РЕШЕНИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ПОМОЩЬЮ КОНТУРНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

Н. Е. Товмасян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика,
том 35, № 1, 2000

В статье получены формулы, представляющие корни любого полинома порядка n в виде контурных интегралов. Они применяются для решения трансцендентных алгебраических уравнений.

§0. ВВЕДЕНИЕ

Основная цель настоящей статьи – показать, что корни z_k любого полинома $P(z)$ порядка n можно представить в виде

$$z_k = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_k} \frac{z\, P_k'(z)\, dz}{P_k(z)}, \quad k = 1, ..., n, \tag{0.1}$$

где $P_1(z), ..., P_n(z)$ – некоторые полиномы порядка не выше n, а $\gamma_1, ..., \gamma_n$ – некоторые окружности такие, что $P_k(z) \neq 0$, $z \in \gamma_k$ $(k = 1, ..., n)$. Указан алгоритм нахождения полиномов $P_k(z)$ и окружностей γ_k $(k = 1, ..., n)$.

§1. НЕКОТОРЫЕ ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ПРЕДЛОЖЕНИЯ

Пусть $P(z)$ и $Q(z)$ – полиномы порядка n и m $(n \geq m)$, соответственно, не имеющие общих корней. Тогда (см. [2]) существуют полиномы $P_0(z)$ и $Q_0(z)$ такие, что

$$P(z)\, Q_0(z) + Q(z)\, P_0(z) \equiv 1. \tag{1.1}$$

Сначала получим условия, при которых полиномы $P_0(z)$ и $Q_0(z)$ определяются из тождества (1.1) единственным образом.

Лемма 1.1. Пусть $P(z)$ и $Q(z)$ – полиномы порядка n и m, соответственно, и не имеют общих корней. Если порядки полиномов $P_0(z)$ и $Q_0(z)$ не превышают $n-1$ и $m-1$, соответственно, то эти полиномы определяются из (1.1) единственным образом.

Доказательство : Пусть

$$P(z)=\sum_{k=0}^{n} a_k z^k, \quad Q(z)=\sum_{k=0}^{m} b_k z^k, \tag{1.2}$$

$$P_0(z)=\sum_{k=0}^{n-1} c_k z^k, \quad Q_0(z)=\sum_{k=0}^{m-1} d_k z^k. \tag{1.3}$$

Коэффициенты этих полиномов, вообще говоря, комплексные постоянные, причем $a_n=1$ и $b_m\neq 0$.

Подставляя $P(z)$, $Q(z)$, $P_0(z)$ и $Q_0(z)$ из (1.2) и (1.3) в (1.1), получим систему алгебраических уравнений

$$A\,\alpha=\beta, \tag{1.4}$$

где A – квадратная матрица порядка $m+n$, элементами которой являются линейные комбинации коэффициентов полиномов $P(z)$ и $Q(z)$, а α и β – $(m+n)$–мерные вектор-столбцы $\alpha=(c_0,...,c_{n-1},d_0,...,d_{m-1})$ и $\beta=(1,0,...,0)$.

Достаточно показать, что $\det A\neq 0$. Предположим обратное. Тогда однородное уравнение $AC=0$ имеет ненулевое решение $c=(c_0,...,c_{n-1},d_0,...,d_{m-1})$ и полиномы в (1.3) с этими коэффициентами удовлетворяют тождеству

$$P(z)\,Q_0(z)+Q(z)\,P_0(z)\equiv 0. \tag{1.5}$$

Ясно, что хотя бы один из полиномов $P_0(z)$ и $Q_0(z)$ тождественно не равен нулю. Для определенности, пусть $P_0(z)\not\equiv 0$ и пусть z_0 – один из корней полинома $P(z)$. По предположению имеем $Q(z_0)\neq 0$.

Подставляя $z=z_0$ в (1.5) получим $P_0(z_0)=0$. Полиномы $P(z)$ и $P_0(z)$ представим в виде

$$P(z)=(z-z_0)^{n_0}\,R(z), \quad P_0(z)=(z-z_0)^{m_0}\,R_0(z), \tag{1.6}$$

где n_0 и m_0 – некоторые натуральные числа, а $R(z)$ и $R_0(z)$ – некоторые полиномы такие, что $R(z_0)\neq 0$ и $R_0(z_0)\neq 0$.

Подставляя $P(z)$ и $P_0(z)$ из (1.6) в (1.5), получим

$$Q_0(z)=-\frac{Q(z)\,R_0(z)\,(z-z_0)^{m_0-n_0}}{R(z)}. \tag{1.7}$$

Так как полином $Q_0(z)$ непрерывен в точке z_0 и $Q(z_0)\neq 0$, $R_0(z_0)\neq 0$ и $R(z_0)\neq 0$, то из (1.7) имеем

$$m_0\geq n_0, \tag{1.8}$$

а это означает, что полином $P_0(z)$ имеет по крайней мере n корней (учитывая кратности). Это невозможно, так как по предположению порядок полинома $P_0(z)$ не превышает $n-1$ и $P_0(z) \not\equiv 0$. Из полученного противоречия следует, что $\det A \neq 0$ и система (1.4) имеет единственное решение. Лемма 1.1 доказана.

Пусть теперь $P(z)$ и $Q(z)$ – полиномы порядка n и m ($m \geq n$) соответственно, не имеющие общих корней. Мы получим равенство (1.1) при помощи алгоритма Евклида (см. [2]). Имеем

$$P(z) = Q(z)\,R_0(z) + r_1(z), \tag{1.9}$$

$$Q(z) = r_1(z)\,R_1(z) + r_2(z), \tag{1.10}$$

$$r_j(z) = r_{j+1}(z)\,R_{j+1}(z) + r_{j+2}(z), \quad j = 1, ..., k, \tag{1.11}$$

где $R_0(z), ..., R_{k+1}(z), r_1(z), ..., r_{k+1}(z)$ – полиномы такие, что $r_{k+2}(z) \equiv C \neq 0$, причем

$$\deg r_1(z) < \deg Q(z), \tag{1.12}$$

$$1 \leq \deg r_{j+1}(z) < \deg r_j(z). \tag{1.13}$$

Из соотношений (1.9)–(1.11) полиномы $r_j(z)$ ($j = 1, ..., k+2$) определяются единственным образом :

$$r_1(z) = P(z) - Q(z)\,R_0(z), \tag{1.14}$$

$$r_j(z) = P(z)\,Q_j(z) + Q(z)\,P_j(z), \quad j = 2, ..., k+2, \tag{1.15}$$

где $P_j(z)$ и $Q_j(z)$ – некоторые полиномы.

Так как $r_{k+2}(z) \equiv C \neq 0$, то равенство (1.15) при $j = k+2$ можно записать в виде

$$P(z)\,Q_0(z) + Q(z)\,P_0(z) \equiv 1, \tag{1.16}$$

где

$$Q_0(z) = \frac{Q_{k+2}(z)}{C}, \quad P_0(z) = \frac{P_{k+2}(z)}{C}. \tag{1.17}$$

Покажем, что

$$\deg Q_0(z) < \deg Q(z), \quad \deg P_0(z) < \deg P(z). \tag{1.18}$$

Методом индукции можно доказать, что в (1.15) порядки полиномов $P_j(z)$ и $Q_j(z)$ определяются формулами

$$\deg P_j(z) = \sum_{\nu=0}^{j-1} \deg R_\nu(z), \quad j = 2, ..., k+2, \tag{1.19}$$

$$\deg Q_j(z) = \sum_{\nu=1}^{j-1} \deg R_\nu(z), \quad j = 2, \dots, k+2. \tag{1.20}$$

Из (1.9)–(1.11) имеем

$$\deg P(z) = \deg Q(z) + \deg R_0(z), \tag{1.21}$$

$$\deg Q(z) = \deg r_1(z) + \deg R_1(z), \tag{1.22}$$

$$\deg r_j(z) = \deg r_{j+1}(z) + \deg R_{j+1}(z), \quad j = 1, \dots, k. \tag{1.23}$$

Суммируя левые и правые части (1.21)–(1.23), получим

$$\deg P(z) = \deg r_{k+1}(z) + \sum_{j=0}^{k+1} \deg R_j(z). \tag{1.24}$$

Подставляя $\deg P(z)$ из (1.21) в (1.24), получим

$$\deg Q(z) = \deg r_{k+1}(z) + \sum_{j=1}^{k+1} \deg R_j(z). \tag{1.25}$$

Так как $\deg r_{k+1}(z) \geq 1$, то из равенств (1.19), (1.20) при $j = k+2$ и (1.17), (1.24) и (1.25) имеем $\deg P(z) > \deg P_{k+2}(z) = \deg P_0(z)$, $\deg Q(z) > \deg Q_{k+2}(z) = \deg Q_0(z)$, откуда следует (1.18).

Пусть теперь $P(z)$, $Q(z)$, $P_0(z)$ и $Q_0(z)$ – полиномы (1.2) и (1.3), и пусть A – матрица, входящая в уравнение (1.4). Единственным ограничением, наложенным на $P(z)$ и $Q(z)$, являются условия $a_n \neq 1$ и $b_m \neq 0$.

Лемма 1.2. Полиномы $P(z)$ и $Q(z)$ не имеют общих корней тогда и только тогда, когда

$$\det A \neq 0. \tag{1.26}$$

Доказательство : Пусть $\det A \neq 0$. Тогда имеет место тождество (1.1), где $P_0(z)$ и $Q_0(z)$ определяются формулой (1.3), а $\alpha = (c_0, \dots, c_{n-1}, d_0, \dots, d_{m-1})$ – решение системы уравнений (1.4). Из тождества (1.1) следует, что $P(z)$ и $Q(z)$ не имеют общих корней.

Предположим теперь, что $P(z)$ и $Q(z)$ не имеют общих корней. Для заключения, что $\det A \neq 0$ достаточно применить доказательство Леммы 1.1. Лемма 1.2 доказана.

Пусть $P(z)$ – полином порядка n и имеет только простые корни, и пусть $P_0(z)$ и $Q_0(z)$ – полиномы порядка $n-1$ и $n-2$, соответственно, удовлетворяющие

(1.1) при $Q(z) = P'(z)$. Пусть $a_0, ..., a_n$ ($a_n = 1$) и $c_0, ..., c_{n-1}$ – коэффициенты полиномов $P(z)$ и $P_0(z)$, соответственно. Положим

$$\mu = 1 + \sum_{k=1}^{n} |a_k|, \quad B = \sum_{k=1}^{n-1} |c_k| \mu, \tag{1.27}$$

$$B_1 = \sum_{k=2}^{n} \sum_{j=k}^{n} \frac{j(j-1)...(j-(k-1))}{k!} |a_j| \mu^{j-k}, \tag{1.28}$$

$$\alpha = \min\left(1, \frac{1}{B\,B_1}\right). \tag{1.29}$$

Лемма 1.3. Пусть $P(z)$ – полином порядка n, имеющий только простые корни. Тогда

$$|P'(z_k)| \geq \frac{1}{B}, \quad k = 1, ..., n, \tag{1.30}$$

$$|z_j - z_k| \geq \alpha, \quad j \neq k, \quad (j, k = 1, ..., n). \tag{1.31}$$

Доказательство : Подставляя в (1.1) $z = z_k$ и используя $P(z_k) = 0$ и $Q(z) = P'(z)$, получим

$$P'(z_k)\, P_0(z_k) = 1. \tag{1.32}$$

Из (1.32) имеем $P_0(z_k) \neq 0$ и

$$P'(z_k) = \frac{1}{P_0(z_k)}. \tag{1.33}$$

Корни полинома $P(z)$ удовлетворяют неравенству (см. [2])

$$|z_k| \leq \mu, \quad k = 1, ..., n. \tag{1.34}$$

Таким образом, (1.30) следует из (1.33) и (1.34). Разлагая полином $P(z)$ в ряд Тейлора в окрестности точки z_1, получим

$$P(z) = P(z_1) + \frac{P'(z_1)}{1!}(z - z_1) + ... + \frac{P^{(n)}(z_1)}{n!}(z - z_1)^n \tag{1.35}$$

и подставим $z = z_2$. Так как $P(z_1) = P(z_2) = 0$ и $z_1 \neq z_2$, то

$$P'(z_1) = -\sum_{k=2}^{n} \frac{P^{(k)}(z_1)}{k!}(z_2 - z_1)^{k-1}. \tag{1.36}$$

Пусть $|z_1 - z_2| \leq 1$. Согласно (1.36) имеем

$$|P'(z_1)| \leq |z_2 - z_1| \sum_{k=2}^{n} \frac{|P^{(k)}(z_1)|}{k!}. \tag{1.37}$$

Ясно, что

$$P^{(k)}(z) = \sum_{j=k}^{n} j(j-1)...(j-(k-1))\,a_k\,z^{j-k}. \tag{1.38}$$

Из (1.34) и (1.38) следует, что

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{|P^{(k)}(z_1)|}{k!} \le B_1. \tag{1.39}$$

Из неравенств (1.30), (1.37) и (1.39) имеем

$$|z_1 - z_2| \ge (B\,B_1)^{-1}. \tag{1.40}$$

Лемма (1.3) доказана.

Пусть $z_1, ..., z_n$ – корни полинома $P(z)$ (1.2) и $a_n = 1$. Положим

$$\rho(P, z) = \min_{k=1,...,n} |z - z_k|.$$

Лемма 1.4. Имеет место оценка

$$\rho(P, z) \le \sqrt[n]{|P(z)|}. \tag{1.41}$$

Доказательство : следует из $P(z) = (z - z_1)...(z - z_n)$.

§2. ПОЛИНОМИАЛЬНЫЕ КОРНИ КАК КОНТУРНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Рассмотрим уравнение

$$P(z) \equiv z^n + a_{n-1}\,z^{n-1} + ... + a_0 = 0. \tag{2.1}$$

Сначала рассмотрим случай, когда полином $P(z)$ имеет только простые корни (ср. с Леммой 1.2).

Пусть

$$M = n\,\mu^{n-1} + \sum_{k=1}^{n-1} k\,|a_k|\,\mu^{k-1}, \tag{2.2}$$

где μ определяется формулой (1.27).

Ясно, что

$$\max_{|z|\le\mu} |P'(z)| \le M. \tag{2.3}$$

Разделим замкнутый круг $|z| \le \mu$ на N замкнутых частей $\sigma_1, ..., \sigma_N$, диаметры которых не превышают δ. Число δ мы выберем ниже. Заметим, что $\sigma_1, ..., \sigma_N$

могут пересекаться. Ясно, что корень z_0 полинома $P(z)$ принадлежит некоторой части σ_j. Поэтому, взяв $\xi_k \in \sigma_k$, $k = 1, 2, ..., N$, можем записать

$$|P(\xi_j)| \leq |P(\xi_j) - P(z_0)| \leq |\xi_j - z_0| \max_{|z| \leq \mu} |P'(z)| \leq M\,\delta, \tag{2.4}$$

откуда получим

$$|P(\xi_j)| < 2\,M\,\delta. \tag{2.5}$$

Вычисляя последовательно значения $|P(z)|$ в точках $\xi_1, ..., \xi_N$, получим точку ξ_j, удовлетворяющую неравенству (2.5). Согласно (1.41) существует хотя бы один корень полинома $P(z)$, принадлежащий кругу

$$|z - \xi_j| < \sqrt[n]{2M\,\delta}. \tag{2.6}$$

Теперь число $\delta > 0$ выберем так, чтобы

$$2\,\sqrt[n]{2M\,\delta} < \alpha, \tag{2.7}$$

где α определяется формулой (1.29). Из (1.31) и (2.7) следует, что в замкнутом круге (2.6) полином $P(z)$ имеет не более одного корня. Следовательно, полином $P(z)$ имеет только один корень в круге (2.6) и отличен от нуля на границе этого круга. Пусть z_1 – корень полинома $P(z)$, принадлежащий кругу (2.6). Согласно теореме о вычетах имеем

$$z_1 = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z-\xi_j|=r} \frac{z\,P'(z)}{P(z)}\,dz, \tag{2.8}$$

где $r = \sqrt[n]{2M\,\delta}$. Так как $P(z_1) = 0$, то из (1.35) имеем

$$P(z) = (z - z_1)\,Q(z), \qquad \text{где} \qquad Q(z) = \sum_{k=1}^{n} \frac{P^{(k)}(z_1)}{k!}(z - z_1)^{k-1}. \tag{2.9}$$

Полином $P(z)$ имеет только простые корни. Согласно (2.9), это справедливо для $Q(z)$ и $Q(z_1) \neq 0$. Аналогично можно найти все решения уравнения (2.1) и представить их в виде (0.1).

Рассмотрим теперь случай, когда полином $P(z)$ имеет кратные корни. Тогда $P(z)$ и $P'(z)$ имеют отличный от постоянного наибольший общий делитель $P_0(z)$, который может быть найден с помощью алгоритма Евклида (1.9)–(1.11), где $Q(z) \equiv P'(z)$, $r_{j+2} \equiv C = 0$ и $R_{k+1}(z) = P_0(z)$. Полином $Q(z)$, определенный равенством $P(z) = P_0(z)\,Q(z)$, можно представить в виде $Q(z) = C\,(z - z_1)...(z -$

z_m), где $z_1, ..., z_m$ – корни полинома $P(z)$ (не считая кратности), а $C \neq 0$ – постоянная. Таким образом, полином $Q(z)$ имеет только простые корни.

Решая уравнение $Q(z) = 0$, получим все корни полинома $P(z)$ (не считая кратности). Пусть γ_k – окружность с центром в точке z_k и радиусом

$$0 < r_k < \min |z_k - z_j|, \quad k = 1, ..., n. \tag{2.10}$$

Минимум в (2.10) берется по всем $j = 1, ..., n$, $j \neq k$. Пусть $z_1, ..., z_m$ – корни полинома $P(z)$ и $n_1, ..., n_m$ – соответствуюшие кратности : $n_1 + ... + n_m = n$. Согласно теореме о вычетах, имеем (см. [3])

$$n_k = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_k} \frac{P'(z)}{P(z)}\, dz, \quad k = 1, ..., m, \tag{2.11}$$

откуда следует решение задачи для произвольного полинома $P(z)$.

Теперь укажем более эффективный метод решения уравнения (2.1) при $5 \leq n \leq 9$. Этот метод проиллюстрируем на примере уравнения 5-го порядка :

$$P_5(z) \equiv z^5 + a_4 z^4 + a_3 z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + a_0 = 0. \tag{2.12}$$

1. Предположим, что полином $P_5(z)$ имеет кратные корни. Это означает, что полиномы $P_5(z)$ и $P_5'(z)$ имеют отличный от постоянного наибольший общий делитель $P_0(z)$. Тогда

$$P_5(z) = P_0(z)\, Q_0(z), \tag{2.13}$$

где полиномы $P_0(z)$ и $Q_0(z)$ можно записать в явном виде и их порядок не выше четырех. Таким образом, в этом случае уравнение (2.12) можно решать квадратурой.

2. Предположим, что коэффициенты полинома $P_5(z)$ вещественны. Тогда $P_5(z)$ имеет хотя бы один вещественный корень. В §3 указан простой метод нахождения всех вещественных корней таких полиномов. Пусть $z_1, ..., z_m$ – вещественные корни полинома $P(z)$. Предположим, что $1 \leq m < 5$. (При $m = 5$ уравнение (2.12) решено полностью в предыдушем пункте). Имеем $P(z) = (z - z_1)...(z - z_m)\, Q(z)$, где $Q(z)$ – полином порядка $5 - m$. Корни полинома $Q(z)$ можно определить квадратурой.

3. Предположим, что коэффициенты полинома $P_5(z)$ – произвольные комплексные числа и $P_5(z)$ имеет только простые корни. Не умоляя общности можно считать, что $a_0 \neq 0$. Положим

$$r_0 = \sqrt[5]{|a_0|}, \quad M_0 = 5\, r_0^4 + \sum_{k=1}^{4} c_k\, |a_k|\, r_0^{k-1}, \tag{2.14}$$

$$\xi_k = r_0 \exp \frac{2\pi k i}{m}, \quad k = 0, 1, ..., m-1, \tag{2.15}$$

где m – некоторое натуральное число такое, что

$$m \geq \frac{64\pi r_0 M_0}{\alpha^5}, \tag{2.16}$$

а α определяется формулой (1.29) при $n = 5$ и $P(z) = P_5(z)$.

Ясно, что $|\xi_k| = r_0$, $k = 0, 1, ..., m-1$. Положим

$$\omega_m = \min_{k=0,...,m-1} \{|P_5(\xi_k)|\}. \tag{2.17}$$

Существует индекс j $(0 \leq j \leq m-1)$ такой, что

$$\omega_m = |P_5(\xi_j)|. \tag{2.18}$$

Согласно Лемме 1.4, $P_5(z)$ имеет хотя бы один корень, принадлежащий замкнутому кругу $|z - \xi_j| \leq \sqrt[5]{\omega_m}$. Сначала предположим, что $\sqrt[5]{\omega_m} < \dfrac{\alpha}{2}$. Согласно неравенству (1.31), полином $P_5(z)$ имеет не более одного корня в замкнутом круге $|z - \xi_j| \leq \rho$,где ρ – произвольное фиксированное число такое, что $\sqrt[5]{\omega_m} < \rho < \dfrac{\alpha}{2}$. Следовательно, $P_5(z)$ имеет только один корень в круге $|z - \xi_j| < \rho$ и отличен от нуля на границе этого круга. Этот корень полинома $P_5(z)$ определяется формулой (2.8), где $P(z) = P_5(z)$ и $r = \rho$. Остальные корни полинома $P_5(z)$ можно найти, используя представление (2.9).

Пусть теперь

$$\sqrt[5]{\omega_m} \geq \frac{\alpha}{2}. \tag{2.19}$$

Из (2.18) и (2.19) получим

$$|P_5(\xi_k)| \geq \left(\frac{\alpha}{2}\right)^5, \quad k = 0, ..., m-1. \tag{2.20}$$

Для заданной точки z, $|z| = r_0$ возьмем точку ξ_j из (2.15) такую, что

$$|z - \xi_j| \leq \frac{\pi r_0}{m}. \tag{2.21}$$

Следовательно

$$|P_5(z)| \geq |P_5(\xi_j)| - |P_5(\xi_j) - P_5(z)| \geq |P_5(\xi_j)| - |z - \xi_j| \max_{|\tau| = r_0} |P_5'(\tau)|. \tag{2.22}$$

Ясно, что

$$\max_{|z| \leq r_0} |P_5'(z)| \leq M_0, \tag{2.23}$$

где M_0 определяется формулой (2.14).

Из (2.21)–(2.23) имеем

$$|P_5(z)| \geq \frac{\alpha^5}{64} \quad \text{при} \quad |z| = r_0. \tag{2.24}$$

Поэтому число n_0 корней полинома $P_5(z)$ в круге $|z| < r_0$ определяется формулой (см. [3])

$$n_0 = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z|=r_0} \frac{P_5'(z)}{P_5(z)}\, dz. \tag{2.25}$$

Пусть $z_1, ..., z_5$ – корни полинома $P_5(z)$ такие, что имеет место представление

$$P_5(z) = (z - z_1)...(z - z_5). \tag{2.26}$$

Подставляя $z = 0$ в (2.26), получим

$$|z_1 ... z_5| = |a_0| = r_0^5. \tag{2.27}$$

Из неравенства (2.24) следует $|z_k| \neq r_0$, $k = 1, ..., 5$. Отсюда и в силу (2.27) получим $1 \leq n_0 \leq 4$.

Пусть $n_0 = 1$. Корень z_1 полинома $P_5(z)$ в круге $|z| < \rho$ определяется формулой (2.8), где $\xi_j = 0$, $r = r_0$, $P(z) = P_5(z)$. Представляя $P_5(z)$ в виде (2.9) находим остальные корни полинома $P_5(z)$.

Пусть $n_0 = 2$. Положим

$$P_2(z) = (z - z_1)(z - z_2) \equiv z^2 - (z_1 + z_2)\, z + z_1 z_2, \tag{2.28}$$

где z_1 и z_2 – корни полинома $P_5(z)$ такие, что $|z_1| < r_0$, $|z_2| < r_0$. Полагая

$$b_j = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z|=r_0} \frac{z^j P_5'(z)}{P_5(z)}\, dz, \quad j = 1, 2$$

и используя теорему о вычетах, получим

$$b_1 = z_1 + z_2, \quad b_2 = z_1^2 + z_2^2, \quad \text{откуда} \quad z_1 z_2 = \frac{1}{2}(b_1^2 - b_2). \tag{2.29}$$

Подставляя $z_1 + z_2$ и $z_1 z_2$ из (2.29) в (2.28), получим

$$P_2(z) = z^2 + d_1 z + d_2, \tag{2.30}$$

где $d_1 = -b_1$ и $d_2 = \frac{1}{2}(b_1^2 - b_2)$.

Из (2.26) находим

$$P_5(z) = (z^2 + d_1 z + d_2)(z^3 + c_2 z^2 + c_1 z + c_0), \tag{2.31}$$

где c_0, c_1, c_2 – постоянные. Приравнивая коэффициенты при z^j $(j = 2, 3, 4)$ в (2.31), получим систему уравнений

$$c_2 + d_1 = a_4, \quad c_1 + c_2 d_1 + d_0 = a_3, \quad c_0 + c_1 d_1 + c_2 d_0 = a_2. \tag{2.32}$$

Из (2.32) постоянные c_0, c_1, c_2 определяются однозначно. Следовательно, в этом случае уравнение $P_5(z) = 0$ сводится к квадратному и кубическому уравнениям.

Пусть теперь $n_0 = 3$ или 4. Заменой переменных $z = \dfrac{r_0^2}{\xi}$ этот случай сводится к случаю $n_0 = 2$ или 1.

Аналогично можно решать уравнение (2.1) произвольной степени n, однако при $n \geq 10$ эффективность этого метода резко уменьшается.

§3. НАХОЖДЕНИЕ ВЕЩЕСТВЕННЫХ КОРНЕЙ ПОЛИНОМА С ВЕЩЕСТВЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

В этом параграфе укажем эффективный метод нахождения вещественных корней уравнения (2.1) с вещественными коэффициентами.

Пусть сначала полином $P(z)$ имеет только простые корни. Согласно Лемме 1.2, при минимальном расстоянии d между корнями имеем $d \geq d_0$, где d_0 – положительная постоянная, зависящая от коэффициентов полинома $P(z)$. Известно, что вещественные корни полинома $P(z)$ принадлежат отрезку $[-A, A]$, где $A = 1 + \sum\limits_{k=0}^{n-1} |a_k|$. Разделим $[-A, A]$ на N равных частей, длины которых меньше d_0. Пусть $x_1, x_2, ..., x_N$ – точки деления этих отрезков $x_1 = -A$, $x_N = A$. Если $P(x_k)\,P(x_{k+1}) < 0$, то внутри интервала (x_k, x_{k+1}) полином $P(z)$ имеет хотя бы один корень. Так как $x_{k+1} - x_k < d_0$, то полином $P(z)$ имеет ровно один корень на отрезке $[x_k, x_{k+1}]$.

Пусть r_k – центр интервала (x_k, x_{k+1}). Так как $x_{k+1} - x_k < d_0$, то полином $P(z)$ имеет один корень в круге с центром r_k и радиусом $r_0 = \dfrac{x_{k+1} - x_k}{2}$ и отличен от нуля во всех точках границы этого круга. Ясно, что этот корень ξ_k является вещественным и

$$\xi_k = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z - r_k| = r_0} \frac{z\, P'(z)}{P(z)}\, dz.$$

Пусть (x_k, x_{k+1}) – интервал такой, что

$$P(x_k) > 0, \quad P(x_{k+1}) > 0. \tag{3.1}$$

На этом интервале полином $P(z)$ не имеет корней. Предположим обратное, пусть $P(\tau) = 0$ для некоторой точки $\tau \in (x_k, x_{k+1})$. Так как $x_{k+1} - x_k < d_0$, то в интервале (x_k, x_{k+1}) полином $P(z)$ не имеет других корней. Поэтому из (3.1) следует, что

$$P(x) > 0, \quad x \in (x_k, x_{k+1}), \quad x \neq \tau. \tag{3.2}$$

Из равенства $P(\tau) = 0$ и неравенства (3.2) следует, что τ является точкой минимума полинома $P(x)$ в интервале (x_k, x_{k+1}). Поэтому, $P'(\tau) = 0$. Следовательно, τ является кратным корнем полинома $P(z)$. Полученное противоречие доказывает, что $P(z)$ не имеет корней в интервале (x_k, x_{k+1}).

Предположим теперь, что $P(x_j) < 0$, $P(x_{j+1}) < 0$. Тогда аналогично докажем, что полином $P(z)$ не имеет корней в интервале (x_k, x_{k+1}).

Пусть $x_{m_1}, \dots, x_{m_k}$ – точки раздела отрезка $[-A, A]$ такие, что $P(x_{m_j}) = 0$, $j = \overline{1,k}$, и пусть $(x_{n_k}, x_{n_{k+1}})$ – интервалы, где $P(x_{n_k})\,P(x_{n_{k+1}}) < 0$. Выше мы получили формулу нахождения корней $\xi_1, \dots \xi_p$ в этих интервалах. Следовательно, точки $x_{m_1}, \dots, x_{m_k}, \xi_1, \dots \xi_p$ – это все вещественные корни полинома $P(z)$.

В случае, когда полином $P(z)$ имеет кратные корни, его можно представить в виде $P(z) = P_0(z)\,Q(z)$, где $P_0(z)$ – наибольший общий делитель полиномов $P(z)$ и $P'(z)$, а $Q(z)$ имеет простые корни, совпадающие с корнями полинома $P(z)$. Так как коэффициенты полинома $P(z)$ вещественны, то коэффициенты полиномов $P_0(z)$ и $Q(z)$ также вещественны. Выше мы указали метод нахождения всех вещественных простых корней $z_1, \dots, z_m$ полинома $Q(z)$. Кратности корней $z_1, \dots, z_m$ полинома $P(z)$ определяются формулой (2.11). Таким образом, мы находим все вещественные корни полинома $P(z)$ и их кратности.

ABSTRACT. In the paper we derive formulas representing the roots of an arbitrary polynomial of order n as contour integrals. They are applied for nsolution of transcendental algebraic equations.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Смирнов, Курс Высшей Математики, том I, Наука, М., 1971.
2. А. Г. Курош, Курс Высшей Алгебры, Наука, М., 1974.
3. М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат, Методы Теории Функций Комплексного Переменного, Наука, Москва, 1973.

4 августа 1999

Армянский государственный
инженерный университет