

УДК 621.382

ОСОБЕННОСТИ ДИСПЕРСИИ ПОДВИЖНОСТИ ЭЛЕКТРОНОВ В ГОМЕОПОЛЯРНЫХ ПОЛУПРОВОДНИКАХ

С.В. МЕЛКОНЯН, А.В. СУРМАЛЯН

Ереванский государственный университет, Армения

(Поступила в редакцию 25 марта 2010 г.)

Исследованы статистические особенности флуктуации подвижности носителей тока (электронов) в невырожденных полупроводниках. Получено аналитическое выражение для дисперсии подвижности электронов, обусловленное случайными изменениями заселенности энергетических уровней зоны проводимости. В рамках развитой теории рассмотрена температурная зависимость дисперсии подвижности электронов проводимости в гомеополярных полупроводниках.

1. Введение

В теории низкочастотных флуктуаций электрического тока в металлах, полупроводниках и полупроводниковых приборах в качестве источника $1/f$ -шума обсуждаются две основные модели: флуктуация концентрации ($\tilde{n}$ -модель) и флуктуация подвижности ($\tilde{\mu}$ -модель) носителей тока [1-4]. Гипотетическая идея флуктуации подвижности, как возможный источник низкочастотных токовых шумов в проводниках, впервые была высказана в работах Хуга [5]. При этом не был выдвинут определенный физический механизм. В дальнейшем, в работах [6-8] были выявлены микроскопические механизмы флуктуации подвижности. Было установлено [6-8], что флуктуация подвижности, например, электронов в общем случае является результатом флуктуации времени релаксации $\tilde{\tau}_k$ квазиимпульса электронов ($\tilde{\tau}_k$ -источник) и заселенности $\tilde{n}_k$ энергетических уровней зоны проводимости полупроводника ($\tilde{n}_k$ -источник). Как известно, источники флуктуации подвижности весьма разнообразны [8]. Для того чтобы оценить вклады отдельных источников, необходимо их рассмотреть и проанализировать отдельно: для каждого источника исследовать как статистические особенности (дисперсия, амплитудное распределение и т.д.), так и выявить частотные, токовые и другие зависимости спектральной плотности флуктуации подвижности, и сравнить полученные результаты с аналогичными свойствами $1/f$ -шума.

Целью настоящей работы было вычислить и исследовать основные свойства дисперсии подвижности носителей тока, исходя из развитого в работах [6,7] физического механизма флуктуации подвижности. Для определенности

рассматривается система электронов проводимости однородного и невырожденного полупроводника.

2. Дисперсия подвижности

Здесь, как и в работах [6-8], для упрощения задачи обсуждаются только временные флуктуации, предполагая, что флуктуирующие величины не зависят от пространственных координат. В работе [6], рассматривая флуктуации подвижности электронов, обусловленные случайными изменениями заселенности энергетических уровней зоны проводимости ($\tilde{n}_k$ -источник), флуктуация проводимости $\tilde{\sigma}_n$ n -полупроводника была представлена в виде суммы двух некоррелированных составляющих, пропорциональных флуктуациям концентрации $\tilde{n}$ и подвижности $\tilde{\mu}_n$ электронов, соответственно:

$$\tilde{\sigma}_n = e\tilde{n}\bar{\mu}_n + e\bar{n}\tilde{\mu}_n. \quad (1)$$

Здесь и далее символами “ $\sim$ ” и “ $\bar{}$ ” обозначены флуктуационная и среднестатистическая составляющие соответствующих величин,

$$\tilde{\mu}_n \equiv \sum_k (\bar{\mu}_k - \bar{\mu}_n) \tilde{n}_k / \bar{n}V, \quad (2)$$

$\tilde{n}_k = -k d\tilde{f}_k^0 / 3dk$, f_k^0 – равновесная функция распределения Больцмана, n – концентрация электронов проводимости, $\mu_n = \sum_k n_k \mu_k / nV$, $\mu_k = e\tau_k / m_n$ – “локальная” подвижность электрона с квазиволновым вектором $\mathbf{k}$, $\tau_k \equiv \tau_{0,r} (k/k_T)^{-r}$, $\tau_{0,r}$ – коэффициент, зависящий от механизма рассеяния, температуры и параметров полупроводника, показатель r характеризует механизм рассеяния электронов [9], $k_T^2 = 2m_n k_B T / \hbar^2$ – квазиволновой вектор термических электронов, T – температура, V – объем полупроводника, k_B – постоянная Больцмана, m_n – эффективная масса электрона, e – элементарный заряд.

Переходя в уравнении (2) от суммирования к интегрированию, получим

$$\tilde{\mu}_n = -\frac{1}{12\pi^3 \bar{n}} \int d\mathbf{k} \frac{d\tilde{f}_k^0}{dk} k (\bar{\mu}_k - \bar{\mu}_n). \quad (3)$$

Здесь интегрирование проводится в пределах первой зоны Бриллюэна (BZ).

Используя процедуру интегрирования по частям, в случае, когда эффективная масса электрона является постоянной величиной ($m_n(\epsilon) = \text{const}$, ϵ – энергия электрона), уравнение (3) можно представить в виде

$$\tilde{\mu}_n = -\frac{1}{12\pi^3 \bar{n}} \int_{\text{BZ}} d\mathbf{k} \frac{d\tilde{f}_k^0}{dk} k (\bar{\mu}_k - \bar{\mu}_n), \quad (4)$$

где

$$\bar{\tau}_k^* \equiv \bar{\tau}_k + (k/3) d\bar{\tau}_k / dk, \quad (5)$$

$\bar{\mu}_n = e \langle \bar{\tau}_k^* \rangle / m_n$, $\langle \dots \rangle$ – символ усреднения по квантовым состояниям зоны проводимости [9] (см. ниже, уравнение (11)). Следовательно, $\tilde{n}_k$ (составляющая дисперсии подвижности $\sigma_\mu^2 = \tilde{\mu}_n^2$) можно представить в следующем виде:

$$\sigma_{\mu}^2 = \frac{e^2}{(4\pi^3 \bar{n} m_n)^2} \iint_{\text{BZ}} d\mathbf{k} d\mathbf{k}_1 (\bar{\tau}_k^* - \langle \bar{\tau}_k^* \rangle) (\bar{\tau}_{k_1}^* - \langle \bar{\tau}_{k_1}^* \rangle) \overline{\tilde{f}_k^0 \tilde{f}_{k_1}^0}. \quad (6)$$

Как известно [10,11], если концентрация электронов флуктуирует ($\tilde{n} \neq 0$, как это имеет место, например, при случайных генерационно-рекомбинационных переходах), то

$$\overline{\tilde{f}_k^0 \tilde{f}_{k_1}^0} = \frac{4\pi^3 \bar{f}_k^0}{V} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1). \quad (7)$$

Если концентрация электронов является постоянной (нефлуктуирующей) величиной ($\tilde{n} = 0$, как это имеет место при случайных внутризонных рассеяниях), то в этом случае получаем [11]

$$\overline{\tilde{f}_k^0 \tilde{f}_{k_1}^0} = \frac{4\pi^3 \bar{f}_k^0}{V} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1) - \frac{\bar{f}_k^0 \bar{f}_{k_1}^0}{\bar{n}V}. \quad (8)$$

Поочередно подставляя уравнения (7) и (8) в уравнение (6) и проведя соответствующие интегрирования, можно определить дисперсию σ_{μ}^2 . Расчеты показали, что как при случайных внутризонных рассеяниях, так и при случайных генерационно-рекомбинационных переходах для дисперсии σ_{μ}^2 получается одно и то же выражение. Такая особенность дисперсии σ_{μ}^2 является результатом того, что в невырожденных полупроводниках подвижность $\bar{\mu}_n$ не зависит от концентрации электронов, и вполне естественно, что дисперсия подвижности не зависит от того, флуктуирует концентрация электронов или нет. Для $\tilde{n}_k$ -составляющей дисперсии подвижности получается следующее выражение:

$$\sigma_{\mu}^2 = \frac{(\bar{\mu}_n)^2}{N} \rho_n, \quad (9)$$

где $N = nV$ – количество электронов проводимости в полупроводниковом n -образце,

$$\rho_n = \langle \bar{\tau}_k^{*2} \rangle / \langle \bar{\tau}_k^* \rangle^2 - 1, \quad (10)$$

$$\langle (\dots) \rangle = \int_{\text{BZ}} dk (\dots) \bar{f}_k^0 / \int_{\text{BZ}} dk \bar{f}_k^0. \quad (11)$$

В простом случае, когда действует только один механизм рассеяния с $\bar{\tau}_k \equiv \tau_{0,r} (k/k_T)^{-r}$ из уравнения (10), при параболическом законе дисперсии электронов $\varepsilon = \hbar^2 k^2 / 2m_n$, получается следующее простое выражение:

$$\rho_n = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{G(3/2-r)}{G^2((3-r)/2)} - 1. \quad (12)$$

Здесь $G(\dots)$ – гамма-функция.

Основные свойства дисперсии σ_{μ}^2 отражены в уравнении (9). Величина σ_{μ}^2 по обратно пропорциональному закону зависит от числа электронов в образце, $\sigma_{\mu}^2 \sim 1/\bar{N}$. Из (9) и (12) видно, что $\sigma_{\mu}^2 = 0$ при $r = 0$, т.е. случайное рассеяние с индексом $r = 0$ не является источником $\tilde{n}_k$ -флуктуации

подвижности. Однако, следует отметить, что эта ситуация полностью меняется при смешанном рассеянии, когда наряду с процессом $r=0$ действует процесс рассеяния с $r \neq 0$. Процессом с $r=0$ является, в частности, рассеяние на нейтральных центрах. При рассеянии на акустических фононах $r=1$, и т.д. [9,12].

Отметим, что для полупроводника с непараболическим законом дисперсии ($m_n(\epsilon) \neq \text{const}$), уравнение (10) можно обобщить, представив его в виде

$$\rho_n = \frac{\langle \bar{\mu}_k^{*2} \rangle}{\langle \bar{\mu}_k^* \rangle^2} - 1,$$

где $\bar{\mu}_k^* \equiv \bar{\mu}_k + k d \bar{\mu}_k / 3dk$, $\langle \bar{\mu}_k^* \rangle = \bar{\mu}_n$.

3. Температурная зависимость дисперсии подвижности электронов в Si и Ge

Флуктуации подвижности непосредственно связаны со случайным характером процессов рассеяния. Простая теория рассеяния для монокристаллических гомеополарных полупроводников (Si, Ge) приводит к закону $\bar{\mu}_n \sim T^{-3/2}$, характерному для рассеяния электронов на акустических фононах [9,12]. Однако закон $T^{-3/2}$, как правило, не наблюдается на эксперименте. Так, в n -Si в температурной области $100 \text{ K} < T < 400 \text{ K}$ наблюдается зависимость $\bar{\mu}_n \sim T^{-2.5}$, а в n -Ge в области $77 \text{ K} < T < 300 \text{ K}$ наблюдается зависимость $\bar{\mu}_n \sim T^{-1.7}$ [9,12,13]. Такие отступления от теории в общем случае объясняются различными причинами [9,12]: дополнительным рассеянием на оптических колебаниях решетки, междолинными рассеяниями, непараболическостью зон и т.д. В n -Ge и n -Si основную роль играют междолинные рассеяния [9,12]. Различают два типа междолинных рассеяний: g -рассеяние, происходящее между данной долиной и эквивалентной долиной на противоположной стороне той же оси; и f -рассеяние, когда электрон переходит из данной долины в одну из остальных эквивалентных долин. По вопросу об отношении интенсивностей f - и g -рассеяний не существует единого мнения [14]. Энергии междолинных f - и g -фононов $\hbar\omega_i = k_B \theta_i$ для n -Si и n -Ge приведены в работе [13].

При совместном действии внутримолинового рассеяния на акустическом деформационном потенциале (с временем релаксации $\tau_{k,ac}$) и междолинного рассеяния (с временем релаксации $\tau_{k,i}$) эффективное время релаксации квазиимпульса электрона $\bar{\tau}_k$ можно представить в виде [9, 12]

$$\bar{\tau}_k^{-1} = \bar{\tau}_{k,ac}^{-1} + \bar{\tau}_{k,i}^{-1}, \quad (13)$$

где

$$1/\bar{\tau}_{k,ac} = w_1 \frac{k_B T \epsilon^{1/2}}{(k_B \theta_i)^{3/2}}, \quad 1/\bar{\tau}_{k,i} = w_2 \left(\sqrt{\frac{\epsilon}{k_B \theta_i}} + 1 + e^{\frac{\theta_i}{T}} \operatorname{Re} \sqrt{\frac{\epsilon}{k_B \theta_i} - 1} \right) / \left(e^{\frac{\theta_i}{T}} - 1 \right), \quad (14)$$

$w_1 = 2^{1/2} \epsilon_{ac}^2 (k_B \theta_i m_n)^{3/2} / \pi \hbar^4 c_l$, w_2 – некоторая постоянная (константа связи), подлежащая определению из эксперимента (например, из акустоэлектрического эффекта [12]), ϵ_{ac} – константа акустического потенциала деформации зоны проводимости, c_l – продольная упругая постоянная.

Следует отметить, что при междолинных рассеяниях температурная зависимость подвижности $\bar{\mu}_n$ достаточно хорошо описывается моделью Херинга [15]. Расчеты, проведенные на основе метода Херинга, показывают, что для кремния зависимость $\bar{\mu}_n \sim T^{-2.5}$ получается при $w_2/w_1 \approx 3$ [12]. Для германия зависимость $\bar{\mu}_n \sim T^{-1.7}$ получается при $w_2/w_1 \approx 0.5$.

Имея в виду вышеизложенное, рассмотрим дисперсию подвижности электронов при смешанном рассеянии, описываемом уравнением (13). Подставляя (13) в (5), а полученное выражение в уравнение (10), параметр ρ_n при параболическом законе дисперсии электронов можно представить в следующем интегральном виде:

$$\rho_n = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \int_0^\infty dx x^{1/2} e^{-x} b^2(x) / a^4(x) \left/ \left[\int_0^\infty dx e^{-x} x^{3/2} / a(x) \right] \right. - 1, \quad (15)$$

где $x = \epsilon / k_B T$,

$$a(x) = (T/\theta_i)^{3/2} (e^{\theta_i/T} - 1) \sqrt{x} + \frac{w_2}{w_1} \left(\sqrt{xT/\theta_i} + 1 + e^{\theta_i/T} \operatorname{Re} \sqrt{xT/\theta_i - 1} \right),$$

$$b(x) = (T/\theta_i)^{3/2} (e^{\theta_i/T} - 1) \sqrt{x} + \frac{w_2}{w_1} \left\{ (xT/\theta_i + 3/2) / \sqrt{xT/\theta_i} + 1 + e^{\theta_i/T} \operatorname{Re} \left[(xT/\theta_i - 3/2) / \sqrt{xT/\theta_i - 1} \right] \right\}.$$

Как видно из этого выражения, параметр ρ_n нетривиальным образом зависит от T , θ_i и w_2/w_1 . Для выявления температурной зависимости $\rho_n(T)$ проведены соответствующие численные расчеты для Si и Ge. Для кремния вычисления проведены при $m_n/m_0 = 0.32$, $\epsilon_{ac} = 9$ эВ [13], $w_2/w_1 = 3$ и энергии междолинных X-X фононов [13] $\theta_i = 865$ К (ТО f -фонон, $\hbar\omega_i = 59.1$ мэВ), $\theta_i = 550$ К (LA f -фонон, $\hbar\omega_i = 47.4$ мэВ), $\theta_i = 294$ К (TA f -фонон, $\hbar\omega_i = 25.4$ мэВ). Для германия вычисления проведены при $m_n/m_0 = 0.22$, $\epsilon_{ac} = 11$ эВ [13], $w_2/w_1 = 0.5$ и энергии междолинных L-L фононов [13] $\theta_i = 320$ К (LA, LO фонон, $\hbar\omega_i = 27.6$ мэВ), $\theta_i = 119$ К (TA фонон, $\hbar\omega_i = 10.3$ мэВ). Из уравнения (14) видно, что функция $\bar{\tau}_k(\epsilon)$ имеет излом при $\epsilon = k_B \theta_i$. Поэтому, при численных расчетах учитывалось квантовое расширение $\Delta\epsilon$ дискретного уровня $\epsilon = k_B \theta_i$, обусловленное соотношением неопределенности $\Delta\epsilon = \hbar/\tau_k(\epsilon = k_B \theta_i)$. Результаты расчетов для Si и Ge представлены на рис.1 и 2, соответственно. Как видно, кривые имеют одинаковую форму. При уменьшении θ_i максимум кривой

$\rho_n(T)$ смещается в сторону низких температур. В области очень низких и очень высоких температур кривые насыщаются, а параметр ρ_n становится температурно-независимой величиной. Так, в случае кремния кривая $\theta_i = 865$ К насыщается в области $T < 50$ К, а кривые $\theta_i = 550$ К и $\theta_i = 294$ К насыщаются при

$T < 40$ К и $T < 20$ К, соответственно. В случае германия кривая $\theta_i = 320$ К насыщается при $T < 40$ К, а кривая $\theta_i = 119$ К при $T < 10$ К. При этом, независимо от численного значения θ_i параметр $\rho_n(T) \rightarrow 0.57$ при $T \rightarrow 0$.

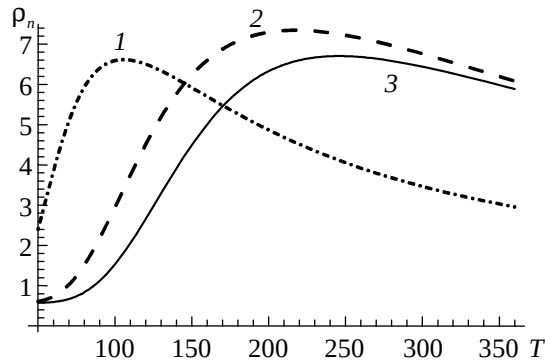


Рис.1. Температурная зависимость ρ_n для Si при $\theta_i = 294$ К (1), $\theta_i = 550$ К (2), $\theta_i = 685$ К (3).

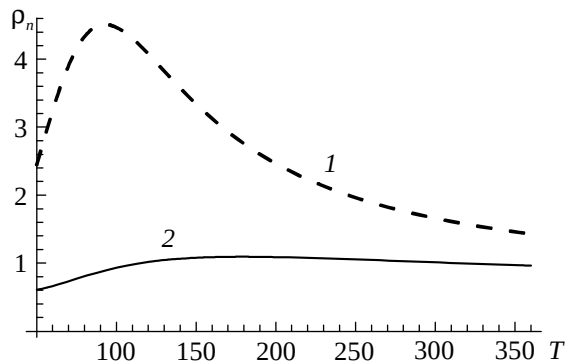


Рис. 2. Температурная зависимость ρ_n для Ge при $\theta_i = 119$ К (1) и $\theta_i = 320$ К (2).

4. Заключение

Таким образом, получено аналитическое выражение (9), которое описывает основные особенности дисперсии $\tilde{n}_k$ -составляющей флуктуации подвижности электронов σ_μ^2 в невырожденных полупроводниках. Для теории низкочастотных шумов в проводниках интересным является то, что дисперсия подвижности σ_μ^2 зависит от числа носителей тока по обратно пропорциональному закону. Как известно [1-4], аналогичное свойство имеет

спектральная плотность $1/f$ -шума. Общее выражение (9) выявляет связь дисперсии подвижности с процессами рассеяния электронов. Его можно применить как для собственных (или слабо легированных), так и примесных полупроводников, когда становятся существенными процессы рассеяния с участием примесей или различного рода несовершенств кристаллической решетки. В гомеоплярных полупроводниках, в частности, в слабо легированных n -Si и n -Ge важную роль играют междолинные рассеяния с участием фононов. В данном случае параметр ρ_n , а следовательно, и σ_μ^2 , зависят от энергии междолинных фононов $\hbar\omega_i$.

Следует отметить, что уравнение (9) расширяет возможности теории при интерпретации экспериментальных данных по $1/f$ -шуму в рамках модели флуктуации подвижности. Как показывает анализ, в зависимости от численных значений параметров полупроводника, которыми характеризуются процессы рассеяния, уравнение (9) может привести к различным (степенным, осцилляционным и экспоненциальным) температурным зависимостям.

ЛИТЕРАТУРА

1. **F.N.Hooge, T.G.M.Kleinpenning, L.K.J.Vandamme.** Rep. Progr. Phys., **44**, 479 (1981).
2. **L.K.J.Vandamme.** IEEE Trans. Electron. Devices, ED **36**, 987 (1989).
3. **F.N.Hooge.** IEEE Trans. Electron. Devices, ED **41**, 1926 (1994).
4. **G.P.Zhigalskii.** Proc. of SPIE's Conf. "Fluctuations and Noise in Materials", Las Palmas, Grain Canaria, Spain, **5469**, 296 (2004).
5. **F.N.Hooge.** Phys. Lett., **29A**, 139 (1969); Physica, **42**, 331 (1969).
6. **S.V.Melkonyan.** Physica B, **405**, 379 (2010).
7. **S.V.Melkonyan, V.M.Aroutiounian, F.V.Gasparyan, H.V.Asriyan.** Physica B, **382**, 65 (2006).
8. **S.V.Melkonyan, F.V.Gasparyan, H.V.Asriyan.** Proc. of SPIE's Conf. "Noise and Fluctuations in Circuits, Devices, and Materials", Florence, Italy, **6600**, 66001K (2007).
9. **A.Anselm.** Introduction to Semiconductor Theory. Englewood Cliffs, USA, Prentice Hall 1982.
10. **L.D.Landau, E.M.Lifshitz.** Statistical Physics, v.5; Physical Kinetics, v.10 (Theoretical Physics Course). Oxford, 1980.
11. **H.S.Min.** J. Appl. Phys., **51**, 1637 (1980).
12. **K.Zeeger.** Semiconductor Physics. Wien, New York, Springer-Verlag, 1973.
13. **A.Dargys, J.Kundrotas.** Handbook on Physical Properties of Ge, Si, GaAs and InP. Vilnius, Science and Encyclopedia Publishers, 1994.
14. **V.I.Denis, Yu.K.Pozhela.** Hot Electrons. Vilnius, Mintis, 1971.
15. **C.Herring.** Bell Syst. Techn. Journ., **34**, 237 (1955).

FEATURES OF THE ELECTRON'S MOBILITY VARIANCE IN HOMEOPOLAR SEMICONDUCTORS

S.V. MELKONYAN, A.V. SURMALYAN

The statistical peculiarities of the current carriers' (electrons) mobility fluctuation in nondegenerated semiconductors are considered. An analytical expression is obtained for the conduction electrons' mobility variance, conditioned by random changes of the conduction band's energy levels occupancy. Within the framework of the developed theory the temperature dependences of the electron's mobility variance in homeopolar semiconductors are discussed.