Известия НАН Армении. Математика, 40, № 6, 2005, 70–82

ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЯДОВ ФУРЬЕ–СТИЛТЬЕСА И ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

А. А. Талалян

Институт математики НАН Армении

Резюме. В статье исследуются граничные свойства интегралов Пуассона-Стилтьеса и доказываются теоремы единственности рядов Фурье-Стилтьеса при некоторых ограничениях на поведении фиксированных подпоследовательностей частичных сумм и фиксированных последовательностей средних Абеля этих рядов.

§1. ВВЕДЕНИЕ

Для заданной периодической, с периодом 1, непрерывной функции $F(x)$ ограниченной вариации, рассмотрим ряды

$$dF \sim \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{2\pi ikx}, \quad c_k = \int_0^1 e^{-2\pi ikx} dF(x). \tag{1}$$

Имеем

$$\begin{aligned} c_k = \int_0^1 e^{-2\pi ikx}\, dF(x) = e^{-2\pi ikx} F(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 F(x) de^{-2\pi ikx} = \\ = 2\pi ik \int_0^1 e^{-2\pi ikx} F(x)\, dx \end{aligned} \tag{2}$$

и

$$\int_0^1 e^{-2\pi ikx} F(x)\, dx = \frac{c_k}{2\pi ik}, \quad k = \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{3}$$

Ряд Фурье функции $F(x)$ имеет вид

$$F(x) \sim c + \sum_{k=-\infty}^{+\infty}{}' \frac{c_k}{2\pi ik} e^{2\pi ikx}, \tag{4}$$

где $\sum'$ – означает отсутствие члена с $k = 0$.

Рассмотрим ряд Фурье-Стилтьеса функции $F(x)$ по системе Хаара :

$$dF(x) = a_0^{(0)}\chi_0^{(0)}(x) + a_1^{(0)}\chi_1^{(0)}(x) + \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{2^m} a_k^{(m)}\chi_k^{(m)}(x), \tag{5}$$

где

$$\chi_0^{(0)}(x) = 1, \quad x \in (0,1), \quad \chi_1^{(0)}(x) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad x \in (0,1/2), \\ -1, & \text{если} \quad x \in (1/2,1). \end{cases}$$

$$\chi_k^{(m)}(x) = \begin{cases} \sqrt{2^m}, & \text{если} \quad x \in \left(\frac{2k-2}{2^{m+1}}, \frac{2k-1}{2^{m+1}}\right), \\ -\sqrt{2^m}, & \text{если} \quad x \in \left(\frac{2k-1}{2^{m+1}}, \frac{2k}{2^{m+1}}\right), \\ 0, & \text{если} \quad x \in (0,1) - \left(\frac{k-1}{2^m}, \frac{k}{2^m}\right). \end{cases} \tag{6}$$

Имеем

$$a_0^{(0)} = \int_0^1 dF(x) = F(1) - F(0), \quad a_1^{(0)} = \big(F(1/2) - F(0)\big) - \big(F(1) - F(1/2)\big).$$

$$a_k^{(m)} = \sqrt{2^m}\left(\int_{\frac{2k-2}{2^{m+1}}}^{\frac{2k-1}{2^{m+1}}} dF(x) - \int_{\frac{2k-1}{2^{m+1}}}^{\frac{2k}{2^{m+1}}} dF(x)\right) =$$

$$= \sqrt{2^m}\left(2F\left(\frac{2k-1}{2^{m+1}}\right) - F\left(\frac{2k-2}{2^{m+1}}\right) - F\left(\frac{2k}{2^{m+1}}\right)\right), \tag{7}$$

где интегралы понимаются в смысле предельного перехода к концам интервала. Для краткости будем обозначать

$$\Delta_k^{(m)} = \left(\frac{k-1}{2^m}, \frac{k}{2^m}\right); \quad \Delta_{k,2}^{(m)}F(x) = 2F\left(\frac{2k-1}{2^{m+1}}\right) - F\left(\frac{2k-2}{2^{m+1}}\right) - F\left(\frac{2k}{2^{m+1}}\right).$$

Частные суммы $A_{2^m}(x)$ ряда (5) имеют при $m = 0, 1, \ldots$ и $1 \le k \le 2^m$ следующие значения

$$A_{2^m}(x) = 2^m\left(F\left(\frac{k}{2^m}\right) - F\left(\frac{k-1}{2^m}\right)\right), \quad x \in \left(\frac{k-1}{2^m}, \frac{k}{2^m}\right). \tag{8}$$

Так как ряд (4) равномерно сходится к $F(x)$ на $[0,1]$, то из (4), (7) и (8) получаем

$$A_{2^m}(x) = 2^m \sum_{n=-\infty}^{+\infty}{}' \frac{c_n}{2\pi i n}\left(e^{2\pi i n \frac{k}{2^m}} - e^{2\pi i n \frac{k-1}{2^m}}\right), \quad x \in \left(\frac{k-1}{2^m}, \frac{k}{2^m}\right). \tag{9}$$

$$a_k^{(m)} = \sqrt{2^m} \sum_{n=-\infty}^{+\infty}{}' \frac{c_n}{2\pi i n} \Delta_{k,2}^{(m)} e^{2\pi i n x} = \sqrt{2^m} \Delta_{k,2}^{(m)} F(x). \tag{10}$$

Поэтому, в силу непрерывности $F(x)$ на $[0, 1]$, для некоторой последовательности ε_m, $\varepsilon_m > 0$, $\lim_{m\to\infty} \varepsilon_m = 0$ выполняются неравенства :

$$|a_k^{(m)}| \leq \sqrt{2^m} \varepsilon_m, \quad m = 0, 1, \ldots, \quad 1 \leq k \leq 2^m. \tag{11}$$

Эти неравенства в дальнейшем будут использованы в следующей эквивалентной форме :

$$\frac{\left|a_k^{(m)}\right|}{\max_x \left|\chi_k^{(m)}(x)\right|} \leq \varepsilon_m, \quad 1 \leq k \leq 2^m, \quad m = 0, 1, 2, \ldots, \quad \lim_{m\to\infty} \varepsilon_m = 0. \tag{12}$$

Заметим, что из (8) следует сходимость почти всюду ряда (5) на $[0, 1]$ к интегрируемой функции $F'(x)$. Известно также, что интеграл Пуассона-Стилтьеса функции $F(x)$ по радиальным направлениям почти всюду сходится к $F'(x)$, т.е.

$$\lim_{r\to 1} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} r^{|n|} c_n e^{2\pi i n x} = F'(x) \quad \text{почти всюду на} \quad x \in [0, 1]. \tag{13}$$

§2. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Теорема 1. *Пусть $F(x)$ – непрерывная на $[0, 1]$, периодическая, с периодом 1, функция конечной вариации и пусть $S_{N_j}(x)$, $j = 1, 2, \ldots$, – фиксированная последовательность частичных сумм ряда Фурье-Стилтьеса функции $F(x)$, обладающая следующим свойством : Для любой подпоследовательности $\{S_{N_{j_k}}(x)\} \subset \{S_{N_j}(x)\}$ существует счётное множество E такое, что для произвольной точки $x \notin E$ существует $\delta(x) > 0$ такое, что*

$$\liminf_{k\to\infty} \left(\max_{t\in(x-\delta, x+\delta)} |S_{n_{j_k}}(t)| \right) < \infty. \tag{14}$$

Тогда $F(x)$ абсолютно непрерывна и этот ряд является рядом Фурье функции $F'(x)$.

Пусть $A(r_j, x)$, $r_j \to 1$, - произвольная фиксированная последовательность средних Абеля-Пуассона $A(r, x)$ ряда Фурье-Стилтьеса функции $F(x)$. Допустим, что для любой подпоследовательности $\{A(r_{j_k}, x)\} \subset \{A(r_j, x)\}$ существует счетное множество E такое, что для произвольной точки $x \overline{\in} E$ существует $\delta(x) > 0$ такое, что

$$\liminf_{k\to\infty} \left(\max_{t\in(x-\delta, x+\delta)} |A(r_{j_k}, t)| \right) < \infty. \tag{15}$$

Тогда $F(x)$ абсолютно непрерывна и ее ряд Фурье-Стилтьеса является рядом Фурье функции $F'(x)$.

Определение. Непрерывная на $[0,1]$, периодическая, с периодом 1, функция $F(x)$ конечной вариации называется **строго сингулярной**, если на любом интервале $(\alpha,\beta)\subset[0,1]$ она не является абсолютно непрерывной.

Теорема 2. *Пусть $F(x)$ – непрерывная на $[0,1]$, строго сингулярная, периодическая функция и пусть $\{S_{N_j}(x)\}$ и $\{A(r_j,x)\}$, $r_j\to 1$, – некоторые фиксированные последовательности частичных сумм и средних Абеля-Пуассона ряда Фурье–Стилтьеса функции $F(x)$. Тогда существуют подпоследовательности $\{S_{N_{j_k}}(x)\}\subset\{S_{N_j}(x)\}$ и $\{A(r_{j_k},x)\}\subset\{A(r_j,x)\}$ такие, что на множествах E_1 и E_2 мощности континуума выполняются*

$$\lim_{k\to\infty}|S_{N_{j_k}}(x)|=+\infty,\quad x\in E_1 \quad и \quad \lim_{k\to\infty}|A(r_{j_k},x)|=+\infty,\quad x\in E_2. \tag{16}$$

§3. ВСПОМОГАТЕЛЬНАЯ ЛЕММА

Следующая лемма является аналогом леммы, доказанной в работе [4].

Лемма. *Пусть коэффициенты ряда по системе Хаара*

$$d_0^{(0)}\chi_0^{(0)}(x)+d_1^{(0)}\chi_1^{(0)}(x)+\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{2^m}d_k^{(m)}\chi_k^{(m)}(x) \tag{17}$$

удовлетворяют условию :

$$\liminf_{m\to\infty}\frac{\left|d_{k(m)}^{(m)}\right|}{\max\left|\chi_{k(m)}^{(m)}(x)\right|}=0 \tag{18}$$

для любой последовательности $\chi_{k(m)}^{(m)}(x)$, $m=0,1,2,\ldots$, носители которых содержатся в интервалах $\Delta_{k(m)}^{(m)}=\left(\frac{k(m)-1}{2^m},\frac{k(m)}{2^m}\right)$. Если частичная сумма $D_{2^m}(x)$ ряда (17) отлична от нуля на одном из своих интервалов постоянства $\Delta_k^{(m)}=\left(\frac{k-1}{2^m},\frac{k}{2^m}\right)$, то существуют частичная сумма $D_{2^{m_1}}(x)$, $m_1>m$, и два интервала постоянства $\Delta_{k_1}^{(m_1)}$, $\Delta_{k_2}^{(m_1)}$ этой суммы такие, что

$$\Delta_{k_1}^{(m_1)}\cup\Delta_{k_2}^{(m_1)}\subset\Delta_k^{(m)} \quad и \quad \overline{\Delta}_{k_1}^{(m_1)}\cap\overline{\Delta}_{k_2}^{(m_1)}=\left[\frac{k_1-1}{2^{m_1}},\frac{k_1}{2^{m_1}}\right]\cap\left[\frac{k_2-1}{2^{m_1}},\frac{k_2}{2^{m_1}}\right]=\emptyset, \tag{19}$$

а частичная сумма $D_{2^{m_1}}(x)$ отлична от нуля на этих интервалах.

Доказательство. Пусть

$$D_{2^m}(x) = d, \quad x \in \Delta_{k(m)}^{(m)}, \quad d > 0. \tag{19}$$

Рассмотрим слагаемые $d_{k(m+i)}^{(m+i)} \chi_{k(m+i)}^{(m+i)}(x)$ ряда (17), обладающие следующими свойствами : во первых

$$\Delta_{k(m)}^{(m)} \supset \Delta_{k(m+1)}^{(m+1)} \supset \Delta_{k(m+2)}^{(m+2)} \supset \cdots \supset \Delta_{k(m+i)}^{(m+i)} \cdots \tag{20}$$

а во вторых, если обозначить через $\Delta_{k(m+i)}^{+(m+i)}$ ту половину интервала $\Delta_{k(m+i)}^{(m+i)}$ где $d_{k(m+i)}^{(m+i)} \chi_{k(m+i)}^{(m+i)}(x)$ неотрицательна, то

$$d_{k(m+i)}^{(m+i)} \chi_{k(m+i)}^{(m+i)}(x) \geq 0, \quad x \in \Delta_{k(m+i)}^{+(m+i)}, \quad \Delta_{k(m+i+1)}^{(m+i+1)} \subset \Delta_{k(m+i)}^{+(m+i)}, \quad i = 1, 2, \ldots \tag{21}$$

Если через $\Delta_{k(m+i)}^{-(m+i)}$ обозначить другую половину интервала $\Delta_{k(m+i)}^{(m+i)}$, то

$$d_{k(m+i)}^{(m+i)} \chi_{k(m+i)}^{(m+i)}(x) \leq 0, \quad x \in \Delta_{k(m+i)}^{-(m+i)}, \quad \Delta_{k(m+i)}^{-(m+i)} = \Delta_{k(m+i)}^{(m+i)} \setminus \Delta_{k(m+i)}^{+(m+i)} \tag{22}$$

Случай

$$d + \sum_{i=1}^{p} d_{k(m+i)}^{(m+i)} \chi_{k(m+i)}^{(m+i)}(x) = 0, \quad x \in \Delta_k^{(m)} \setminus \overline{\Delta}_{k(m+p)}^{+(m+p)}, \quad p = 1, 2, \ldots \tag{23}$$

противоречит условию (18) и следовательно не может выполнятся. Действительно, ясно, что при выполнении (23)

$$d_{k(m+1)}^{(m+1)} \chi_{k(m+1)}^{(m+1)}(x) = 2d, \quad x \in \Delta_{k(m+1)}^{+(m+1)}, \ldots, d_{k(m+p)}^{(m+p)} \chi_{k(m+p)}^{(m+p)}(x) = 2^p d,$$

$x \in \Delta_{k(m+p)}^{+(m+p)}$, и следовательно

$$\frac{\left| d_{k(m+p)}^{(m+p)} \right|}{\max\limits_{x} \left| \chi_{k(m+p)}^{(m+p)}(x) \right|} = \frac{2^p d}{2^{m+p}} = \frac{d}{2^m}, \tag{24}$$

для всех $p = 1, 2, \ldots$, что противоречит условию (18).

Итак, существует наименьшее p_0, для которого

$$d + \sum_{i=1}^{p_0} d_{k(m+i)}^{(m+i)} \chi_{k(m+i)}^{(m+i)}(x) = d_0 \neq 0, \quad x \in \Delta_{k(m+p_0)}^{-(m+p_0)}. \tag{25}$$

Она является частичной суммой $D_{2^{(m+p_0)}}$ ряда (17), принимающая отличные от нуля значения на интервалах $\Delta_{k(m+p_0)}^{+(m+p_0)}$ и $\Delta_{k(m+p_0)}^{-(m+p_0)}$. Повторяя вышеприведенные рассуждения для каждого из них, очевидно находим две частичные суммы : $D_{2^{m'}}(x)$ и $D_{2^{m''}}(x)$ и также два интервала постоянства $\Delta_{k'}^{(m')}$ и $\Delta_{k''}^{(m'')}$ этих сумм такие, что $m' > m$, $m'' > m$ и

$$D_{2^{m'}}(x) = d', \quad x \in \Delta_{k'}^{(m')}, \quad d' \neq 0, \quad D_{2^{m''}}(x) = d'', \quad x \in \Delta_{k''}^{(m'')}, \quad d'' \neq 0, \tag{26}$$

$$\overline{\Delta}_{k'}^{(m')} \cap \overline{\Delta}_{k''}^{(m'')} = \left[\frac{k'-1}{2^{m'}}, \frac{k'}{2^{m'}}\right] \cap \left[\frac{k''-1}{2^{m''}}, \frac{k''}{2^{m''}}\right] = \emptyset, \quad \Delta_{k'}^{(m')} \cup \Delta_{k''}^{(m'')} \subset \Delta_k^{(m)}.$$

В качестве числа m_1 формулировки леммы можно взять $m_1 = \max(m', m'')$ и затем, если например $m' < m''$, можно взять $m_1 = m''$, $k_1 = k''$ и выбрать интервал $\Delta_{k_1}^{(m_1)}$ в $\Delta_{k'}^{(m')}$ таким образом, чтобы все отличные от нуля слагаемые в (17) с $m' < m \leq m''$ имели бы знак числа d'.

§4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1

Рассмотрим ряд Фурье–Хаара функции $F'(x)$:

$$F'(x) \sim c_0^{(0)}\chi_0^{(0)}(x) + c_1^{(0)}\chi_1^{(0)}(x) + \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{2^m} c_k^{(m)}\chi_k^{(m)}(x), \quad c_k^{(m)} = \int_0^1 F'(x)\chi_k^{(m)}(x)dx, \tag{27}$$

и ряд

$$d_0^{(0)}\chi_0^{(0)}(x) + d_1^{(0)}\chi_1^{(0)}(x) + \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{2^m} d_k^{(m)}\chi_k^{(m)}(x), \tag{28}$$

где $d_0^{(0)} = a_0^{(0)} - c_0^{(0)}$, $d_1^{(0)} = a_1^{(0)} - c_1^{(0)}$, $d_k^{(m)} = a_k^{(m)} - c_k^{(m)}$, $m = 1, 2, \ldots$, $1 \leq k \leq 2^m$. Ряд (28) почти всюду сходится к нулю, так как ряды (27) и (5) почти всюду сходятся к $F'(x)$. Следовательно, чтобы доказать Теорему 1 достаточно показать, что все коэффициенты $d_k^{(m)}$ равны нулю. Действительно, если все $d_k^{(m)} = 0$, то ввиду (8)

$$F\left(\frac{k}{2^m}\right) - F\left(\frac{k-1}{2^m}\right) = \int_{\frac{k-1}{2^m}}^{\frac{k}{2^m}} F'(x)dx, \quad m \geq 0, \quad 1 \leq k \leq 2^m.$$

Поэтому, в силу непрерывности $F(x)$, эта функция должна быть абсолютно непрерывной и, следовательно, получаем

$$c_k = \int_0^1 e^{-2\pi i k x}dF(x) = \int_0^1 e^{-2\pi i k x}F'(x)dx. \tag{29}$$

Допустим, что не все коэффициенты $d_k^{(m)}$ равны нулю. Тогда обозначив через $D_{2^m}(x)$ частичные суммы ряда (28), получим

$$D_{2^m}(x) = A_{2^m}(x) - B_{2^m}(x), \quad m = 0, 1, \ldots, \tag{30}$$

где $A_{2^m}(x)$ и $B_{2^m}(x)$ — частичные суммы рядов (5) и (27), соответственно. Тогда, в силу предположения, существует частичная сумма $D_{2^{m_0}}$, которая отлична от нуля на некотором интервале $\Delta_{k_0}^{(m_0)} = \left(\frac{k_0-1}{2^{m_0}}, \frac{k_0}{2^{m_0}}\right)$ своего постоянства. Тогда, (18) выполняется для коэффициентов $d_k^{(m)}$, поскольку коэффициенты $a_k^{(m)}$ удовлетворяют условию (18), а $c_k^{(m)}$ удовлетворяют условию (18), поскольку они являются коэффициентами Фурье–Хаара интегрируемой функции $F'(x)$. Следовательно, по Лемме существует частичная сумма $D_{2^{m_1}}(x)$, $m_1 > m_0$, обладающая двумя интервалами постоянства $\Delta_{k_1'}^{(m_1)}$ и $\Delta_{k_1''}^{(m_1)}$ такая, что $\overline{\Delta}_{k_1'}^{(m_1)} \cap \overline{\Delta}_{k_1''}^{(m_1)} = \emptyset$, $\overline{\Delta}_{k_1'}^{(m_1)} \cup \overline{\Delta}_{k_1''}^{(m_1)} \subset \Delta_{k_0}^{(m_0)}$ и

$$D_{2^{m_1}}(x) = d_{k'}^{(m_1)} \neq 0, \quad x \in \Delta_{k_1'}^{(m_1)}, \quad D_{2^{m_1}}(x) = d_{k''}^{(m_1)} \neq 0, \quad x \in \Delta_{k_1''}^{(m_1)}. \tag{31}$$

В дальнейшем будем пользоваться следующим утверждением.

Утверждение. *Если некоторая частичная сумма $D_{2^{m_0}}(x)$ ряда (28) отлична от нуля на некотором интервале $\Delta_{k_0}^{(m_0)}$*, т.е.

$$D_{2^{m_0}}(x) = d \neq 0, \quad x \in \left(\frac{k_0-1}{2^{m_0}}, \frac{k_0}{2^{m_0}}\right), \tag{32}$$

то для любого $M > 0$ существует $m > m_0$ такое, что условия

$$|A_{2^m}(x)| > M, \quad x \in \Delta_k^{(m)} \quad \text{и} \quad D_{2^m}(x) = d' \neq 0, \quad x \in \Delta_k^{(m)}. \tag{33}$$

выполняются на некотором интервале $\Delta_k^{(m)} \subset \Delta_{k_0}^{(m_0)}$.

Доказательство. Для любого $M > 0$ неравенства

$$|A_{2^m}(x)| \le M + |B_{2^m}(x)|, \quad x \in \Delta_{k_0}^{(m_0)}, \quad m > m_0, \tag{34}$$

не могут выполнятся для всех $m > m_0$ и $x \in \Delta_{k_0}^{(m_0)}$: в противном случае частичные суммы $A_{2^m}(x)$ имели бы равномерно-абсолютно непрерывные интегралы на $\Delta_{k_0}^{(m_0)}$, так как суммы $B_{2^m}(x)$ обладают этим свойством как частичные суммы интегрируемой функции. Но при $m > m_0$

$$D_{2^m}(x) = d + \sum_{j=m_0+1}^{m} \sum_{k=1}^{2^j} d_k^{(j)} \chi_k^{(j)}(x), \quad x \in \Delta_{k_0}^{(m_0)}, \tag{35}$$

где

$$\int_{\frac{k_0-1}{2^{m_0}}}^{\frac{k_0}{2^{m_0}}} d_k^{(j)} \chi_k^{(j)}(x)dx = 0, \quad j > j_0, \tag{36}$$

и

$$\lim_{m\to\infty} D_{2^m}(x) = 0 \tag{37}$$

почти всюду на $\Delta_{k_0}^{(m_0)}$. С другой стороны, при выполнении (34), для всех m,

$$|D_{2^m}(x)| \le |A_{2^m}(x)| + |B_{2^m}(x)| \le M + 2\,|B_{2^m}(x)|, \quad x \in \Delta_{k_0}^{(m_0)}, \tag{38}$$

и следовательно, $D_{2^m}(x)$ тоже будет иметь равностепенно абсолютно непрерывные интегралы. Переходя к пределу под знаком интеграла получили бы

$$\lim_{m\to\infty} \int_{\Delta_{k_0}^{(m_0)}} D_{2^m}(x)\,dx = 0. \tag{39}$$

С другой стороны, согласно (35) и (36) имеем

$$\int_{\Delta_{k_0}^{(m_0)}} D_{2^m}(x)dx = d\cdot\frac{1}{2^{m_0}} \ne 0, \quad m > m_0. \tag{40}$$

Следовательно, для любого $M > 0$ существует некоторое $m > m_0$ и частичная сумма $A_{2^m}(x)$ такая, что

$$|A_{2^m}(x)| > M + |B_{2^m}(x)|, \quad x \in \Delta_k^{(m)}, \quad \Delta_k^{(m)} \subset \Delta_{k_0}^{(m_0)}. \tag{41}$$

Но

$$|D_{2^m}(x)| > ||A_{2^m}(x)| - |B_{2^m}(x)|| > M, \quad x \in \Delta_k^{(m)}.$$

Утверждение доказано.

Применяя это утверждение к каждому интервалу $\Delta_{k_1'}^{(m_1)}$ и $\Delta_{k_1''}^{(m_1)}$, можно определить номер $n_1 > m_1$ и два интервала $\Delta_{k_1}^{(n_1)}$ и $\Delta_{k_2}^{(n_1)}$ такие, что

$$|A_{2^{n_1}}(x)| > 1, \quad x \in \Delta_{k_1}^{(n_1)}, \quad |A_{2^{n_1}}(x)| > 1, \quad x \in \Delta_{k_2}^{(n_1)},$$

$$\Delta_{k_1}^{(n_1)} \subset \Delta_{k_1'}^{(m_1)}, \quad \Delta_{k_2}^{(n_1)} \subset \Delta_{k_1''}^{(m_1)}, \tag{42}$$

и, одновременно

$$D_{2^{n_1}}(x) = const \ne 0, \quad x \in \Delta_{k_1}^{(n_1)}, \quad D_{2^{n_1}}(x) = const \ne 0, \quad x \in \Delta_{k_2}^{(n_1)}. \tag{42}$$

Продолжая этот процесс неограниченно, очевидно можно определить последовательность $\{A_{2^{n_i}}(x)\}$ частичных сумм ряда (5) и интервалы постоянства этих частичных сумм $\Delta_{j_1 j_2 \cdots j_i}^{(n_i)}$, $j_k = 0$ или 1, обладающие следующими свойствами :

$$|A_{2^{n_i}}(x)| > i, \quad x \in \Delta_{j_1 j_2 \cdots j_i}^{(n_i)}, \quad i = 1, 2, \ldots, \tag{44}$$

$$\overline{\Delta}^{(n_i)}_{j_1 j_2 \dots j_i} \cap \overline{\Delta}^{(n_i)}_{k_1 k_2 \dots k_i} = \emptyset \quad \text{если} \quad (j_1, j_2, \dots, j_i) \neq (k_1, k_2, \dots, k_i), \tag{45}$$

$$\overline{\Delta}^{(n_i)}_{j_1 j_2 \dots j_{i-1} j_i} \subset \Delta^{(n_i)}_{j_1 j_2 \dots j_{i-1}}. \tag{46}$$

Обозначим точку пересечения интервалов $\overline{\Delta}^{(n_1)}_{j_1} \supset \overline{\Delta}^{(n_2)}_{j_1 j_2} \supset \dots \supset \overline{\Delta}^{(n_k)}_{j_1 j_2 \dots j_k} \supset \dots$ через $x_{j_1 j_2 \dots j_k \dots}$, $j_k = 0$ или 1. Очевидно, что эти точки попарно отличны друг от друга и множество этих точек $\{x_{j_1 j_2 \dots j_k \dots}\}$ имеет мощность континуума. Обозначая один из интервалов $\Delta^{(n_k)}_{j_1 j_2 \dots j_k}$ через $\left(\frac{\nu-1}{2^{n_k}}, \frac{\nu}{2^{n_k}}\right)$, получаем

$$A_{2^{n_k}}(x) = 2^{n_k}\left[F\left(\frac{\nu}{2^{n_k}}\right) - F\left(\frac{\nu-1}{2^{n_k}}\right)\right], \quad x \in \left(\frac{\nu-1}{2^{n_k}}, \frac{\nu}{2^{n_k}}\right). \tag{47}$$

Для последовательностей $\{S_{N_j}(x)\}$ и $\{A(r_j, x)\}$ из формулировки теоремы 1, имеем

$$2^{n_k} \int_{\frac{\nu-1}{2^{n_k}}}^{\frac{\nu}{2^{n_k}}} S_{N_j}(x)\, dx = 2^{n_k} \sum_{n=-N_j}^{N_j} \frac{c_n}{2\pi i n}\left(e^{2\pi i n \frac{\nu}{2^{n_k}}} - e^{2\pi i n \frac{\nu-1}{2^{n_k}}}\right), \tag{48}$$

$$2^{n_k} \int_{\frac{\nu-1}{2^{n_k}}}^{\frac{\nu}{2^{n_k}}} A(r_j, x) dx = 2^{n_k} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} r_j^{|n|} \frac{c_n}{2\pi i n}\left(e^{2\pi i n \frac{\nu}{2^{n_k}}} - e^{2\pi i n \frac{\nu-1}{2^{n_k}}}\right). \tag{49}$$

Кроме того, из (48), (49) и (9) следует

$$\lim_{j\to\infty} \int_{\frac{\nu-1}{2^{n_k}}}^{\frac{\nu}{2^{n_k}}} S_{N_j}(x)\, dx = A_{2^{n_k}}(x),$$

$$\lim_{j\to\infty} 2^{n_k} \int_{\frac{\nu-1}{2^{n_k}}}^{\frac{\nu}{2^{n_k}}} A(r_j, x)\, dx = A_{2^{n_k}}(x), \quad x \in \left(\frac{\nu-1}{2^{n_k}}, \frac{\nu}{2^{n_k}}\right),$$

$$|A_{2^{n_k}}(x)| = const > k, \quad x \in \left(\frac{\nu-1}{2^{n_k}}, \frac{\nu}{2^{n_k}}\right). \tag{50}$$

Поэтому, существуют некоторые подпоследовательности $\{N_{j_k}\}$ и $\{r_{j_k}\}$, $N_{j_k} \uparrow +\infty$, $r_{j_k} \to 1$, и некоторые точки $\xi_k, \xi'_k \in \left(\frac{\nu-1}{2^{n_k}}, \frac{\nu}{2^{n_k}}\right)$ такие, что

$$|S_{N_{j_k}}(\xi_k)| > k \quad \text{и} \quad |A(r_{j_k}, \xi'_k)| > k. \tag{51}$$

Ясно, что $\{N_{j_k}\}$ и $\{r_{j_k}\}$ можно выбрать одновременно для всех интервалов $\Delta^{(n_k)}_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_k}$, и тогда найдем точки

$$\xi_{\nu_1 \dots \nu_k} \in \Delta^{(n_k)}_{\nu_1 \dots \nu_k}, \quad \xi'_{\nu_1 \dots \nu_k} \in \Delta^{(n_k)}_{\nu_1 \dots \nu_k}, \quad \nu_i = 0 \text{ or } 1, \tag{52}$$

такие, что

$$|S_{N_{j_k}}(\xi_{\nu_1 \dots \nu_k})| > k \quad \text{и} \quad |A(r_{j_k}, \xi'_{\nu_1 \dots \nu_k})| > k. \tag{53}$$

Из определения множества $Q = \{x_{\nu_1 \dots \nu_k \dots}\}$ следует, что

$$\liminf_{k\to\infty}\left(\max_{t\in(x-\delta,x+\delta)}|S_{N_{j_k}}(t)|\right) = +\infty,$$

$$\liminf_{k\to\infty}\left(\max_{t\in(x-\delta,x+\delta)}|A(r_{j_k},t)|\right) = +\infty \tag{53}$$

для любого $x \in Q$ и $\delta(x) > 0$. Таким образом, предположение, что утверждение Теоремы 1 не верно, приводит к противоречию ((53) противоречит (14) и (15)). Теорема 1 доказана.

§5. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2

Если $F(x)$ – непрерывная, строго сингулярная функция конечной вариации и $(\alpha,\beta) \subset [0,1]$ – произвольный интервал, то равенство

$$F\left(\frac{k}{2^m}\right) - F\left(\frac{k-1}{2^m}\right) = \int_{\frac{k-1}{2^m}}^{\frac{k}{2^m}} F'(x)\,dx$$

не может выполнятся для всех $\left(\frac{k-1}{2^m},\frac{k}{2^m}\right) \subset (\alpha,\beta)$. Поэтому, для любого $(\alpha,\beta) \subset [0,1]$ существует двоичный интервал $\Delta_k^{(m)} = \left(\frac{k-1}{2^m},\frac{k}{2^m}\right)$ такой, что

$$\Delta_k^{(m)} \subset (\alpha,\beta) \quad \text{и} \quad \left(F\left(\frac{k}{2^m}\right) - F\left(\frac{k-1}{2^m}\right)\right) - \int_{\frac{k-1}{2^m}}^{\frac{k}{2^m}} F'(x)\,dx \neq 0.$$

Это означает, что

$$D_{2^m}(x) = A_{2^m}(x) - B_{2^m}(x) = d \neq 0, \quad x \in \Delta_k^{(m)}, \tag{54}$$

где $A_{2^m}(x)$ и $B_{2^m}(x)$ суть частичные суммы рядов (5) и (27). Как и в предыдущем случае, (см. доказательство Теоремы 1), существуют некоторое $n_1 > m$ и два интервала $\Delta_{i_1}^{(n_1)}$, $i_1 = 0,1$, постоянства сумм $A_{2^{n_1}}(x)$ и $D_{2^{n_1}}(x)$ такие, что

$$\overline{\Delta}_0^{(n_1)} \cap \overline{\Delta}_1^{(n_1)} = \emptyset, \quad \overline{\Delta}_0^{(n_1)} \cup \overline{\Delta}_1^{(n_1)} \subset \Delta_k^{(m)}, \tag{55}$$

$$|A_{2^{n_1}}(x)| > 1, \quad x \in \Delta_0^{(n_1)} \cup \Delta_1^{(n_1)}, \quad D_{2^{n_1}}(x) \neq 0, \quad x \in \Delta_0^{(n_1)} \cup \Delta_1^{(n_1)}. \tag{56}$$

Если $\{N_j\}$ и $\{r_j\}$ суть последовательности из формулировки Теоремы 2, то согласно (50) имеем

$$\lim_{j\to\infty}\frac{1}{|\Delta_{i_1}^{(n_1)}|}\int_{\Delta_{i_1}^{(n_1)}} S_{N_j}(x)dx = A_{2^{n_1}}(x).$$

$$\lim_{j\to\infty}\frac{1}{|\Delta_{i_1}^{(n_1)}|}\int_{\Delta_{i_1}^{(n_1)}} A(r_j,x)dx = A_{2^{n_1}}(x), \quad x\in\Delta_{i_1}^{(n_1)}. \tag{57}$$

Следовательно, согласно (56) существуют некоторые интервалы δ_{i_1}, $i_1=0$ или 1, и числа N_{j_1}, r_{j_1} такие, что

$$\overline{\delta}_{i_1}\subset\Delta_{i_1}^{(n_1)}, \quad i_1=0 \text{ or } 1, \tag{58}$$

$$|S_{N_{j_1}}(x)|>1, \quad |A(r_{j_1},x)|>1, \quad x\in\overline{\delta}_0\cup\overline{\delta}_1. \tag{59}$$

С другой стороны, повторяя рассуждения доказательства Теоремы 1 найдем $n_2>n_1$, некоторые интервалы постоянства $\Delta_{i_1i_2}^{(n_2)}$, $i_1=0,1$, $i_2=0,1$, и некоторые суммы $A_{2^{n_2}}(x)$ такие, что

$$\overline{\Delta}_{i_1i_2}^{(n_2)}\subset\delta_{i_1}, \quad |A_{2^{n_2}}(x)|>2, \quad x\in\overline{\Delta}_{i_1i_2}^{(n_2)}, \quad i_1=0 \text{ или } 1, \quad i_2=0 \text{ или } 1. \tag{60}$$

Продолжая этот процесс, находим интервалы $\Delta_{i_1i_2\dots i_k}^{(n_k)}$ и $\delta_{i_1i_2\dots i_k}$, а также некоторые последовательности $\{S_{N_{j_k}}(x)\}$ и $\{A(r_{j_k},x)\}$, обладающие следующими свойствами :

$$\overline{\delta}_{i_1i_2\dots i_k}\subset\Delta_{i_1i_2\dots i_k}^{(n_k)}, \quad \overline{\delta}_{i_1i_2\dots i_k}\cap\overline{\delta}_{i'_1i'_2\dots i'_k}=\emptyset, \quad \text{если} \quad (i_1i_2\dots i_k)\neq(i'_1i'_2\dots i'_k), \tag{61}$$

$$\overline{\Delta}_{i_1i_2\dots i_{k+1}}^{(n_{k+1})}\subset\delta_{i_1i_2\dots i_k}, \tag{62}$$

$$|S_{N_{j_k}}(x)|>k, \quad |A(r_{j_k},x)|>k, \quad x\in\overline{\delta}_{i_1i_2\dots i_k}. \tag{63}$$

Из (61) и (62) следует, что последовательность вложенных отрезков $\overline{\Delta}_{i_1}^{(n_1)}\supset\overline{\Delta}_{i_1i_2}^{(n_2)}\supset\cdots\supset\overline{\Delta}_{i_1i_2\dots i_k}^{(n_k)}\supset\cdots$ и $\overline{\delta}_{i_1}\supset\overline{\delta}_{i_1i_2}\supset\cdots\supset\overline{\delta}_{i_1i_2\dots i_k}\supset\cdots$ имеют одну и ту же точку пересечения $x_{i_1i_2\dots i_k\dots}$. Множество $E=\{x_{i_1\dots i_k\dots}\}$ этих точек имеет мощность континуума, и кроме того, для любого k, имеем

$$|S_{N_{j_k}}(x_{i_1\dots i_k\dots})|>k, \quad |A(r_{j_k},x_{i_1\dots i_k\dots})|>k, \tag{64}$$

причем последовательности $\{N_{j_k}\}$, $\{r_{j_k}\}$ являются подпоследовательностями фиксированных в формулировке Теоремы 2 последовательностей. Из (64) следует, что

$$\liminf_{k\to\infty}|S_{N_{j_k}}(x)|=+\infty \quad \text{и} \quad \liminf_{k\to\infty}|A(r_{j_k},x)|=+\infty$$

для всех точек $x\in E=\{x_{i_1i_2\dots i_k\dots}\}$. Доказательство Теоремы 2 завершено.

§6. ЗАМЕЧАНИЯ

1. По Теореме 1, если гармоническая функция $u(r,x)$ является интегралом Пуассона-Стилтьеса непрерывной, периодической функции конечной вариации, которая не является абсолютно непрерывной, то из любой последовательности $\{u(r_j,x)\}$, $r_j \to 1$, можно выбрать подпоследовательность $\{u(r_{j_k},x)\}$ такую, что для любой точки x принадлежащей некоторому множеству E мощности континуум, и для любого $\delta = \delta(x) > 0$ выполняется равенство

$$\lim_{k\to\infty} \max_{t\in(x-\delta,x+\delta)} |u(r_{j_k},t)| = +\infty.$$

Это означает, что в отличии от случая, когда $F(x)$ имеет разрывы только первого рода, множество граничных особых точек при приближении к которым гармоническая функция не ограничена, имеет мощность континуума. В случае же, когда $F(x)$ – строго сингулярная функция, то последовательность $|u(r_{j_k},x)|$ может стремится к $+\infty$ на множестве, любая порция которого на единичной окружности имеет мощность континуум. Это легко усмотреть из доказательства Теоремы 2.

Следующее утверждение следует из Теоремы 1.

Теорема. *Пусть для некоторой последовательности $\{S_{n_k}(x)\}$ частичных сумм ряда Фурье-Стилтьеса непрерывной периодической функции $F(x)$ с конечной вариацией выполняются условия*

$$\sup_k \left(\max_{t\in(x-\delta_x,x+\delta_x)} |S_{n_k}(t)| \right), \quad \delta_x = \delta(x) > 0,$$

для всех x, кроме, быть может, точек некоторого счетного множества. Тогда ряд Фурье-Стилтьеса функции $F(x)$ является рядом Фурье функции $F'(x)$.

2. Множество E лебеговой меры нуль называется M–множеством для метода суммирования T, если существует тригонометрический ряд, не все коэффициенты которого равны нулю и который методом T суммируется к нулю во всех точках множества $[0,2\pi]\setminus E$. Такой тригонометрический ряд называется нуль-рядом относительно метода T.

Первый пример нуль-ряда в случае, когда T совпадает со сходимостью ряда, был построен Д. Е. Меньшовым в 1916 году, но до сих пор не известно поведение ряда Меньшова на соответствующем M-множестве. Например, не известно может ли некоторая подпоследовательность частичных сумм ряда Меньшова сходиться или оставаться ограниченной на этом множестве. В связи с этим заметим, что если в формулировке Теоремы 2 полагать $F(x)$ строго сингулярной с $F'(x) = 0$

почти всюду, то соответствующий ряд Фурье-Стилтьеса будет нуль-рядом относительно метода суммирования Абеля, а абсолютные значения некоторых последовательностей средних Абеля стремятся к $+\infty$ на некоторых подмножествах мощности континуум исключительного M-множества.

3. Сравним теоремы о поведении средних Абеля-Пуассона рядов Фурье-Стилтьеса, доказанные в данной статье, с классическими результатами Райхмана и Верблюнского. Поскольку мы рассматриваем фиксированные подпоследовательности $A(r_k, x)$ средних Абеля (в работах [1] - [3] условия налагаются на все средние значения Абеля $A(r, x)$), то класс рядов, рассмотренных в [1] - [3] в некотором смысле более широкий, чем ряды Фурье-Стилтьеса. Дело в том, что коэффициенты Фурье-Стилтьеса непрерывных функций конечной вариации могут не стремится к нулю.

4. Если $f(x)$ непрерывная, периодическая, сингулярная функция конечной вариации, принимающая постоянные значения на смежных интервалах некоторого совершенного множества P меры нуль, то средние Абеля-Пуассона ряда Фурье-Стилтьеса функции $f(x)$ не могут быть ограниченными в окрестностях точек, принадлежащих P, т.е.

$$\limsup_{(r,x)\to(1,x_0)} |A(r,x)| = +\infty, \quad x_0 \in P.$$

Этот факт доказывается повторением рассуждений, приведенных при доказательстве Теоремы 1.

Abstract. The paper studies the boundary properties of the Poisson-Stieltyes integrals and establishes uniqueness theorems of Fourier-Stieltyes series under restrictions on the behavior of subsequences of partial sums.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Зигмунд. Тригонометрические Ряды, том 1, 1965.
2. S. Verblunsky. "On the theory of trigonometric series", P.L.M.S. vol. 34, pp. 441 – 491, 1932.
3. A. Rajchman, "Series trigonometriques summables par le procede de Poisson", Prace Mathematyczno-Fizyczne, vol. 30, pp. 19 – 88, 1919.
4. Ф. Арутюнян, А. Талалян, "О единственности рядов по системам Хаара и Уолша", Изв. АН СССР, серия Математика, том 28, № 6, стр. 1301 – 1408, 1964.

Поступила 4 сентября 2005