorname{sh} \pi n], \quad Z_n(-1) = W_n(-1) = \infty$$

причем

$$\lim_{x \rightarrow -1} (1+x)^{\alpha} W_n(x) = \lim_{x \rightarrow -1} (1+x)^{\alpha} Z_n(x) = 0$$

где  $\alpha$  — произвольное положительное число.

Из соотношений (2.2) следует, что функции  $Y_n(x)$ ,  $Z_n(x)$ ,  $V_n(x)$ ,  $W_n(x)$  являются решениями следующих дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} (1+x)[(1-x)Y'_n(x)]' - n^2 Y_n(x) &= 0 \\ (1-x)[(1+x)Z'_n(x)]' - n^2 Z_n(x) &= 0 \\ (1+x)[(1-x)V'_n(x)]' - n^2 V_n(x) - 2n Y_n(x) &= 0 \\ (1-x)[(1+x)W'_n(x)]' - n^2 W_n(x) - 2n Z_n(x) &= 0 \end{aligned} \quad (2.4)$$

Из (2.8) видно, что  $Y_n(x)$  и  $Z_n(x)$  могут быть записаны в виде гипергеометрических функций

$$Y_n(x) = 2F\left(-ni, ni; 1; \frac{1-x}{2}\right)$$

$$Z_n(x) = n(1-x)F\left(ni-1, 1-ni; 2; \frac{1-x}{2}\right)$$

Пользуясь теперь дифференциальными уравнениями для  $y_n(x)$  и  $z_n(x)$  и уравнениями (2.4), вычисляем интегралы Ломмеля типа (1.16), входящие в выражения коэффициентов бесконечных систем (1.12)

$$\int \frac{y_k(x) Y_n(x)}{1+x} dx = -\frac{ny_k(x) Z_n(x) + k Y_n(x) z_k(x)}{n^2 + k^2}$$

$$\int \frac{Z_n(x) z_k(x)}{1-x} dx = \frac{ky_k(x) Z_n(x) - n z_k(x) Y_n(x)}{n^2 + k^2}$$

$$\int \frac{V_n(x) y_k(x)}{1+x} dx = \frac{2n}{(n^2 - k^2)^2} [ny_k(x) Z_n(x) + k Y_n(x) z_k(x)] -$$

$$-\frac{1}{n^2 - k^2} [y_k(x) z_n(x) + k V_n(x) z_k(x) + n W_n(x) y_k(x)]$$

$$\int \frac{z_k(x) w_n(x)}{1-x} dx = -\frac{2k}{(k^2 - n^2)^2} [ny_k(x) Z_n(x) + k Y_n(x) z_k(x)] +$$

$$+\frac{1}{k^2 - n^2} [Y_n(x) z_k(x) + k W_n(x) y_k(x) - n V_n(x) z_k(x)]$$

$$\int \frac{Y_p(x)}{1+x} dx = -\frac{1}{p} Z_p(x), \quad \int \frac{V_p(x)}{1+x} dx = \frac{1}{p} \left[ W_p(x) - \frac{Z_p(x)}{p} \right]$$

Некоторые из приведенных интегралов непосредственно в данной работе не использованы. Они встречаются в задачах с несимметричными граничными условиями.

Наконец, приведем асимптотические разложения (ограничиваясь только первым членом) функций (1.17) и (2.1) при больших значениях индекса. Эти формулы нам понадобятся при исследовании бесконечных систем (1.12).

Пользуясь методом перевала [8], из (1.6) и (2.1) получим следующие асимптотические формулы для больших значений  $p$ :

$$Y_n(\cos \frac{b}{p}) = \frac{e^{-\pi b}}{2} \left\{ \sqrt{\frac{\pi}{p \operatorname{tg} \frac{b}{2}}} + O(p^{-1/2}) \right\}$$

$$\begin{aligned}
 Z_p(\cos \theta) &= \frac{e^{i\theta}}{\pi} \left\{ \sqrt{\frac{\pi}{p \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2}} + O(p^{-3})} \right\} \\
 V_p(\cos \theta) &= \frac{2}{\pi} e^{i\theta} \left\{ \sqrt{\frac{\pi}{p \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}} \frac{\theta}{2} + O(p^{-3})} \right\} \\
 W_p(\cos \theta) &= \frac{2}{\pi} e^{i\theta} \left\{ \sqrt{\frac{\pi}{p \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2}} \frac{\theta}{2} + O(p^{-3})} \right\} \quad (2.7) \\
 &\quad (0 < \theta < \pi)
 \end{aligned}$$

§3. Исследование бесконечных систем (1.12). Докажем, что в общем случае бесконечные системы (1.12) квазиполне регулярны.

Для этого нужно оценить ряды  $\sum_{p=1}^{\infty} |a_{kp}^{(i)}|$ ,  $\sum_{p=1}^{\infty} |b_{kp}^{(i)}|$  ( $i = 1, 2$ ).

Поскольку числа  $N_p$  в формуле (1.11) имеют порядок  $N_p = o(p^{-2})$ , то, используя результаты работы [7] для суммы  $\sum_{p=1}^{\infty} |a_{kp}^{(i)}|$ , получим оценку

$$\sum_{p=1}^{\infty} |a_{kp}^{(i)}| \leq O(k^{-3}) \quad (i = 1, 2) \quad (3.1)$$

Пользуясь значениями интегралов  $I_{k,i}(z_1)$  и  $K_{k,i}(z_1)$  (2.6) и асимптотическими формулами (2.7), будем иметь

$$\begin{aligned}
 \sum_{p=1}^{\infty} |b_{kp}^{(i)}| &\leq V \sqrt{k} \sum_{p=1}^{\infty} e^{-p^2/k} \left\{ \frac{Ap^{2k} + Bp^k}{k^2 + \frac{b^2}{a^2} p^2} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{Cp^{2k} + Dp^k}{\left(k^2 + \frac{b^2}{a^2} p^2\right)^2} \right\} = O(k^{-3})
 \end{aligned}$$

$$z_1 = \frac{(b-c)\pi}{a}, \quad z_2 = \frac{(a-d)\pi}{b} \quad (d_i > 0) \quad (i = 1, 2) \quad (3.2)$$

Здесь  $A, B, C$  и  $D$  — постоянные, значения которых не влияют на порядок убывания оценки (3.2).

Полученные оценки стремятся к нулю при  $k \rightarrow \infty$ . Поэтому, начиная с некоторого значения  $k_0$ , сумма модулей коэффициентов при

неизвестных станет меньше единицы, т. е. бесконечная система (1.12) квазивполне регулярна. Значение  $k_0$  легко можно определить в каждом конкретном случае.

Накладывая обычные условия на граничные функции, т. е. требуя, чтобы функции  $f_2(y)$  и  $f_1(x)$  были кусочно-гладкими, а функции  $f_3(y)$  и  $f_4(x)$  кусочно-непрерывными, легко показать, что функции  $F_i(\theta)$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) (1.15) будут непрерывными. При этом свободные члены  $\gamma_k^{(1)}$  и  $\gamma_k^{(2)}$  системы (1.12) будут иметь порядок  $O(k^{-1})$ . Применяя метод последовательных приближений, можно показать, что  $X_k$  и  $Y_k$  также будут иметь порядок  $O(k^{-1})$ .

Неизвестные  $X_k$  и  $Y_k$ , определяемые из системы (1.12), выражаются через постоянные  $X_0$  и  $Y_0$ . Эти постоянные определяем из вторых уравнений (1.9) и (1.10). Подставляя в эти уравнения значения  $X_k$  и  $Y_k$  из бесконечных систем (1.12) и пользуясь формулами (2.4), (2.10), а также значениями рядов

$$\sum_{k=1}^{\infty} y_k (\cos \theta) \cos kz = -1 + \begin{cases} \frac{2^{1/2} \cos \frac{z}{2}}{(\cos z - \cos \theta)^{1/2}} & (z < \theta) \\ 0 & (z > \theta) \end{cases}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} z_k (\cos \theta) \cos kz = 1 - \begin{cases} 0 & (0 \leq z < \theta \leq \pi) \\ \frac{2^{1/2} \sin \frac{z}{2}}{(\cos \theta - \cos z)^{1/2}} & (0 \leq \theta < z \leq \pi) \end{cases} \quad (3.3)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z_k (\cos z_0)}{k} \cos kz = 2 \ln \cos \frac{z_0}{2} \quad (z_0 < z)$$

для определения неизвестных  $X_0$  и  $Y_0$  получим следующую систему уравнений:

$$\gamma_1 X_0 \left( 1 - \frac{4}{\pi} \frac{b}{a} \ln \cos \frac{z_1}{2} \right) - \gamma_2 Y_0 = E \frac{b}{2\pi} f_2(b) - \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{N_p X_p}{p} z_p (\cos z_1) +$$

$$+ \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} F_1'(\theta) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} d\theta + \frac{1}{2} \int_{z_1}^{\pi} F_2'(\theta) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} d\theta + \frac{b}{a} \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^{p+1} Y_p \frac{1 - M_p}{\operatorname{sh} \tau_p b} \times$$

$$\times (2 - \tau_p b \operatorname{cth} \tau_p b) - \frac{Z_{\tau_p b}(\cos z_1)}{p} - \frac{b^2}{a^2} \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^{p+1} Y_p \frac{1 - M_p}{\operatorname{sh} \tau_p b} W_{\tau_p b}(\cos z_1) \quad (3.4)$$

$$\gamma_2 Y_0 \left( 1 - \frac{4}{\pi} \frac{a}{b} \ln \cos \frac{z_2}{2} \right) - \gamma_1 X_0 =$$

$$\begin{aligned}
&= E \frac{a}{2\pi} f_1(a) - \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{M_p Y_p}{p} z_p (\cos z_2) - \\
&- \frac{1}{2} \int_0^{z_2} F_3^*(\theta) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} d\theta + \frac{1}{2} \int_{z_1}^{\pi} F_4^*(\theta) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} d\theta + \\
&+ \frac{a}{b} \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^{p+1} (1 - N_p) \frac{X_p}{\operatorname{sh} \beta_p a} (2 - \beta_p a \operatorname{cth} \beta_p a) \frac{Z_{\frac{a}{b}}(\cos z_2)}{p} - \\
&- \frac{a^2}{b^2} \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^{p+1} (1 - N_p) \frac{X_p}{\operatorname{sh} \beta_p a} W_{\frac{a}{b}}(\cos z_2)
\end{aligned}$$

§ 4. Формулы для перемещений и напряжений. Подставляя в выражения (1.3) и (1.4) значения функции  $\Phi(x, y)$  (1.5) и учитывая при этом (1.7) и (1.11), для определения перемещений и напряжений получим следующие формулы:

$$\begin{aligned}
Eu(x, y) &= \frac{\pi}{a} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{Y_k}{k} (1 - M_k) \sin a_k x \left\{ (1 - \nu) \frac{\operatorname{ch} a_k y}{\operatorname{sh} a_k b} - \right. \\
&- (1 + \nu) a_k \left[ b \frac{\operatorname{ch} a_k (b - y)}{\operatorname{sh}^2 a_k b} + (b - y) \frac{\operatorname{sh} a_k y}{\operatorname{sh} a_k b} \right] \left. \right\} + \\
&+ \frac{\pi}{b} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{X_k}{k} (1 - N_k) \cos \beta_k y \left[ 2 \frac{\operatorname{sh} \beta_k x}{\operatorname{sh} \beta_k a} - \right. \\
&- (1 + \nu) \beta_k \left[ a \frac{\operatorname{sh} \beta_k (a - x)}{\operatorname{sh}^2 \beta_k a} - (a - x) \frac{\operatorname{ch} \beta_k x}{\operatorname{sh} \beta_k a} \right] \left. \right\} + \\
&+ \pi^2 x \left( \frac{X_0}{b^2} - \frac{\nu Y_0}{a^2} \right)
\end{aligned} \quad (4.1)$$

$$\begin{aligned}
v_x(x, y) &= \frac{\pi^2}{a^2} \sum_{k=1}^{\infty} Y_k (1 - M_k) \cos a_k x \left[ \frac{\operatorname{ch} a_k y}{\operatorname{sh} a_k b} - a_k b \frac{\operatorname{ch} a_k (b - y)}{\operatorname{sh}^2 a_k b} - \right. \\
&- a_k (b - y) \frac{\operatorname{sh} a_k y}{\operatorname{sh} a_k b} \left. \right] + \frac{\pi^2}{b^2} \sum_{k=1}^{\infty} X_k (1 - N_k) \cos \beta_k y \left[ \frac{\operatorname{ch} \beta_k x}{\operatorname{sh} \beta_k a} + \right. \\
&+ \beta_k a \frac{\operatorname{ch} \beta_k (a - x)}{\operatorname{sh}^2 \beta_k a} + \beta_k (a - x) \frac{\operatorname{sh} \beta_k x}{\operatorname{sh} \beta_k a} \left. \right] - \frac{\pi^2}{b^2} X_0
\end{aligned} \quad (4.2)$$

$$\tau_{xy}(x, y) = \frac{\pi^2}{a^2} \sum_{k=1}^{\infty} k Y_k (1 - M_k) \sin a_k x \left[ b \frac{\operatorname{sh} a_k (b - y)}{\operatorname{sh}^2 a_k b} - \right.$$

$$- (b-y) \frac{\operatorname{ch} \alpha_k y}{\operatorname{sh} \alpha_k b} \left| + \frac{\pi^2}{b^3} \sum_{k=1}^{\infty} k X_k (1 - N_k) \sin \beta_k y \times \right. \\ \left. \times \left| a \frac{\operatorname{sh} \beta_k (a-x)}{\operatorname{sh}^2 \beta_k a} - (a-x) \frac{\operatorname{ch} \beta_k x}{\operatorname{sh} \beta_k a} \right| \right.$$

Аналогичные формулы получим для определения перемещения  $v(x, y)$  и нормального напряжения  $\sigma_y(x, y)$  посредством замены

$$X_k = Y_k, \quad x \rightleftharpoons y, \quad a \rightleftharpoons b, \quad \alpha_k \rightleftharpoons \beta_k, \quad N_k = M_k, \quad X_0 = Y_0 \quad (4.3)$$

Эти формулы верны для всех значений  $x$  и  $y$ . Но поскольку некоторые ряды, входящие в выражения перемещений и напряжений, на границе прямоугольника сходятся медленно (условно), улучшим сходимость этих рядов на границах области. Для этого в выражения (4.1) и (4.2) подставим значения неизвестных  $X_k$  и  $Y_k$  из бесконечных систем (1.12) и воспользуемся значениями интегралов и рядов (2.6) и (3.3). После ряда выкладок для контактного напряжения  $\sigma_x(x, y)$  получим следующее выражение:

$$\sigma_x \left( a, \frac{b}{\pi} z \right) = \frac{R \sin \frac{z}{2}}{(\cos z_1 - \cos z)} + \\ + \frac{\pi^2 \sqrt{2}}{b^2} \sin \frac{z}{2} \left[ - \sum_{p=1}^{\infty} p N_p X_p \int_{z_1}^z \frac{z_p (\cos \theta) \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} d\theta}{(\cos \theta - \cos z)^2} + \right. \\ \left. + \int_0^{z_1} \frac{F_2^*(\theta) d\theta}{(\cos \theta - \cos z)^2} + \int_{z_1}^z \frac{F_2^*(\theta) d\theta}{(\cos \theta - \cos z)^2} + \frac{b^2}{a^3} \sum_{p=1}^{\infty} p (-1)^p \frac{1 - M_p}{\operatorname{sh} \alpha_p b} Y_p \times \right. \\ \left. \times \left| \frac{\operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} d\theta}{(\cos \theta - \cos z)^2} \right| \left( 2 - \alpha_p b \operatorname{cth} \alpha_p b \right) Z_{\frac{b}{a}}(\cos \theta) + \frac{b}{a} p W_{\frac{b}{a}}(\cos \theta) \right] \quad (4.4)$$

$$\text{Здесь } z = \frac{\pi y}{b}$$

$$R = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\pi^2}{b^2} \left\{ \sum_{p=1}^{\infty} N_p X_p y_p (\cos z_1) + F_2^*(z_1) - F_1^*(z_1) + 2X_0 \right. \\ \left. - \frac{b^2}{a^2} \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^{p-1} Y_p \frac{1 - M_p}{\operatorname{sh} \alpha_p b} \left[ (1 - \alpha_p b \operatorname{cth} \alpha_p b) Y_{\frac{b}{a}}(\cos z_1) + \right. \right. \\ \left. \left. + p \frac{b}{a} V_{\frac{b}{a}}(\cos z_1) \right] \right\}$$

Для определения перемещения  $u(x, y)$  вне штампа получим формулу

$$\begin{aligned}
 Eu\left(a, \frac{b}{\pi} z\right) &= Ef_2(b) + 2 \frac{\pi}{b} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{X_k N_k}{k} [(-1)^k - \cos kz] + \\
 &+ \frac{\pi}{2} \sqrt{2} \cos \frac{z}{2} \left\{ \sum_{p=1}^{\infty} V_p X_p \int_0^z \frac{y_p(\cos \theta) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} d\theta}{(\cos z - \cos \theta)^{1/2}} + \int_0^z \frac{F_1^{(p)}(\theta) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} d\theta}{(\cos z - \cos \theta)^{1/2}} \right. \\
 &\quad - \frac{4X_p}{1 - \cos z} \ln \frac{\sqrt{1 + \cos z} + \cos z - \cos \theta}{1 + \cos \theta} + \\
 &\quad \left. + 2 \frac{h^2}{a^2} \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^{p+1} \frac{Y_p}{\operatorname{sh} \alpha_p b} (1 - M_p) \times \right. \\
 &\quad \left. \times \int_0^z \frac{\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} d\theta}{(\cos z - \cos \theta)^{1/2}} \left[ (1 - \alpha_p b \operatorname{cth} \alpha_p b) Y_{\alpha_p b}(\cos \theta) + \frac{h}{a} p V_{\alpha_p b}(\cos \theta) \right] \right\} \\
 &\quad (0 \leq z \leq z_1)
 \end{aligned}$$

$$\text{Здесь } z = \frac{\pi y}{b}. \quad (4.5)$$

Аналогичные выражения могут быть получены для  $v\left(\frac{a}{\pi} z, b\right)$  и  $u\left(\frac{a}{\pi} z, b\right)$  заменой (4.3).

Пользуясь полученными выше формулами для нормальных напряжений, вычислим силы и моменты, приложенные к штампам

$$\begin{aligned}
 P_1 &= \int_0^b z_y(x, b) dx = \frac{\pi^2 d}{b^2} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} X_k \frac{1 - N_k}{\operatorname{sh} \alpha_k a} + \\
 &\quad + \frac{\pi^2 Y_0}{a} + \frac{a}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_2\left(\frac{za}{\pi}\right) dz \\
 P_2 &= \int_0^b z_x(a, y) dy = \frac{\pi^2 c}{a^2} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} Y_k \frac{1 - M_k}{\operatorname{sh} \alpha_k b} + \\
 &\quad + \frac{\pi^2 X_0}{b} - \frac{b}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_1\left(\frac{zb}{\pi}\right) dz
 \end{aligned} \quad (4.6)$$

$$\begin{aligned}
 M_1 = & \int_0^a z_1(x, b) \left( \frac{a+d}{2} - x \right) dx = \frac{a-d}{2} P_1 + \\
 & + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k X_k}{k^2 \operatorname{sh} \beta_k a} (1 - N_k) \left\{ \operatorname{ch} \beta_k a - \frac{\beta_k d \operatorname{ch} \beta_k (a-d) - \beta_k a}{\operatorname{sh} \beta_k a} \right. \\
 & - \left. |\beta_k (a-d) \operatorname{cth} \beta_k a + 1| \operatorname{ch} \beta_k d \right\} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \cos \alpha_k d}{k^2} Y_k + \\
 & + Y_0 \frac{\pi^2}{2a^2} (a-d)^2 \\
 M_2 = & \int_0^b z_2(a, y) \left( \frac{b+c}{2} - y \right) dy = \frac{b-c}{2} P_2 + \\
 & + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k Y_k}{k^2 \operatorname{sh} \alpha_k b} (1 - M_k) \left\{ \operatorname{ch} \alpha_k b - \frac{\alpha_k c \operatorname{ch} \alpha_k (b-c) - \alpha_k b}{\operatorname{sh} \alpha_k b} \right. \\
 & - \left. |\alpha_k (b-c) \operatorname{cth} \alpha_k b + 1| \operatorname{ch} \alpha_k c \right\} + \\
 & + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \cos \beta_k c}{k^2} X_k + X_0 \frac{\pi^2}{2b^2} (b-c)^2 \quad (4.7)
 \end{aligned}$$

Соотношения (4.6) выражают те линейные связи, которые существуют между силами, приложенными к штампам, и поступательными перемещениями этих штампов, а соотношения (4.7) устанавливают связь между моментами, приложенными к штампам, и углами поворота этих штампов.

Тем же способом, каким решалась данная задача, с использованием функций (1.17) и (2.1) легко решаются задачи, когда штампы приложены на средних участках сторон прямоугольника, а также ряд других практически важных контактных задач.

Институт математики и механики  
АН Армянской ССР

Получила 8 X 1968

Ա. Հ. ԲԱՐՎՈՅԱՆ, Ն. Ս. ՉՈՒԲԱՆՅԱՆ,

ՈՒՂԱԿԱՆՑԱՆ ԶԱՄԱՐ ՄԻ ԽԱՌՇ ԽՆԴԻՐ ՄԱՍԻՆ,

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Գրությունում է ամսագրակազմի մասնաժամանակը հարթ խնդիրը ուղ-  
գանկյան նամար, երբ ուղղանկյան բարձր կողմերի վրա կիրառվեն պարամն-

ները արված են խառը ձևով: Ընդունվում է, որ արտաքին շոշափող լարումները բացակայում են և ուղղանկյունը սեղմվում է անկյուններում գրված բացարձակ կոշտ անկյունասիների միջոցով, որոնց կողմերի երկարությունները տարբեր են: Ենթադրվում է, նաև, որ կան երկու սիմետրիայի առանցքներ:

Խնդիրը լուծվում է Ֆուրյեի մեթոդով, Շարքերի գործակիցների սրշման համար սկզբում ստացվում են եռանկյունաչափական գույր համասարումների սխառնման, ախուհետև հանրահաղմված անվերջ համասարումների սխառնման, մուլթ է արվում, որ անվերջ սխառնմանի գործակիցները մոդուլների գումարը և ազատ անդամները ձգտում են զերուրի:

Ստացված են բանաձևեր տեղափոխումների և կոնտակտալին լարումների հաղմված համար:

A. A. BABLOYAN, N. O. GULKANIAN

## A MIXED PROBLEM FOR A RECTANGULAR REGION

### Summary

The plane problem for a rectangular region is solved, when on all rectilinear areas the boundary conditions are given in a mixed form. It is assumed, that the tangent strains along the contour are absent and the rectangle is pressed on all sides with two similar rigid punches symmetrically placed at the ends. The width of the punches, applied on opposite sides, are the same, while the neighbouring sides are different.

The problem is reduced to the system of dual trigonometrical equations, and then to the quasi-regular infinite system of linear algebraic equations.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Абрамян Б. А. Об одном случае плоской задачи теории упругости для прямоугольника. Докл. АН АрмССР, т. XXI, № 5, 1955.
2. Абрамян Б. А. К плоской задаче теории упругости для прямоугольника. ПММ, т. XXI, вып. 1, 1957.
3. Минасян Р. С. О смешанной граничной задаче уравнения Лапласа для прямоугольника. ПММ, т. XVI, вып. 3, 1952.
4. Минасян Р. С. Об одной смешанной задаче изгиба прямоугольной пластинки. Докл. АН АрмССР, т. XXII, № 1, 1956.
5. Минасян Р. С. Об одной смешанной граничной задаче теплопроводности для полого составного цилиндра. Сб. „Тепло- и массоперенос“, № 8, 1968, Минск, 205—210.
6. Баблоян А. А. Решение некоторых парных уравнений, встречающихся в задачах теории упругости. ПММ, т. 31, вып. 4, 1967.
7. Баблоян А. А., Гулкян Н. О. Кручение поллой полусферы штампом. Изв. АН АрмССР, Механика, т. XX, № 2, 1967.
8. Свешников А. Г., Тихонов А. Н. Теория функций комплексной переменной. Изд. „Наука“, М., 1967.