Известия НАН Армении. Математика, том 45, н. 3, 2010, стр. 3-10.

О КРАТНОСТИ ТОЧКИ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ ДВУХ ПЛОСКИХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ КРИВЫХ

Г. С. АВАГЯН

Ереванский государственный университет
E-mail: *grigoravagyann@yahoo.com*

Аннотация. В данной работе рассматриваются некоторые вопросы о кратности точки пересечения двух плоских алгебраических кривых, где кратность характеризуется с помощью операторов с частными производными. Доказано, что если A есть m-кратная точка для одной кривой и n-кратная точка для другой, то арифметическая кратность пересечения (или число пересечений) данных кривых в точке A не меньше чем mn и равна mn, если кривые не имеют общих касательных в точке A.

MSC2000 number: 14H50

Ключевые слова: алгебраические кривые, кратность, кратность пересечения, операторы с частными производными.

1. Введение

Существуют различные способы определения кратности пересечения двух кривых в точке (например см. [5], гл. 4), для которых теорема Безу остается в силе. Теорему Безу можно сформулировать следующим образом: две кривые степеней m и n, не имеющие общих множителей, пересекаются mn раз (считая кратности). Один из подходов, рассматриваемых в [5] заключается в определении кратности с помощью формальных степенных рядов и основан на результанте двух кривых. В [5] (гл. 5, теорема 5.10) доказано, что при таком определении, если A – m-кратная точка кривой F и n-кратная точка кривой G, то F и G в точке A имеют по меньшей мере mn пересечений, причем в точности mn пересечений, если кривые F и G не имеют общих касательных в точке A.

Мы рассматриваем другой подход, предложенный в [4], в котором кратность определяется с помощью операторов с частными производными. Такой подход кажется также интересным для рассмотрения (кстати данный подход основан на идеальных интерполяционных схемах, рассмотренных в работах [1] и [2]). Мы покажем, что указанное свойство кратности пересечения в точке имеет место также для этого определения.

В данной работе мы ограничимся рассмотрением многочленов двух переменных, заданных в комплексном поле.

Обозначим через Π пространство всех многочленов, через Π_n - пространство многочленов степени не больше n, а через Π_n^0 - пространство однородных многочленов степени n. Пусть $\hat{p}$ - старший член (верхний однородный слой) многочлена p, а $\check{p}$ - младший (нижний однородный слой). Через $p(D) = p\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right)$ обозначим дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами, соответствующий многочлену p.

Мы будем использовать одно и тоже обозначение для многочлена $p \in \Pi$ и соответствующей кривой, т.е. кривой заданной уравнением $p(x, y) = 0$.

Ниже приведены определения кратности кривой и кратности пересечения двух кривых в точке (см. [4]).

Определение 1. *Пространством кратности кривой p в точке λ назовем пространство многочленов*

$$M_\lambda(p) = \left\{f \in \Pi : (D^\alpha f)(D)p|_\lambda = 0, \alpha \in \mathbb{Z}_+^2\right\}$$

(где $\mathbb{Z}_+$ - множество целых неотрицательных чисел), а размерность пространства $M_\lambda(p)$ назовем арифметической кратностью кривой p в точке λ.

Отметим, что в некотором смысле это определение есть аналог кратности нуля в одномерном случае. Объясним почему. Ниже мы покажем, что $M_{(0,0)}(p) = Z(p)$, где $Z(p)$ - пространство многочленных решений дифференциального уравнения $p(D)f = 0$. Это означает, что арифметическая кратность p в начале координат равна размерности пространства многочленных решений соответствующего уравнения с частными производными. В одномерном случае, 0 имеет кратность k для многочлена $\wp$ тогда и только тогда, когда $\wp(D)x^i = 0,\ i = 0, 1, \ldots, k-1$. В обоих случаях арифметическая кратность начала координат совпадает с размерностью пространства многочленных решений соответствующего дифференциального уравнения.

Приведем определение кратности пересечения двух кривых в точке.

Определение 2. *Пространство многочленов $M_\lambda(p, q) = M_\lambda(p) \cap M_\lambda(q)$ назовем пространством кратности пересечений кривых p и q в точке λ, а размерность пространства $M_\lambda(p, q)$ - числом пересечений или арифметической кратностью пересечения кривых p и q в точке λ.*

Из выше приведенных определений очевидно, что оба пространства $M_\lambda(p)$ и $M_\lambda(p,q)$ D-инвариантны.

В работе [3] доказано, что теорема Безу остается в силе также при таком определении кратности пересечения:

Теорема 1. *Если многочлены $p \in \Pi_m$ и $q \in \Pi_n$ не пересекаются в бесконечности (т.е., старшие члены не имеют общих множителей), то число пересечений равно mn (считая арифметические кратности).*

Точка (a,b) называется r-кратной точкой кривой p, если в точке (a,b) все производные многочлена p, порядка меньше r, равны нулю, и существует по крайней мере одна, отличная от нуля производная порядка r:

$$\frac{\partial^{i+j}}{\partial x^i \partial y^j} p(a,b) = 0,\ i+j<r \text{ и существуют } i_0, j_0 \in \mathbb{Z}_+ \text{ так, что } i_0+j_0=r$$

и

$$\frac{\partial^{i_0+j_0}}{\partial x^{i_0} \partial y^{j_0}} p(a,b) \neq 0.$$

Если (a,b) - r-кратная точка кривой p в заданной системе координат с началом (a,b), то p не будет иметь членов, степени меньше r и будет иметь члены степени r. Иными словами, младший член многочлена p в указанной системе координат будет иметь степень r. Линии, соответствующие множителям младшего члена кривой p, назовем касательными к кривой p в точке (a,b). Таким образом, p имеет в точности r касательных в r-кратной точке.

Следующая теорема является основным результатом данной работы.

Теорема 2. *Если A – m-кратная точка кривой p и n-кратная точка кривой q, то p и q имеют не меньше mn пересечений в точке A и в точности mn пересечений, если p и q не имеют общих касательных в точке A.*

2. Кратность пересечения двух кривых в начале координат

Обозначим пространства кратностей $M_{(0,0)}(p)$ и $M_{(0,0)}(p,q)$ через $M(p)$ и $M(p,q)$, соответственно, пространство многочленных решений дифференциального уравнения $p(D)f=0$ через $Z(p)$ и пространство многочленных решений системы дифференциального уравнения

$$\begin{cases} p(D)f=0 \\ q(D)f=0 \end{cases}$$

через $Z(p,q)=Z(p)\cap Z(q)$.

Применение одного многочлена на другой понимается как применение соответствующего дифференциального оператора.

Лемма 1. *Если* $p, f \in \Pi$, *то* $p(D)f|_{(0,0)} = f(D)p|_{(0,0)}$.

Доказательство. Непосредственно вытекает из того факта, что $p(D)f|_{(0,0)}$ и $f(D)p|_{(0,0)}$ являются постоянными членами многочленов $p(D)f$ и $f(D)p$, соответственно, но после применения многочлена p на q постоянный член возникает тогда и только тогда, когда один из членов p применяется на тот же член q (p и q могут отличаться только коэффициентами). □

Лемма 2. *Пространство* $Z(p)$ D-*инвариантно. Другими словами, если* $f \in Z(p)$ *то* $f_x \in Z(p)$, $f_y \in Z(p)$.

Доказательство. Пусть $f \in Z(p)$, т.е. $p(D)f = 0$. Тогда $p(D)f_x = (px)(D)f = (p(D)f)_x = 0$, т.е. $f_x \in Z(p)$. Таким же образом $f_y \in Z(p)$. □

Лемма 3. *Для любого* $p \in \Pi$, $M(p) = Z(p)$.

Доказательство. Пусть $f \in Z(p)$. Применяя лемму 1 получим, что $f(D)p|_{(0,0)} = p(D)f|_{(0,0)} = 0$, т.е. $f(D)p|_{(0,0)} = 0$. Учитывая лемму 2 получим, что

$$(D^\alpha f)(D)p|_{(0,0)} = 0, \quad \forall \alpha \in \mathbb{Z}_+^2,$$

следовательно $f \in M(p)$. Таким образом, $Z(p) \subseteq M(p)$.
Теперь пусть $f \in M(p)$. Покажем, что $f \in Z(p)$. Применим математическую индукцию по степени f. Если f постоянна, то из $f \in M(p)$ следует, что степень младшего члена многочлена p не меньше 1, откуда следует, что $p(D)f = 0$, т.е. $f \in Z(p)$. Предположим, что для многочленов степени, не выше n, из $f \in M(p)$ следует, что $f \in Z(p)$ и покажем для многочленов степени $n+1$. Пусть $f \in \Pi_{n+1}$ и $f \in M(p)$. Согласно определению $M(p)$, $f_x, f_y \in M(p)$, и, следовательно, применив индукционную гипотезу, получим, что $f_x, f_y \in Z(p)$ (поскольку $f_x, f_y \in \Pi_n$). Последнее означает, что $(p(D)f)_x = p(D)f_x = 0$ и $(p(D)f)_y = p(D)f_y = 0$, откуда следует, что $p(D)f = const$. Таким образом,

$$p(D)f = const = p(D)f|_{(0,0)} = f(D)p|_{(0,0)} = 0,$$

следовательно, $f \in Z(p)$ (последнее равенство следует из $f \in M(p)$). □

Из этой леммы следует, что $M(p,q) = Z(p,q)$.

Лемма 4. *Если многочлены* $p \in \Pi_m^0$ *и* $q \in \Pi_n^0$ *не имеют общих множителей, то* $dim Z(p,q) = mn$.

Доказательство. Однородный многочлен $r \in \Pi_k^0$ имеет следующий вид (см. [5]):

$$r = \prod_{i=1}^{k}(a_i x + b_j y).$$

Из этого представления следует, что два однородных многочлена, не имеющих общих множителей, пересекаются только в начале координат. Согласно теореме Безу, $dim M(p,q) = mn$. Следовательно, применив также лемму 3, получим $dim Z(p,q) = dim M(p,q) = mn$. □

Лемма 5. *Если $f \in Z(p)$, то $\hat{f} \in Z(\check{p})$.*

Доказательство. следует из того факта, что $\check{p}(D)\hat{f} = \widehat{p(D)f}$, и $\widehat{p(D)f} = 0$, так как $f \in Z(p)$. □

Лемма 6. *Если младшие члены многочленов $p \in \Pi_m$ и $q \in \Pi_n$ не имеют общих множителей, то существует базис пространства $Z(p,q)$ состоящий из многочленов, старшие члены которых линейно независимы.*

Доказательство. Из лемм 5 и 4 следует, что $dim Z(p,q) < \infty$. Пусть B – произвольный базис пространства $Z(p,q)$ и пусть k - наибольшое число такое, что старшие члены многочленов степени k из B, линейно зависимы. Обозначим эти многочлены через $b_1, b_2, ..., b_l$. Так как старшие члены этих многочленов линейно зависимы, то существует линейная комбинация $b = c_1 b_1 + c_2 b_2 + ... + c_l b_l \in \Pi_{k-1}$ (где хоть один из коэффициентов $c_1, c_2, ..., c_l$ не равны нулю). С другой стороны, поскольку B – базис и многочлены из B линейно независимы, то $b \notin B$. Следовательно, множество $B \cup \{b\} \setminus \{b_1\}$ также будет базисом пространства $Z(p,q)$. Продолжая таким же образом, после конечного числа шагов получим базис пространства $Z(p,q)$, где старшие члены многочленов линейно независимы. □

Замечание 1. *Из доказательства леммы 6 видно, что базис с линейно независимыми старшими членами существует в любом конечномерном пространстве многочленов.*

Теорема 3. *Пусть $p, q \in \Pi$, $\check{p} \in \Pi_m^0$ и $\check{q} \in \Pi_n^0$. Тогда $dim Z(p,q) \geq mn$, и если многочлены $\check{p}$ и $\check{q}$ не имеют общих множителей, то $dim Z(p,q) = mn$.*

Доказательство. Оценим $dim\,(\Pi_{n+m-2} \cap Z(p,q))$. Пусть $f \in \Pi_{n+m-2}$. Нетрудно видеть, что $p(D)f \in \Pi_{n-2}$, а $q(D)f \in \Pi_{m-2}$. Для того, чтобы найти базис пространства $\Pi_{n+m-2} \cap Z(p,q)$, надо решить систему линейных уравнений с $dim\Pi_{n+m-2}$ переменными и не больше, чем $dim\Pi_{n-2} + dim\Pi_{m-2}$ независимыми условиями. Следовательно,

$$dimZ(p,q) \geq dim\,(\Pi_{n+m-2} \cap Z(p,q)) \geq \dim \Pi_{n+m-2} - dim\Pi_{n-2} - dim\Pi_{m-2} =$$
$$= \binom{n+m}{2} - \binom{n}{2} - \binom{m}{2} = mn.$$

Теперь, покажем, что если $\check{p}$ и $\check{q}$ не имеют общих множителей, то $dimZ(p,q) = mn$. Согласно лемме 6, существует базис $Z(p,q)$ состоящий из многочленов старшие члены которых линейно независимы. Пусть B - такой базис. Применив лемму 5, получим $dimZ(p,q) \leq Z(\check{p},\check{q})$, так как старшие члены многочленов из B линейно независимы и принадлежат $Z(\check{p},\check{q})$, а их количество не может быть больше $dimZ(\check{p},\check{q})$. По лемме 4 $dimZ(\check{p},\check{q}) = mn$, значит $dimZ(p,q) \leq dimZ(\check{p},\check{q}) = mn$. А по теореме 3 $dimZ(p,q) \geq mn$, значит $dimZ(p,q) = mn$. □

Из доказанной теоремы и леммы 3 непосредственно вытекает следующая теорема.

Теорема 4. *Число пересечений двух плоских алгебраических кривых в начале координат не меньше mn и в точности mn, если младшие члены данных кривых не имеют общих множителей, где m и n – порядки младших членов данных кривых.*

Из доказательства теоремы 3 и из теоремы 4 непосредственно вытекает, что если младшие члены кривых p и q имеют порядки m и n соответственно и не имеют общих множителей, то система уравнений

$$\begin{cases} p(D)f = 0 \\ q(D)f = 0 \end{cases}$$

не имеет многочленного решения порядка больше $n + m - 2$.

Следствие *(о продолжении решения). Пусть $p, q \in \Pi$ и многочлены $\check{p}$ и $\check{q}$ не имеют общих множителей. Если $f' \in Z(\check{p},\check{q})$, то существует $f \in \Pi$ такой, что $\hat{f} = f'$ и $f \in Z(p,q)$.*

Доказательство. Пусть B – базис пространства $Z(p,q)$, состоящий из многочленов старшие члены которых линейно независимы (существование такого базиса следует из леммы 6) и пусть $b_1, b_2, ..., b_k$ - многочлены базиса B. Обозначим через $\hat{B}$ множество многочленов $\hat{b}_1, \hat{b}_2, ..., \hat{b}_k$. Из леммы 4 и теоремы 3 следует, что $dimZ(p,q) = dimZ(\check{p},\check{q})$. С другой стороны, согласно лемме 3, $\hat{B} \subseteq Z(\check{p},\check{q})$. Следовательно, $\hat{B}$ - базис пространства $Z(\check{p},\check{q})$. Значит, существуют константы

$c_1, c_2, ..., c_k$ такие, что $f' = c_1\hat{b}_1 + c_2\hat{b}_2 + ... + c_k\hat{b}_k$. Возьмем $f = c_1b_1 + c_2b_2 + ... + c_kb_k$. Нетрудно убедиться, что в этом случае $\hat{f} = f'$ и $f \in Z(p, q)$. □

3. Доказательство теоремы 2

Пусть (a, b) – координаты точки A в произвольной системе координат, а (a', b') – координаты той же точки в смещенной системе координат. Пусть (c, d) вектор смещения, так что

$$x' = x + c,$$

$$y' = y + d.$$

Пусть $r \in \Pi$ и r' – многочлен, соответствующий многочлену r в смещенной системе координат. Тогда, $r'(x', y') = r(x' - c, y' - d)$, и $r'_{x'}(x', y') = r_x(x' - c, y' - d) \cdot (x' - c)_{x'} = r_x(x' - c, y' - d) = r_x(x, y)$. Следовательно, $r'_{x'}(a', b') = r_x(a, b)$, Рчи аналогично, $r'_{y'}(a', b') = r_y(a, b)$. Отсюда следует, что $M_{(a',b')}(r')$ эквивалентно $M_{(a,b)}(r)$ в том смысле, что $f \in M_{(a,b)}(r) \Leftrightarrow f' \in M_{(a',b')}(r')$. С другой стороны нетрудно видеть, что если A – m-кратная точка кривой r, то она также будет m-кратной точкой кривой r'. Из определения касательной к кривой очевидно что $c_1x + c_2y$ - касательная к r в точке A тогда и только тогда, когда $c_1x' + c_2y'$ касательная к r' в той же точке A. Таким образом, сдвигая систему координат вектором $(-a, -b)$, из условий теоремы мы будем иметь, что $(0, 0)$ - m-кратная точка p' и n-кратная точка q' и p' и q' имеют общую касательную в начале координат тогда и только тогда, когда p и q имеют таковую в точке A. Так как $M_{(a,b)}(p, q)$ и $M_{(0,0)}(p', q')$ изоморфны, то имеем, что $dimM_{(a,b)}(p, q) = dimM_{(0,0)}(p', q')$. Таким образом, согласно теореме 4, $dimM_A(p, q) \geq mn$ и $dimM_A(p, q) = mn$, если кривые p и q не имеют общих касательных в точке A. □

Abstract. The paper studies the multiplicity of intersecting point of two plane algebraic curves. The multiplicity is characterized by means of operators with partial derivatives. It is proved that if A is a point of multiplicity m for one of the curves and, a point of multiplicity n for the other curve, then the arithmetical multiplicity of the intersection (or the number of intersections) of the curves in A, is not less than mn and is equal to mn when the curves do not have common tangents at the point A.

Список литературы

[1] M. G. Marinari, H. M. Möller and T. Mora, "Gröbner bases of ideals given by dual bases", Proceedings of ISAAC (1991) (S. Watt, Ed.), New York, NY, ACM Press, Bonn, Germany, 55 – 63 (1991).

[2] C. de Boor and A. Ron, "The least solution for the polynomial interpolation problem", Math. Z. **210** (3), 347 – 378 (1992).
[3] H. Hakopian, "The multivariate fundamental theorem of Algebra, Bezout's theorem and Nullstellensatz", Approximation Theory (D. K. Dimitrov et al., eds.), Marin Drinov Acad. Publ. House, Sofia, 73 – 97 (2004).
[4] H. Hakopian and M. Tonoyan, "Partial differential analogs of ordinary differential equations and systems", New York J. Math., http://nyjm.albany.edu:8000/j/2004/10-6.html, **10**, 89–116 (2004).
[5] R. Walker, Algebraic Curves, Princeton, New Jersey (1950).

Поступила 6 ноября 2009