ОБ ОЦЕНКАХ ПРОИЗВОДНЫХ МНОГОЧЛЕНОВ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Г. Г. Казарян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 34, № 3, 1999

Пусть $P(\xi) = P(\xi_1, ..., \xi_n)$ есть многочлен с действительными постоянными коэффициентами. Получены достаточные условия, при которых оценка $|D^\nu P(\xi)| \le c(|P(\xi)| + 1)$, $\xi \in \mathbb{R}^n$ имеет место для всех мультииндексов $\nu = (\nu_1, ..., \nu_n) \in \mathbb{Z}^n$, или для некоторого фиксированного мультииндекса. В двумерном случае эти условия также и необходимы.

§0. ВВЕДЕНИЕ

Получение так называемых априорных оценок в общей теории дифференциальных уравнений требует оценок для производных характеристического многочлена $P(\xi)$ исходных дифференциальных операторов $P(D)$ или оценок для функции Хермандера. Одной из задач является описание множества мультииндексов $\{\nu\}$, для которых

$$|D^\nu P(\xi)| \le c \cdot (|P(\xi)| + 1) \qquad \text{для любого} \quad \xi \in \mathbb{R}^n,$$

где $c > 0$ – постоянная. Другая задача есть описание множества операторов $P(D)$, для которых

$$\tilde{P}(\xi) \le c \cdot (|P(\xi)| + 1) \qquad \text{для любого} \quad \xi \in \mathbb{R}^n,$$

где $c > 0$ – постоянная. Здесь $\tilde{P}(\xi) = \left[\sum_\beta |D^\beta P(\xi)|^2\right]^{1/2}$ – функция Хермандера, отвечающая оператору $P(D) = \sum_\alpha \gamma_\alpha D^\alpha$.

В монографии Л. Хермандера [1] и в работе В. Михайлова [3] подобные вопросы решены в терминах оценок мономов. С. М. Никольский [4] доказал существование обобщенного решения первой краевой задачи для общего класса регулярных операторов, содержащих гипоэллиптические операторы. В [5] найдены условия гипоэллиптичности в терминах устойчивости многочленов. Для эллиптических и полуэллиптических операторов поставленные задачи были исследованы, например, в [6] – [8]. Подобные задачи для существенно не эллиптических операторов рассмотрены в [2], [9], [10].

Начнем с некоторых стандартных обозначений. Пусть $\mathbb{R}^n$ – n–мерное евклидово пространство, $\xi = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n) \in \mathbb{R}^n$, N_0^n – множество n-мерных мультииндексов, т.е. множество векторов $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ с целыми неотрицательными компонентами. Для $\xi \in \mathbb{R}^n$ и $\alpha \in N_0^n$ положим $\xi^\alpha = (\xi_1^{\alpha_1}, \xi_2^{\alpha_2}, ..., \xi_n^{\alpha_n})$, $D^\alpha = D_1^{\alpha_1} D_2^{\alpha_2} ... D_n^{\alpha_n}$, где $D_j = \dfrac{\partial}{\partial \xi_j}$, $j = 1, ..., n$. Пусть $P(D) = \sum_\alpha \gamma_\alpha D^\alpha$ – линейный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами, где сумма распостраняется по конечному набору мультииндексов $(P) = \{\alpha; \alpha \in N_0^n, \gamma_\alpha \neq 0\}$, и пусть $P(\xi) = \sum_\alpha \gamma_\alpha \xi^\alpha$ – характеристический многочлен (символ), отвечающий оператору $P(D)$. Будем считать, что коэффициенты $\{\gamma_\alpha\}$ вещественны и $P(\xi) \neq 0$ вне некоторого шара радиуса $M = M(P) > 0$.

Определение 0.1. (см. [1]). Оператор $P(D)$ (многочлен $P(\xi)$) называется гипоэллиптическим, если для любого $\nu \in N_0^n$ и $\nu \neq 0$ имеем $\dfrac{D^\nu P(\xi)}{|P(\xi)|} \to 0$ при $|\xi| \to \infty$.

Определение 0.2. (см. [2]). Многочлен $P(\xi)$ мощнее многочлена $Q(\xi)$ (будем писать $Q < P$), если для некоторой постоянной $c > 0$ имеем

$$|Q(\xi)| \leq c \cdot (|P(\xi)| + 1) \qquad \text{для любого} \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Из Определений 0.1 и 0.2 следует, что для гипоэллиптических операторов $P(D)$ и для любого $\nu \in N_0^n$ имеем $D^\nu(P) < P$. Следовательно, нижеформулируемые Задачи I и II представляют интерес лишь для не гипоэллиптических операторов.

Задача I. Для заданного оператора $P(D)$ описать множество мультииндексов $\{\nu\}$, для которых $D^\nu P < P$.

Задача II. Описать множество операторов $\{P(D)\}$, для которых $D^\nu P < P$ для всех $\nu \in N_0^n$.

В этой статье мы решаем эти задачи в достаточно общих предположениях. Отметим, что для некоторых типичных случаев (например, для так называемого двуслойного случая), полученные условия являются необходимыми и достаточными. Приведем еще несколько обозначений и определений.

Определение 0.3. (см. [3], [5]) Для данного набора мультииндексов $\aleph = \{\alpha^j\}_1^N$, наименьший выпуклый многогранник $\Re(\aleph)$ в $\mathbb{R}^n$, содержащий все мультииндексы $\alpha^j \in \aleph$ $(j = 1, ..., N)$, называется характеристическим многогранником (или многогранником Ньютона) $\aleph$. Характеристический многогранник $\Re(P)$ оператора $P(D)$ (многочлена $P(\xi)$) называется характеристическим многогранником набора $(P) \cup \{0\}$.

Определение 0.4. Многогранник $\Re$ с вершинами из N_0^n называется полным, если $\Re$ имеет вершину в начале координат и дополнительную вершину на каждой координатной оси.

Пусть $\Re$ – полный многогранник. Множество $\Gamma \subset \Re$ называется гранью многогранника $\Re$, если существует единичный вектор $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_n)$ и число $d = d(\lambda) \geq 0$ такие, что $(\lambda, \alpha) = \lambda_1\alpha_1 + ... + \lambda_n\alpha_n = d$ для всех $\alpha \in \Gamma$ и $(\lambda, \beta) < d$, $\beta \in \Re/\Gamma$. Вектор λ называется внешней нормалью ($\Re$-нормалью) грани Γ. Множество внешних нормалей грани Γ обозначим через $\Lambda(\Gamma)$. Грани размерности j многогранника $\Re$ обозначим через $\Re_i^j$ $(i = 1, ..., M_j^j, j = 0, 1, ..., n-1)$.

Определение 0.5. Грань $\Re_i^j$ многогранника $\Re$ называется главной, если среди $\Re$-нормалей этой грани существует нормаль, которая имеет хотя бы одну положительную координату. Если среди $\Re$-нормалей главной грани $\Re_i^j$ существует нормаль, которая имеет только неотрицательные (положительные) координаты, то грань $\Re_i^j$ называется правильной (вполне правильной). Многогранник $\Re$ называется правильным (вполне правильным), если $\Re$ – полный и все $(n-1)$-мерные некоординатные грани $\Re$ правильны (вполне правильны). Пусть $\Re = \Re(P)$ – характеристический многогранник многочлена $P(\xi)$, и пусть $\Re_i^j$ $(i = 1, ..., M_j, j = 0, 1, ..., n-1)$ – правильные грани $\Re$. Каждой $\Re_i^j$ сопоставим подмногочлен

$$P^{i,j}(\xi) = \sum_{\alpha \in \Re_i^j} \gamma_\alpha \xi^\alpha.$$

Определение 0.6. Для заданного $\lambda \in \mathbb{R}^n$ многочлен $R(\xi) = R(\xi_1, ..., \xi_n)$ называется λ-однородным (или обобщенно-однородным) λ-порядка d, если для любого $t > 0$

$$R(t^\lambda \cdot \xi) = R(t^{\lambda_1} \cdot \xi_1, ..., t^{\lambda_n} \cdot \xi_n) = t^d \cdot R(\xi). \tag{0.1}$$

При $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n$ λ-однородный многочлен является обычным однородным многочленом порядка d. Легко проверить (см., например, [3]), что подмногочлен

$P^{i,j}(\xi)$, отвечающий грани $\Re_i^j$ характеристического многогранника $\Re(P)$ многочлена P, является λ-однородным для любого вектора λ, являющегося $\Re$-нормалью этой грани, т.е. существует число $d(\lambda) = d_{i,j}(\lambda)$ такое, что

$$P^{i,j}(\xi) = \sum_{\lambda(\alpha)=d(\lambda)} \gamma_\alpha \xi^\alpha. \tag{0.2}$$

Определение 0.7. Грань $\Re_i^j$ многогранника $\Re(P)$, отвечающая многочлену $P(\xi)$, называется регулярной (или невырожденной), если $P^{i,j}(\xi) \neq 0$ при $\xi \in R^{n,0} \equiv \{\eta; \eta \in \mathbb{R}^n, \eta_1 \eta_2 ... \eta_n \neq 0\}$. Если $P^{i,j}(\eta^0) = 0$ для некоторой точки $\eta^0 \in R^{n,0}$, то грань $\Re_i^j$ назовем нерегулярной (или вырожденной).

Пусть $R(\xi)$ – λ-однородный многочлен. Положим

$$\Sigma(R) = \{\eta; \eta \in R^{n,0}, R(\eta) = 0\}. \tag{0.3}$$

Для точки $\eta \in \Sigma(R)$ обозначим

$$\Im(\eta, R) = \{\nu; \nu \in N_0^n, D^\nu R(\eta) \neq 0\}, \tag{0.4}$$

$$\Delta(\eta, R) \equiv \Delta(\eta, R, \lambda) = \min_{\nu \in \Im(\eta, R)} (\lambda, \nu). \tag{0.5}$$

Будем считать, что $\Delta(\eta, R) = 0$ при $\eta \in R^{n,0}/\Sigma(R)$. Пусть $\Re_l^k$ – некоторая правильная грань характеристического многогранника $\Re(P)$ для многочлена P, и пусть Λ_l^k –множество $\Re$-нормалей этой грани. Очевидно, что для любого вектора $\lambda \in \Lambda_l^k$ существует натуральное число $M = M(\lambda) = M(\lambda, \Re_l^k)$ и неотрицательные числа $d_j = d_j(\lambda, \Re_l^k)$ такие, что P можно представить в виде суммы отличных от нуля λ-однородных многочленов :

$$P(\xi) = \sum_{j=0}^{M} P_{d_j}(\xi) = \sum_{j=0}^{M} \sum_{(\lambda,\alpha)=d_j} \gamma_\alpha \xi^\alpha, \tag{0.6}$$

где $d_0 > d_1 > ... > d_M \geq 0$. Очевидно также, что $P_{d_0}(\xi) \equiv P^{l,k}(\xi)$ для любого вектора $\lambda \in \Lambda_l^k$. Пусть правильная грань $\Re_l^k$ нерегулярна. Согласно (0.3) - (0.5), свяжем с обобщенно однородным многочленом $P^{l,k}$ (с гранью $\Re_l^k$) множества $\Sigma(\lambda, P_j)$, $\Im(\eta, P_j)$ и числа $\Delta(\eta, \lambda, P_j)$ ($j = 0, 1, ..., M, \lambda \in \Lambda_l^k$). Для произвольного мультииндекса $\nu \in N_0^n$ множества $\Sigma(\lambda, D^\nu P_j)$, $\Im(\eta, D^\nu P_j)$ и числа $\Delta(\eta, D^\nu P_j)$ определяются аналогично, если воспользоваться представлением многочлена $D^\nu P$ в виде

$$D^\nu P(\xi) = \sum_\alpha \gamma_{\alpha,\nu} \xi^\alpha = \sum_{j=0}^{M} D^\nu P_j(\xi) = \sum_{j=0}^{M} D^\nu P_{d_j}(\xi). \tag{0.7}$$

Статья имеет следующую структуру : §1 содержит вспомогательные результаты, §2 посвящен Задаче II для двуслойного случая, §3 посвящен Задаче I.

§1. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Лемма 1.1. Допустим, что для некоторого многочлена P, $D^\nu P < P$ для всех $\nu \in N_0^n$. Тогда многогранник Ньютона $\Re = \Re(P)$ является правильным (см. определение 0.5).

Доказательство : Положим $(D^\nu P) = \{\alpha; \alpha \in N_0^n, \gamma_{\alpha,\nu} \neq 0\}$, и пусть $\Re(D^\nu P)$ – характеристический многогранник множества $D^\nu P$. Предположим обратное, т.е. что $\Re(P)$ неправильный. Это равносильно тому, что для некоторого мультииндекса $\mu \in N_0^n$, $\Re(D^\mu P) \not\subset \Re(P)$. Следовательно, существует вершина e многогранника $\Re(D^\mu P)$, которая не принадлежит $\Re(P)$. Пусть $\eta \in \mathbb{R}^n$ – произвольная точка такая, что $\eta^e \neq 0$, и пусть λ – некоторая $\Re(D^\mu P)$–нормаль вершины e. При $\xi \to \infty$ для последовательности $\xi^s = s^\lambda \eta \equiv (s^{\lambda_1}\eta_1, ..., s^{\lambda_n}\eta_n)$ $(s = 1, 2, ...)$ имеем

$$|D^\mu P(\xi^s)| = s^{d(\lambda)}|\gamma_{e,\mu}| \cdot |\eta^e| + o(s^{d(\lambda)}), \qquad |P(\xi^s)| = o(s^{d(\lambda)}),$$

где $d(\lambda) > 0$, $\gamma_{e,\mu}\, \eta^e \neq 0$. Отсюда следует

$$\frac{|D^\mu P(\xi^s)|}{1 + |P(\xi^s)|} \to \infty \qquad \text{при} \quad s \to \infty$$

что противоречит $D^\nu P < P$. Лемма 1.1 доказана.

Пусть $\Re_i^j$ – правильные грани правильного характеристического многогранника $\Re = \Re(P)$ многочлена $P(\xi)$. Пусть $P^{i,j}(\xi)$ – многочлены, отвечающие граням $\Re_i^j$ $(i = 1, ..., M_j, j = 1, ..., n-1)$. По данному вектору $\mu \in \Lambda_l^k$ представим многочлен $P(\xi)$ в виде (0.6).

Лемма 1.2. Пусть $|P(\xi)| \to \infty$ при $\xi \to \infty$. Тогда :

а) Либо для всех $P^{i,j}(\xi) \geq 0$, либо $P^{i,j}(\xi) \leq 0$, для всех $\xi \in \mathbb{R}^n$ и $i = 1, ..., M_j, j = 0, 1, ..., n-1$.

б) Пусть $P^{i,j}(\xi) \geq 0$ для всех $\xi \in \mathbb{R}^n$, и пусть пара (l, k) фиксирована $(1 \leq l \leq M_j, 0 \leq k \leq n-1)$, $\mu \in \Lambda_l^k$, $\eta \in \mathbb{R}^n$, $P_{d_j(\mu)}(\eta) = 0$ $(j = 0, 1, ..., m-1)$, $P_{d_m(\mu)}(\eta) \neq 0$, где $0 \leq m \leq M(\mu)$, $d_m(\mu) > 0$. Тогда $P_{d_m(\mu)}(\eta) > 0$.

Доказательство : Пусть точки $\eta^0, \eta^1 \in \mathbb{R}^n$ и пары индексов (i_0, j_0), (i_1, j_1) $(1 \leq i_0 \leq M_{i_0}, 1 \leq i_1 \leq M_{i_1}, 0 \leq j_0, j_1 \leq n-1)$ такие, что $P^{i_0,j_0}(\eta^0) > 0$ и $P^{i_1,j_1}(\eta^1) < 0$ для $\mu^k \in \Lambda_{i_k}^{j_k}$, $\xi^{s,k} = s^{\mu^k}\eta^k$ $(k = 0, 1; s = 1, 2, ...)$. Так как $P^{i_k,j_k}(\xi)$ – μ^k–однородные многочлены, то из простых геометрических соображений следует

$$P(\xi^{s,k}) = P^{i_k,j_k}(\eta^k) \cdot s^{d_0(\mu^k)} + o(s^{d_0(\mu^k)}) \qquad \text{для} \quad k = 0, 1 \quad \text{при} \quad \xi \to \infty.$$

Это значит, что $P(\xi^{s,0}) \to +\infty$ и $P(\xi^{s,1}) \to -\infty$ при $s \to \infty$. Следовательно, существует последовательность $\{\xi^{s,2}\}$ такая, что $|\xi^{s,2}| \to \infty$ при $s \to \infty$ и $P(\xi^{s,2}) = 0$ для всех $s = 1, 2, ...$ Это противоречит предположению Леммы и доказывает утверждение а). Для доказательства утверждения б) заметим, что для некоторой точки $\eta^0 \in \mathbb{R}^n$, $P^{i,k}(\eta^0) > 0$, и достаточно изучать поведение многочлена $P(\xi)$ на последовательностях $\xi^{s,1} = \xi^{\mu}\eta$ $(s = 1, 2, ...)$, где $\mu \in \Lambda_i^k$ – произвольный вектор. Лемма 1.2 доказана.

Лемма 1.3. Пусть a, b, c, d, e – положительные числа такие, что $a < c$, $e < c$

$$\frac{a-e}{c-e} \leq \frac{b}{d}. \tag{1.1}$$

Тогда для всех $x \geq 1$, $y \in [0, 1]$

$$\frac{x^a\, y^b}{x^c\, y^d + x^e} \leq 1. \tag{1.2}$$

Доказательство : Достаточно доказать (1.2) для a, b, c, d, e таких, что $a < c$, $b < d$ и $d(a-e) = b(c-e)$. Поделив числитель и знаменатель в (1.2) на x^e и заменив $x^{(c-e)}$ на x и y^d на y соответственно, получим

$$(x\,y)^{b/d} \leq x\,y + 1. \tag{1.3}$$

Последнее неравенство можно легко проверить, если рассмотреть случаи $x\,y \leq 1$ и $x\,y \geq 1$.

Лемма 1.4 Пусть $\Re_i^k$ – некоторая правильная грань характеристического многогранника $\Re(P)$ многочлена P. Допустим, что $D^{\nu} P < P$ для всех $\mu \in N_0^n$, $\lambda \in \Lambda_i^k$, $d_j = d_j(\lambda) = d_j(\lambda, \Re_i^k)$ $(j = 0, 1, ..., M)$, $P_0 = P_{d_0}$, $\eta \in \Sigma(\lambda, P_0)$. Тогда

$$d_0(\lambda) - \Delta(\eta, \lambda, P_0) \leq d_1. \tag{1.4}$$

Доказательство : Допустим противное, т.е.

$$d_0(\lambda) - \Delta(\eta, \lambda, P_0) > d_1. \tag{1.5}$$

Выберем мультииндекс β такой, что $D^{\beta} P_0(\eta) \neq 0$, $(\lambda, \beta) = \Delta(\eta, P_0, \lambda)$ и подставим $\xi^s = s^{\lambda} \cdot \eta$ $(s = 1, 2, ...)$. Так как многочлены $P_j = P_{d_j}$ и $D^{\beta} P_j$ $(j = 0, 1, ..., M)$ являются λ-однородными, то $P_0(\eta) = 0$ и $D^{\beta} P_0(\eta) \neq 0$, и при $s \to \infty$ из (0.6) и (0.7) имеем $|P(\xi^s)| = s^{d_1}|P_1(\eta^0)| + o(s^{d_1})$,

$$|D^{\beta} P(\xi^s)| = s^{d_0 - (\lambda, \beta)}|D^{\beta} P_0(\eta)| + o(s^{d_0 - (\lambda, \beta)}).$$

Эти соотношения вместе с (1.5) показывают, что $|D^\beta P(\xi^s)| / [1 + |P(\xi^s)|] \to \infty$ при $\xi \to \infty$, что противоречит $D^\beta P < P$. Лемма 1.4 доказана.

В доказательстве следующей теоремы мы пользуемся методом, использованным в [2], [10].

Теорема 1.1. Если $|P(\xi)| \to \infty$ при $\xi \to \infty$, и $D_j P < P$ $(j = 1, 2, \dots)$, то $D^\nu P < P$ для всех $\nu \in N_0^n$.

Нам понадобятся две леммы.

Лемма 1.5. Если $|P(\xi)| \to \infty$ при $\xi \to \infty$ и $D_1 P < P$, то $D_1^j P < P$, $j = 1, 2, \dots$.

Доказательство : Предположим обратное, т.е. что существует последовательность $\{\xi^s\}$ такая, что $|\xi^s| \to \infty$ при $s \to \infty$ и

$$\sum_{j=1}^{m} \frac{\left|D_1^j P(\xi^s)\right|}{1 + |P(\xi^s)|} \to \infty, \tag{1.6}$$

где $m = \operatorname{ord} P$. Тогда существует число l $(2 \le l \le m)$ такое, что

$$\left|D_1^l P(\xi^s)\right| > 0, \qquad \sum_{j=1}^{m} \left|D_1^j P(\xi^s)\right| = O\left(\left|D_1^l P(\xi^s)\right|\right) \qquad (s = 1, 2, \dots). \tag{1.7}$$

Пусть l – наибольшее число, удовлетворяющее (1.7). Имеем

$$\sum_{j=1}^{l-1} \left|D_1^j P(\xi^s)\right| \le \varepsilon_s' \left|D_1^l P(\xi^s)\right|. \tag{1.8}$$

где, начиная с некоторого s', $\varepsilon_s' \in (0, 1)$ для $s \ge s'$ и $\varepsilon_s' \to 0$ при $s \to \infty$. Согласно (1.6) и (1.8) при $s \to \infty$ имеем

$$\left|D_1^l P(\xi^s)\right| / [1 + |P(\xi^s)|] \to \infty.$$

Следовательно, начиная с некоторого s''

$$|P(\xi^s)| \le \varepsilon_s'' \left|D_1^l P(\xi^s)\right| \qquad (s = s'', s'' + 1, \dots) \tag{1.9}$$

и $\varepsilon_s'' \to 0$, $\varepsilon_s'' \left|D_1^l P(\xi^s)\right| \to \infty$ при $s \to \infty$. Согласно (1.8) и (1.9), для всех $s \ge s''$ имеем

$$\sum_{j=1}^{l-1} \left|D_1^j P(\xi^s)\right| \le \varepsilon_s \left|D_1^l P(\xi^s)\right|, \tag{1.10}$$

где $\varepsilon_s = \max\{\varepsilon_s', \varepsilon_s''\}$ и $\varepsilon \in (0, 1)$ $(s \ge s_0)$ для некоторого $s_0 \ge \max\{s', s''\}$, и $\varepsilon_s \to 0$ при $s \to \infty$. Пусть $\eta^s = \xi^s + (t, 0, \dots, 0)$, $0 < t < 1$ $(s = 1, 2, \dots)$. По формуле

Тейлора и (1.7), (1.10), для некоторой постоянной $c \geq 1$ и для $s = s_0, s_0 + 1, \ldots$ имеем

$$1 + |P(\eta^s)| \leq 1 + \sum_{j=0}^{l-1} |D_1^j P(\xi^s)| + t^l \sum_{j=l}^{m} |D_1^j P(\xi^s)| = 1 + (\varepsilon_s + c t^l)\,|D_1^l P(\xi^s)|.$$

Так как $\varepsilon_s |D_1^l P(\xi^s)| \to \infty$ при $\xi \to \infty$, для достаточно больших s ($s \geq s_0$) имеем

$$1 + |P(\eta^s)| \leq (2\varepsilon_s + c t^l)\,|D_1^l P(\xi^s)|, \tag{1.11}$$

$$|D_1 P(\eta^s)| \geq \frac{t^{l-1}}{(l-1)!}|D_1^l P(\xi^s)| - \sum_{j=1}^{l-1} |D_1^j P(\xi^s)| - t^l \sum_{j=l+1}^{m} |D_1^j P(\xi^s)| \geq$$

$$\geq \left[\frac{t^{l-1}}{(l-1)!} - \varepsilon_s - c t^l\right] |D_1^l P(\xi^s)|. \tag{1.12}$$

Подставляя $t = t_s$ в (1.11) и (1.12), из $c t_s^l = \varepsilon_s$ для всех $s \geq s_0$ получим

$$\frac{|D_1 P(\eta^s)|}{1 + |P(\eta^s)|} \geq \frac{\dfrac{t_s^{l-1}}{(l-1)!} - \varepsilon_s - c t_s^l}{2\varepsilon_s + c t_s^l} = \frac{1}{c^{1-1/l}(l-1)!}\varepsilon_s^{-1/l} - \frac{2}{3}.$$

Так как $l \geq 2$, то при $s \to \infty$ получаем $|D_1 P(\eta^s)|/[1 + |P(\eta^s)|] \to \infty$, что противоречит условиям Леммы. Лемма 1.5 доказана.

Лемма 1.6. Пусть $|P(\xi)| \to \infty$ при $|\xi| \to \infty$ и $D_1 P < P$. Для любого многочлена $Q(\xi)$ такого, что $Q < P$ имеем

$$D_1^j Q < P \qquad (j = 1, 2, \ldots, m_1 = \mathrm{ord} Q).$$

Доказательство : Предположим обратное, т.е. что существует последовательность $\{\xi^s\}$ такая, что $|\xi^s| \to \infty$ при $s \to \infty$ и

$$\delta_s = \frac{1 + |P(\xi^s)|}{\sum_{j=1}^{m_1} |D_1^j Q(\xi^s)|} \to 0. \tag{1.13}$$

Рассуждая как и в доказательстве (1.12), получаем

$$|Q(\eta^s)| \geq \left[\frac{t^l}{l!} - \alpha_s - c t^{l+1}\right] |D_1^l Q(\xi^s)| \tag{1.14}$$

для некоторых чисел $\{\alpha_s\}$, удовлетворяющих $\alpha_s \to 0$ и $\alpha_s |D_1^l Q(\xi_1^s)| \to \infty$ при $s \to \infty$. Согласно Лемме 1.5, в силу $D_1 P < P$ и (1.13), для всех $s = 1, 2, \ldots$ получим

$$1 + |P(\eta^s)| \leq 1 + |P(\xi^s)| \leq \delta_s^1 \,|D_1^l Q(\xi^s)|, \tag{1.15}$$

где $\delta_s^1 \to 0$ при $s \to \infty$. Тогда согласно (1.14) и (1.15), для всех достаточно больших s имеем

$$\frac{|Q(\eta^s)|}{1+|P(\eta^s)|} \geq \frac{1}{\varepsilon_s}\left[\frac{t^l}{l!} - \varepsilon_s - c\,t^{l+1}\right] \geq -1 + \frac{t^l}{\varepsilon_s}\left(\frac{1}{l!} - c\,t\right), \tag{1.16}$$

где $\varepsilon_s = \max\{\alpha_s, \delta_s^1\}$. Пусть $t_s \in (0,1)$ такая, что $t_s^l = \sqrt{\varepsilon_s}$. Так как $\varepsilon_s \to 0$ при $s \to \infty$ и для достаточно больших s, то имеем $\frac{1}{l!} - c\,t_s \geq \frac{1}{2l!}$. Следовательно, из (1.16) имеем

$$\frac{|Q(\eta^s)|}{1+|P(\eta^s)|} \geq -1 + \frac{1}{2l!}\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_s}} \to \infty \qquad \text{при} \quad s \to \infty.$$

Это противоречит предположениям. Лемма 1.6 доказана.

Доказательство Теоремы 1.1 : Пусть $D_i P < P$ $(i = 1, ..., n)$ и $Q(\xi) = D_2 P(\xi)$. Имеем $Q < P$, и согласно Лемме 1.6 $D_1 Q = D_1 D_2 P < P$. Остальная часть доказательства очевидна. Теорема 1.1 доказана.

§2. МНОГОЧЛЕНЫ С ОДНОСЛОЙНЫМ ВЫРОЖДЕНИЕМ И С ИЗОЛИРОВАННЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ. ЗАДАЧА II

На класс изучаемых многочленов мы будем накладывать дополнительные ограничения, некоторые по существу, а часть из них технические.

Условие I. Предположим, что изучаемые многочлены могут иметь только однослойные вырождения, т.е. если многочлен P представлен в виде (0.6) по некоторому вектору λ и $P_{d_0}(\eta) = 0$ для $\eta \in R^{n,0}$, то $P_{d_1}(\eta) \neq 0$, или что то же самое $\sum(P_{d_0}) \cap \sum(P_{d_1}) = \emptyset$. Главную роль играют слои $(\lambda, \alpha) = d_0$ и $(\lambda, \alpha) = d_1$.

Условие II. Если $\Re = \Re(P)$ – правильный многогранник Ньютона многочлена P, то либо все главные грани многогранника $\Re$ регулярны, либо нерегулярна единственная вполне правильная грань размерности $n-1$.

Общий случай (более чем одна вполне правильная нерегулярная грань и грань размерности $k < n-1$) могут быть получены сопоставлением методов доказательства нижеприводимой Теоремы 2.1 и Леммы 1.1 работы [9]. Рассмотрение вполне правильных нерегулярных граней правильного многогранника $\Re(P)$ мотивируется следующим утверждением.

Лемма 2.1. Пусть $n = 2$, и пусть $\Re = \Re(P)$ – **правильный характеристический многогранник многочлена** P. **Допустим, что** $D^\nu P < P$ **для всех** $\nu \in N_0^2$. **Тогда каждая главная нерегулярная грань многогранника** $\Re$ **вполне правильная.**

Доказательство : Допустим обратное, т.е. что одномерная правильная грань Γ характеристического многогранника $\Re$ нерегулярна и внешная нормаль λ этой грани имеет нулевую координату. Так как все главные грани полного многогранника являются правильными, то координаты вектора λ неотрицательны. Пусть $\lambda = (1,0)$. Очевидно, что подмногочлен, отвечающий грани, Γ имеет вид

$$P_0(\xi) = a_0 \xi_1^{d_0} \overline{P_0}(\xi_2),$$

где $a_0 \neq 0$ и $\overline{P_0}$ - многочлен от ξ_2. Пусть $P_0(\eta) = 0$ для некоторой точки $\eta \in R^{2,0}$ и $m = \operatorname{ord}\overline{P_0}$. Покажем, что $D_2^j P_0(\eta) = 0$ $(j = 0, 1, ..., m-1)$ и следовательно, многочлен $\overline{P_0}$ представляется в виде $\overline{P_0}(\xi_2) = b_0(\xi_2 - \eta_2)^m$, где $b_0 \neq 0$. Если предположить обратное, т.е. $D_2^{j_0}\overline{P_0}(\eta_2) \neq 0$ для некоторого j_0 $(1 \leq j_0 \leq m-1)$, то рассматривая последовательность $\xi^s = (s\,\eta_1, \eta_2)$ $(s = 1, 2, ...)$ для многочленов P и $D_2^{j_0}P$ $(s = 1, 2, ...)$ (см. (0.6)), будем иметь

$$P_{d_0}(\xi^s) = s^{d_0} P_{d_0}(\eta) = 0; \ |P_{d_j}(\xi^s)| \leq c_j\, s^{d_j}\ j = 1, ..., M; \ |D_2^{j_0} P(\xi^s)| \geq c_{M+1} s^{d_0}$$

для некоторых постоянных $c_j \geq 0$ $(j = 1, ..., M)$, $c_{M+1} > 0$ (так как $\operatorname{ord}_{\xi_1} P_j = d_j < d_0$ $(j = 0, ..., M)$), и

$$\frac{\left|D_2^{j_0} P(\xi^s)\right|}{1 + |P(\xi^s)|} \to \infty \qquad \text{при} \quad \xi \to \infty.$$

Это противоречит предположению леммы. Теперь повторяя приведенные рассуждения, с заменой m на j_0, получим доказательство Леммы 2.1.

Определение 2.1. Обобщенно-однородный многочлен $R(\xi)$ называется многочленом с изолированными характеристиками, если для кажлой точки $\eta \in \Sigma(R)$ существуют окрестность $\cup(\eta)$, гладкие обобщенно-однородные функции $q(\xi) = q(\xi, \eta)$, $r(\xi) = r(\xi, \eta)$ и натуральное число $k = k(\eta)$ таие, что

$$R(\xi) = [q(\xi)]^m\, r(\xi), \qquad \xi \in \cup(\eta) \tag{2.1}$$

и при этом $\operatorname{grad} q(\eta, \eta) \neq 0$, $r(\eta, \eta) \neq 0$.

Замечание 2.1 Пусть $R(\xi)$ – λ- однородный многочлен вида (2.1), $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n > 0$ и $D_n q(\eta, \eta) \neq 0$.

Дифференциальные операторы с изолированными характеристиками главных символов изучены, например, в работах [6] и [11]. Доказано, что для $n = 2$

каждый обобщенно-однородный многочлен имеет лишь изолированные характеристики. Пусть $\Gamma = \Re_l^{n-1}$, $1 \le l \le M_{n-1}$ – вполне правильная нерегулярная грань характеристического многогранника $\Re(P)$ многочлена $R(\xi)$, а $P_0(\xi) \equiv P^{l,n-1}(\xi)$ – отвечающий ей подмногочлен, и пусть μ – $\Re$-нормаль этой грани, которая определяется однозначно.

Условие III. Подмногочлен P_0 есть многочлен с изолированными характеристиками.

Пусть P – многочлен, допускающий представление в виде μ-однородных многочленов (см. (0.6))

$$P(\xi) = \sum_{j=0}^{M} P_j(\xi) = \sum_{j=0}^{M} \sum_{(\mu,\alpha)=d_j} \gamma_\alpha \xi^\alpha, \tag{2.2}$$

где $d_0 > d_1 > \ldots > d_M \ge 0$, $P_j(\xi) = P_{d_j}(\xi)$ $(j = 0, 1, \ldots, M)$, $P_0(\xi) \equiv P^{l,n-1}(\xi)$. Следующая теорема является основным результатом этой статьи и дает решение Задачи II в вышеописанном классе многочленов.

Теорема 2.1. Пусть $|P(\xi)| \to \infty$, и пусть $\Re = \Re(P)$ – правильный многогранник Ньютона многочлена P.

а) Если все правильные грани $\Re$ регулярны, то $D^\nu P < P$ для всех $\nu \in N_0^n$.

б) Пусть $\Gamma = \Re_i^{n-1}$ – единственная нерегулярная вполне правильная грань характеристического многогранника $\Re(P)$, и пусть μ есть $\Re$-нормаль этой грани. Допустим, что подмногочлен P_0 имеет лишь изолированные характеристики и $\Sigma(P_0) \cap \Sigma(P_1) = \emptyset$. Необходимое и достаточное условие для $D^\nu P < P$ при всех $\nu \in N_0^n$ есть

$$d_0 - \Delta(\eta, P_0) \le d_1, \qquad \eta \in \Sigma(P_0). \tag{2.3}$$

Доказательство : Необходимость условия (2.3) следует из Леммы 1.4. Утверждение а) и часть утверждения б), относящиеся к достаточности, мы докажем параллельно. Допустим обратное, что в обоих случаях существуют мультииндекс $0 \ne \nu^0 \in N_0^n$ и последовательность $\{\xi^s\}$ такие, что $|\xi^s| \to \infty$ при $s \to \infty$ и

$$\frac{\left|D^{\nu^0} P(\xi^s)\right|}{1 + |P(\xi^s)|} \to \infty. \tag{2.4}$$

Без потери общности можно предположить, что $\xi_i^s > 0$ $(i = 1, \ldots, n;\ s = 1, 2, \ldots)$.

Для $s = 1, 2, \dots$ положим

$$\lambda_i^s = \frac{\ln \xi_i^s}{\sqrt{\sum_{j=1}^{n} (\ln \xi_j^s)^2}}; \qquad \rho_s = \exp \sqrt{\sum_{j=1}^{n} (\ln \xi_j^s)^2},$$

где $\xi^s = \rho_s^{\lambda_i^s}$, $(\xi_i^s = \rho_s^{\lambda_i^s}$, $i = 1, \dots, n; s = 1, 2, \dots)$. Так как векторы λ^s принадлежат единичной сфере, то можем предположить, что $\lambda^s \to \lambda^\infty$ при $s \to \infty$. Из выпуклости многогранника $\Re$ следует, что λ^∞ является нормалью к одной (и только одной) грани многогранника $\Re$. Пусть $\{e^{1,j}\}_{j=\overline{1,n}}$ - ортонормированный базис в $\mathbb{R}^n$ такой, что $e^{1,1} = \lambda^\infty$. Имеем $\lambda^s = \sum_{j=1}^n \lambda_{1,j}^s e^{1,j}$ и $\lambda_{1,1}^s \to 1$, $\lambda_{1,j}^s = o(\lambda_{1,1}^s)$, $j = 1, 2, \dots$, поскольку $\lambda^s \to e^{1,1}$ при $s \to \infty$. Если для достаточно больших s базис $(e^{1,1}, \dots, e^{1,n})$ удовлетворяет условию $\sum_{j=2}^n \lambda_{1,j}^s e^{1,j} = 0$, то обозначим его через $(e^1, \dots, e^n)$. В противном случае можно предположить, что $\sum_{j=2}^n \lambda_{2,j}^s e^{1,j} \neq 0$ и при $s \to \infty$

$$\frac{\sum_{j=2}^n \lambda_{1,j}^s e^{1,j}}{\left|\sum_{j=2}^n \lambda_{1,j}^s e^{1,j}\right|} \to e^{2,2}.$$

На линейной оболочке базиса $(e^{1,2}, \dots e^{1,n})$ рассмотрим базис $(e^{2,2}, \dots e^{2,n})$ с вектором $e^{2,2}$, определенным выше. Имеем $\lambda^s = \lambda_{1,1}^s e^{1,1} + \sum_{j=2}^n \lambda_{2,j}^s e^{2,j}$ и $\lambda_{2,2}^s = o(\lambda_{1,1}^s)$ при $s \to \infty$. Продолжая этот процесс заключаем, что $\lambda^s = \sum_{j=1}^n x_j^s e^j$, где e^1, e^2, ..., e^n - ортонормированный базис в $\mathbb{R}^n$ и $x_1^s \to 1$, $x_{j+1}^s = o(x_j^s)$, $j = 1, \dots, n-1$ при $s \to \infty$. При этом существуют числа m и s_0 такие, что $\lambda_j^s \neq 0$ $(j = 1, \dots, m)$, $\lambda_i^s = 0$ $(i = m+1, \dots, n)$, $1 \leq m \leq n$ для всех $s \geq s_0$. Можно прелположить, не умаляя общности, что $s_0 = 1$ и $\lambda_i^s > 0$ $(j = 1, \dots, m)$ для всех s. Для того, чтобы связать построенный базис с многогранником Ньютона $\Re = \Re(P)$ многочлена P, рассмотрим грани $\Re_{i_1}^{k_1}, \dots, \Re_{i_m}^{k_m}$ характеристического многогранника $\Re$. Возьмем грань $\Re_{i_1}^{k_1}$, лежащую в опорной гиперплоскости к $\Re$ с $\Re$-нормалью e^1, и каждая грань $\Re_{i_j}^{k_j}$ $(j = 2, \dots, m)$ либо совпадает с $\Re_{i_{j-1}}^{k_{j-1}}$, либо является подгранью $\Re_{i_{j-1}}^{k_{j-1}}$, и в обоих случаях $\Re_{i_j}^{k_j}$ лежат в ортогональной e^j опорной гиперплоскости к $\Re_{i_{j-1}}^{k_{j-1}}$, для которой вектор e^j является $\Re_{i_{j-1}}^{k_{j-1}}$ -нормалью. Отсюда следует, что размерности граней $\Re_{i_1}^{k_1}, \dots, \Re_{i_m}^{k_m}$ удовлетворяют $k_1 \geq k_2 \geq \dots \geq k_m$. Пусть, как и выше, $P^{i_j,k_j}(\xi)$ и $D^{\nu^0} P^{i_j,k_j}(\xi)$ суть подмногочлены многочленов $P(\xi)$ и $D^{\nu^0} P(\xi)$, отвечающие грани $\Re_{i_j}^{k_j}$ $(j = 1, \dots, m)$, т.е.

$$P^{i_j,k_j}(\xi) = \sum_{\alpha \in \Re_{i_j}^{k_j}} \gamma_\alpha \xi^\alpha; \qquad D^{\nu^0} P^{i_j,k_j}(\xi) = \sum_{\beta \in \Re_{i_j}^{k_j}} \gamma_{\beta,\nu^0} \xi^{\beta - \nu^0}, \tag{2.5}$$

где во второй сумме $\gamma_{\beta,\nu^0}=0$ при $\beta<\nu^0$. Теперь сравним поведение многочленов $P(\xi)$ и $D^{\nu^0}P(\xi)$, полагая

$$\rho_s\to\infty,\qquad \xi^s=\rho_s^{\sum_{j=1}^n x_j^s e^j}\qquad (s=1,2,\dots). \tag{2.5'}$$

Можно предположить, что для некоторого r $(1\le r\le m)$ имеем

$$\rho_s^{x_r^s}\to\infty,\qquad \rho_s^{x_{r+1}^s}\to b\ge 1\quad\text{при}\quad s\to\infty. \tag{2.6}$$

Для $r=m=n$ положим $x_{n+1}^s=0$ для всех $s=1,2,\dots$. Из выпуклости многогранника $\Re$ и его граней и из e^j-однородности подмногочленов $P_{i_j}^{k_j}$, при некотором мультииндексе α, принадлежащем всем граням $\Re_{i_j}^{k_j}$ в силу (2.5) имеем

$$\begin{aligned}P(\xi^s)&=\rho_s^{(\alpha,x_1^s e^1)}\left[P^{i_1,k_1}\left(\rho_s^{\sum_{j=2}^{n+1}x_j^s e^j}\right)+o(\rho^{-\varepsilon_1 x_1^s})\right]=\\&=\rho_s^{(\alpha,x_1^s e^1+x_2^s e^2)}\left[P^{i_2,k_2}\left(\rho_s^{\sum_{j=3}^{n+1}x_j^s e^j}\right)+o(\rho^{-\varepsilon_2 x_2^s})\right]=\\&=\dots=\rho_s^{\left(\alpha,\sum_{j=3}^{r}x_j^s e^j\right)}\left[P^{i_r,k_r}\left(\rho_s^{\sum_{j=r+1}^{n+1}x_j^s e^j}\right)+o(\rho^{-\varepsilon_r x_r^s})\right],\end{aligned} \tag{2.7}$$

где $\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_m$ – некоторые положительные числа и e^{n+1} – некоторый единичный вектор для $r=m=n$. Из (2.6) и определения чисел x_j^s $(j=1,\dots,n)$ имеем

$$\rho_s^{\sum_{j=r+1}^{n+1}x_j^s e^j}\to e^{r+1}\equiv\eta.$$

Очевидно, что $0<\eta_i<\infty$ $(i=1,\dots,n)$, т.е. $\eta\in R^{n,0}$. Так как (α,e^1) есть расстояние от начала координат до гиперплоскости, содержащей грань $\Re_{i_1}^{k_1}$, то возможны два случая : $(\alpha,e^1)>0$ и $(\alpha,e^1)=0$. Пусть $\alpha,e^1>0$. В этом случае грань $\Re_{i_1}^{k_1}$ главная и правильная. Предположим сначала, что $P^{i_r,k_r}(\eta)\ne 0$ (единственный возможный случай при предположении а)). Так как $(\alpha,e^1)>0$, $x_1^s\to 1$, $x_{i+1}^s=o(x_i^s)$ $(i=1,\dots)$ при $s\to\infty$, то имеем $\left(\alpha,\sum_{j=1}^r x_j^s e^j\right)>0$ для всех достаточно больших s. Из (2.7) для таких s имеем

$$|P(\xi^s)|=\rho_s^{(\alpha,e^1)}|P^{i_r,k_r}(\eta)|(1+o(1)). \tag{2.8}$$

Аналогично, для многочлена $D^{\nu^0}P$ имеем

$$\begin{aligned}|D^{\nu^0}P(\xi^s)|&\le c_1\,\rho_s^{(\alpha,e^1)-(\nu^0,e^1)}|D^{\nu^0}P^{i_r,k_r}(\eta)|+o(\rho^{(\alpha,e^1)})\le\\&\le c_1\,\rho_s^{(\alpha,e^1)}|D^{\nu^0}P^{i_r,k_r}(\eta)|+o(\rho_s^{(\alpha,e^1)}),\end{aligned} \tag{2.9}$$

где $c_1 \geq 0$ – некоторая постоянная. Соотношения (2.8) и (2.9) противоречат (2.4). Пусть теперь $P^{l_r,k_r}(\eta) = 0$ в утверждении б). Так как $\eta \in R^{n,0}$ и $(\alpha, e^1) > 0$, то $\Re^{k_r}_{l_r}$ главная, нерегулярная грань и совпадает с единственной вполне правильной нерегулярной гранью Γ, $r = m = 1$, $k_r = k_1 = n - 1$, $e^1 = \mu$ является μ-внешней нормалью грани Γ, $\eta \in \Sigma(P_0)$. Так как по предположению, P_0 есть многочлен с изолированными характеристиками, то существуют окрестность $\cup(\eta)$, гладкие μ-однородные функции $q(\xi)$, $r(\xi)$ и натуральное число k такие, что

$$P_0(\xi) = [q(\xi)]^k r(\xi), \qquad \xi \in \cup(\eta), \tag{2.10}$$

и $D_n q(\eta) \neq 0$, $r(\eta) \neq 0$. Положим $Q(\xi) \equiv P(\xi) - P_0(\xi) = P_1(\xi)$. В окрестности $\cup(\eta)$

$$P(\xi) = [q(\xi)]^k r(\xi) + P_1(\xi) + Q(\xi). \tag{2.11}$$

Заметим сначала, что Теорема 1.1 позволяет нам считать, что $|\nu^0| = 1$. Так как число k в (2.10) натуральное, то имеем $|\nu^0| < k$. Пусть для определенности $\nu^0 = (1, 0, ..., 0)$. Из (2.10) для многочлена $D^{\nu^0} P_0(\xi) \equiv D_1 P_0(\xi)$ имеем при $\xi \in \cup(\eta)$

$$D_1 P_0(\xi) = [q(\xi)]^k D_1 r(\xi) + k\,[q(\xi)]^{k-1} D_1 q(\xi). \tag{2.12}$$

Многочлены P_0, $D_1 P_0$, P_1, $D_1 P_1$ μ-однородны. Подставляя значение $\{\xi^s\}$ из (2.5') в (2.11), (2.12) и полагая

$$\eta^s = \rho_s^{\sum_{j=2}^{n+1} x_j^s e^j} \qquad (s = 1, 2, ...)$$

для достаточно больших s (для s, удовлетворяющих $\eta^s \in \cup(\eta)$), получим

$$P(\xi^s) = \rho_s^{x_1^s d_0} P_0(\eta^s) + \rho_s^{x_1^s d_1} P_1(\eta^s) + Q(\xi^s) = \rho_s^{x_1^s d_0} [q(\eta^s)]^k r(\eta^s) + \rho_s^{x_1^s d_1} P_1(\eta^s) + Q(\xi^s), \tag{2.13}$$

$$\begin{aligned} D_1 P(\xi^s) &= \rho_s^{x_1^s [d_0 - \mu_1]} D_1 P_0(\eta^s) + \rho_s^{x_1^s [d_1 - \mu_1]} D_1 P_1(\eta^s) + D_1 Q(\xi^s) = \\ &= \rho_s^{x_1^s [d_0 - \mu_1]} \left([q(\eta^s)]^k D_1 r(\eta^s) + k\,[q(\eta^s)]^{k-1} D_1 q(\eta^s) \right) + \\ &+ \rho_s^{x_1^s [d_0 - \mu_1]} D_1 P_1(\eta^s) + D_1 Q(\xi^s). \end{aligned} \tag{2.14}$$

Так как $|P(\xi^s)| \to \infty$ и $\eta^s \to \eta$ при $s \to \infty$ и $P_0(\eta) = 0$, то из Леммы 1.2 следует, что $P_0(\eta^s) \geq 0$ и $P_1(\eta^s) > 0$ для достаточно больших s. С другой стороны, из простых геометрических соображений, при $s \to \infty$ имеем

$$|Q(\xi^s)| = o\left(\rho_s^{x_1^s d_1}\right), \qquad |D_1 Q(\xi^s)| = o\left(\rho_s^{x_1^s [d_1 - \mu_1]}\right). \tag{2.15}$$

Из (2.13) и (2.15) для достаточно больших s имеем

$$1+|P(\xi^s)| \geq c_2\left[1+\rho_s^{x_1^s d_1}\right], \tag{2.16}$$

где $c_2 > 0$ – постоянная. Так как $d_1 < d_0$, то из (2.14) и (2.15) получим

$$|D_1 P(\xi^s)| \leq c_3\,\rho_s^{x_1^s[d_0-\mu_1]}, \tag{2.17}$$

где $c_3 \geq 0$ – некоторая постоянная. Сначала предположим, что $k = 1$. По предположению, $D_n q(\eta) \neq 0$, так что из условия (2.3) следует $d_0 - \mu_n \leq d_1$. С другой стороны, $d_0 - \mu_1 \leq d_0 - \mu_n \leq d_1$ поскольку $\mu_1 \geq \mu_n$. Оценки (2.16) и (2.17) вместе противоречат (2.4). Пусть теперь $k > 1$. Так как по предположению $r(\eta) \neq 0$, то для достаточно больших s имеем $r(\eta^s) \neq 0$. Следовательно, согласно Лемме 1.2 и (2.13), для достаточно больших s имеем

$$1+P(\xi^s) \geq c_4\left[1+\rho_s^{x_1^s d_0}[q(\eta^s)]^k+\rho_s^{x_1^s d_1}\right], \tag{2.18}$$

где $c_4 > 0$ – постоянная. Для $k > 1$ многочлен $D_1 P_0$ представляется в виде

$$D_1 P_0(\xi) = [q(\xi)]^{k_1-1} Q_1(\xi), \tag{2.19}$$

где $Q_1(\xi) = q(\xi) D_1 r(\xi) + k\, D_1 q(\xi)$. Из (2.14), (2.15) и (2.19) следует, что для некоторой постоянной $c_5 \geq 0$ и для всех $s = 1, 2, \ldots$

$$|D_1 P(\xi^s)| \leq c_5\left[\rho_s^{x_1^s[d_0-\mu_1]}|q(\eta^s)|^{k-1}+\rho_s^{x_1^s[d_1-\mu_1]}\right]. \tag{2.20}$$

Из (2.18) и (2.20) следует, что для достаточно больших s

$$\frac{|D_1 P(\xi^s)|}{1+|P(\xi^s)|} \leq c_6\frac{\rho_s^{x_1^s[d_0-\mu_1]}|q(\eta^s)|^{k-1}}{1+\rho_s^{x_1^s d_0}|q(\eta^s)|^k+\rho_s^{x_1^s d_1}}+c_6\frac{\rho_s^{x_1^s[d_0-\mu_1]}}{1+\rho_s^{x_1^s d_1}}, \tag{2.21}$$

где $c_6 = c_5/c_4$. Так как $\rho_s \to \infty$, $x_1^s \to 1$ при $s \to \infty$ и $\mu_1 > 0$, то очевидно, что второе слагаемое в правой части (2.21) ограничено для всех s. Для оценки первого слагаемого заметим, что из прелположения $D_n q(\eta) \neq 0$ слелует $D_n^k P_0(\eta) \neq 0$. Следовательно, из (2.3) получим $d_0 - \Delta(\eta, P - 0) = d_0 - k\mu_n \leq d_1$. Теперь для $x = \rho_s^{x_1^s}$, $y = |q(\eta^s)|$, $a = d_0 - \mu_1$, $b = k-1$, $c = d_0$, $d = ke = d_1$ применим Лемму 1.3. Заметим, что для достаточно больших s, $x = \rho_s^{x_1^s} \geq 1$ имеем $y = |q(\eta^s)| \in [0, 1]$, так что условие Леммы 1.3 сводится к $d_0 - k\mu_1 \leq d_1$. Это противоречие с (2.4) завершает доказательство для случая $(\alpha, e^1) > 0$. Пусть теперь $(\alpha, e^1) = 0$. Сначала отметим, что если многочлен P имеет правильный многогранник Ньютона $\Re$, то многогранник Ньютона многочлена $P(\xi)|_{\xi_j} = 0$ $(1 \le j \le n)$ также правильный. С другой стороны, грань, для которой e^1 является $\Re$-нормалью, проходит через начало координат, т.е. является неглавной гранью для $\Re$. Следовательно, $e_i^1 \le 0$ $(i = 1, ..., n)$. Заметим, что если эта грань имеет размерность m $(1 \le m \le n-1)$, то можно предположить, что $e_1^1 = ... = e_m^1 = 0$, $e_{m+1}^1 < 0,...,e_n^1 < 0$. Так как

$$e_j^1 = \lim_{s\to\infty} \frac{\ln \xi_i^s}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} (\ln \xi_j^s)^2}} < 0,$$

то начиная с некоторого s_0 имеем $\xi_j^s < 1$ $(j = m+1, ..., n; s = s_0, s_0+1, ...)$. Далее, так как $\xi^s \to \infty$ для некоторого i $(1 \le i \le m)$ имеем $\xi_i^s \to \infty$. Следовательно, для некоторой подпоследовательности $\{\xi^s\}$, $\xi_j^s \to \infty$ по крайней мере для одного j $(m < j \le n)$, и

$$\frac{\sum\limits_{j=1}^{m} (\ln \xi_j^s)^2}{(\ln \xi_j^s)^2} \to \infty \qquad \text{при} \quad s \to \infty. \tag{2.22}$$

Пусть $\psi(\xi) = \max\limits_{1\le i\le m} \xi_i$. Для некоторых $\varepsilon > 0$ и j, удовлетворяющих (2.22), положим $\xi_j^s = o([\psi(\xi^s)]^{-\varepsilon})$, т.е. для каждого $\alpha_1 > 0$ и $\alpha_2 \ge 0$

$$(\xi_j^s)^{\alpha_1} [\psi(\xi^s)]^{\alpha_2} \to 0. \tag{2.23}$$

Таким образом, в многочленах $P(\xi^s)$ и $D^{\nu^0} P(\xi^s)$ важную роль играют мономы $\xi^\beta = \xi_1^{\beta_1} ... \xi_n^{\beta_n}$ с $\beta_j = 0$ для j, удовлетворяющие условию (2.23). Поэтому полагая $\bar{\xi} = (\bar{\xi}_1, ..., \bar{\xi}_n)$, где $\bar{\xi}_j = 0$ если j удовлетворяет (2.23) и $\bar{\xi}_j = \xi_j$ в противном случае, легко видеть, что для некоторой подпоследовательности $\{\xi^s\}$ соотношение (2.4) в обоих утверждениях а) и б) превращается в соотношение

$$\frac{D^{\nu^0} P(\bar{\xi})}{1 + |P(\bar{\xi}^s)|} \to \infty \quad \text{при} \quad s \to \infty. \tag{2.24}$$

Таким образом, для случая $(\alpha, e^1) = 0$ получим многочлен $P(\bar{\xi})$ от n переменных, чей правильный многогранник Ньютона имеет лишь регулярные правильные грани. Повторяя вышеприведенные рассуждения для многочлена $P(\bar{\xi})$ и многогранника $\bar{\Re} = \Re(P(\bar{\xi}))$, после конечного числа шагов получим либо противоречие, либо соотношение (2.24) в одномерном случае. Последнее соотношение очевидно. Теорема 2.1. доказана.

Замечание 2.2. При $n = 2$ полученный результат в классе двуслойных многочленов окончателен. Действительно, в этом случае нерегулярными могут быть лишь одномерные грани. Из результатов работы [11] следует, что при $n = 2$ обобщенно-однородный многочлен имеет лишь изолированные характеристики. Теперь приведем два примера многочленов, удовлетворяющих Условиям I–III и Теореме 2.1.

Пример 1. Пусть $n = 2$ и $P(\xi_1, \xi_2) = (\xi_1^2 - \xi_1 \xi_2^2)^2 + \xi_2^6$. Многогранник Ньютона этого многочлена является вполне правильным четырехугольником с вершинами $(0,0)$, $(4,0)$, $(2,4)$, $(0,6)$. Вполне правильная грань $(2,4)$–$(0,6)$ регулярна. Единственной нерегулярной гранью является одномерная вполне правильная грань $(4,0)$–$(2,4)$ с единичной внешней нормалью $\mu = (2/\sqrt{5}, 1/\sqrt{5})$. Следовательно, Условие II выполняется. Имеем $d_0 = 8/\sqrt{5}$, $d_1 = 6/\sqrt{5}$, $P_0(\xi) = \xi_1^2(\xi_1 - \xi_2^2)^2$, $P_1(\xi) = \xi_2^6$. Множество $\Sigma(P_0)$ содержит точки вида $(t, \sqrt{t})$ или $(t, -\sqrt{t})$ при $t \neq 0$. Для точек $\eta \in \Sigma(P_0)$ имеем $P_1(\eta) \neq 0$, $\Delta(\eta, P_0) = 2/\sqrt{5}$. Следовательно, Условие I и (2.3) выполняются. Условие III следует из представления $P_0(\xi) = \xi_1^2(\xi_1 - \xi_2^2)$. Таким образом, из Теоремы 2.1 имеем $D^\nu P < P$ для всех $\nu \in N_0^2$.

Пример 2. Пусть $n = 3$ и $P(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = (\xi_1^4 + \xi_2^4 + \xi_3^4 - 3\xi_1^2 \xi_2 \xi_3)^2 + \xi_1^6$. Многогранником Ньютона этого многочлена является вполне правильная пирамида с вершинами $(0,0,0)$, $(8,0,0)$, $(0,8,0)$, $(0,0,8)$. Единственной вполне правильной нерегулярной гранью является двумерная грань $(8,0,0)$–$(0,8,0)$–$(0,0,8)$. Следовательно, Условие II выполняется. Имеем $\mu = (1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$, $d_0 = 8/\sqrt{3}$, $d_1 = 6/\sqrt{3}$, $P_0(\xi) = (\xi_1^4 + \xi_2^4 + \xi_3^4 - 3\xi_1^2 \xi_2 \xi_3)^2$, $P_1(\xi) = \xi_1^6$. Простые вычисления показывают, что для однородного многочлена $q(\xi) = \xi_1^4 + \xi_2^4 + \xi_3^4 - 3\xi_1^2 \xi_2 \xi_3$ имеем $\mathrm{grad}\, q(\xi) \neq 0$ при $|\xi| \neq 0$. Следовательно, $\Delta(\eta, P_0) = 2/\sqrt{3}$ для всех $\eta \in \Sigma(P_0)$ и многочлен $P_C(\xi)$ представляется в виде (2.1) при $m = 2$ и $r(\xi) \equiv 1$. Таким образом, Условие III и (2.3) выполняются. Выполнение Условия I очевидно. Таким образом, по Теореме 2.1 имеем $D^\nu P < P$ для всех $\nu \in N_0^3$.

§3. ОЦЕНКИ ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ В ЗАДАЧЕ I

Из результатов предыдущих пунктов следует, что если многогранник Ньютона многочлена не является правильным, либо нарушается условие (2.3), тогда существуют мультииндексы $\{\nu\}$ такие, что $D^\nu P \not< P$. В этом параграфе мы покажем, что если нарушается одно из этих условий, то все еще существует набор мультииндексов $\{\nu\}$ такой, что $D^\nu P < P$.

Теорема 3.1. Пусть $\Re = \Re(P)$ – правильный многогранник Ньютона многочлена $P(\xi) = P(\xi_1, ..., \xi_n)$. Предположим, что $|P(\xi)| \to \infty$ при $\xi \to \infty$ и что все главные грани $\Re$ регулярны. Тогда $D^\nu P < P$ для тех и только тех $\nu \in N_0^n$, для которых $(D^\nu P) \subset \Re$.

Необходимость следует из рассуждений, использованных в доказательстве Леммы 1.1, а достаточность следует из рассуждений, использованных в доказательстве утверждения а) Теоремы 2.1.

Теорема 3.2. Пусть $\Re$ – правильный многогранник Ньютона многочлена P. Предположим, что $|P(\xi)| \to \infty$ при $\xi \to \infty$ и все правильные грани $\Re$ регулярны, за исключением $(n-1)$–мерной правильной грани Γ. Пусть μ – $\Re$–нормаль грани Γ и $\Sigma(P_{d_0(\mu)}) \cap \Sigma(P_{d_1(\mu)}) = \emptyset$. Тогда $D^\nu P < P$ при $d_0 - (\mu, \nu) \le d_1$.

Замечание 3.1. В отличие от Теоремы 2.1 а) изолированность характеристик многочлена P_0 не требуется; б) правильная (но не вполне правильная) грань может быть нерегулярной.

Доказательство Теоремы 3.2 : следует из Леммы 1.1 в [9], так как для $d_0 - (\mu, \nu) \le d_1$ для всех мономов ξ^α многочлена $D^\nu P$ имеем $(\mu, \alpha) \le d_1$.

Следующий результат докажем для двумерного случая, предполагая, что подмногочлен, отвечающий одномерной грани, является однородным.

Теорема 3.3. Пусть $\Re = \Re(P)$ – правильный многогранник Ньютона многочлена $P(\xi) = P(\xi_1, \xi_2)$. Предположим, что $|P(\xi)| \to \infty$ при $\xi \to \infty$ и все правильные грани $\Re$ регулярны, за исключением одномерной грани Γ. Пусть $\mu = (\mu_1, \mu_2)$ – $\Re$–нормаль грани Γ и $\mu_1 = \mu_2$. Предположим далее, что $\Sigma(P_0) \cap \Sigma(P_1) = \emptyset$, где множества $\Sigma(P_0)$ и $\Sigma(P_1)$ и числа d_0, d_1, $\Delta(\eta, P_0)$ определены как и выше, и

$$\Delta(P_0) = \min_{\eta \in \Sigma(P_0)} \Delta(\eta, P_0). \qquad (3.1)$$

Тогда :

а) если $d_0 - (\mu, \nu) \le d_1$, то $D^\nu P < P$ для всех $\nu \in N_0^2$,

б) если $d_0 - \Delta(P_0) > d_1$ и $(\mu, \nu) \ge d_0 - d_1$, то $D^\nu P < P$,

в) если $d_0 - \Delta(P_0) > d_1$ и $0 \ne (\mu, \nu) \le \Delta(P_0)$, то $D^\nu P \not< P$.

Доказательство : Заметим, что в двумерном случае любой обобщенный однородный многочлен имеет лишь изолированные характеристики (см. [6], [12]), и что только вполне правильные грани являются нерегулярными. Следовательно, утверждение пункта а) следует из Теоремы 2.1. Утверждение пункта б) непосредственно следует из Теоремы 3.2. Для доказательства утверждения пункта в) заметим, что согласно Лемме 2.1 в [11], для $\eta \in \Sigma(P_0)$ существуют натуральное число $k = k(\eta)$, действительное число $\tau = \tau(\eta)$ и многочлен $r(\xi)$ такие, что

$$P(\xi) = (\xi_1 - \tau\,\xi_2)^k\, r(\xi); \qquad r(\eta) \neq 0; \qquad \eta_1 - \tau\,\eta_2 = 0. \tag{3.2}$$

Можно предположить, не умаляя общности, что $\mu_1 = \mu_2 = 1$. Следовательно, $d_0 = \operatorname{ord} P_0$, $d_1 = \operatorname{ord} P_1$, $\Delta(\eta, P_0) = k_2$ и и условия пункта в) можно переписать в следующем виде : $d_0 - k > d_1$ и $0 \neq |\nu| \leq \Delta(P_0) \leq k$, соответственно. Для произвольного $\varepsilon > 0$ положим

$$\xi_1^s = s\,\eta_1^s \equiv s\,(\tau\,\eta_2 + s^{-\varepsilon}), \qquad \xi_2^s = s\,\eta_2^s \equiv s\,\eta_2 \quad s = 1, 2, \ldots.$$

Так как $\eta^s \to \eta$ при $s \to \infty$, то существует постоянная $c_1 \geq 0$ такая, что для всех $s = 1, 2, \ldots$

$$|P_0(\xi^s)| = s^{d_0 - \varepsilon\, k}\, |r(\eta^s)| \leq c_1\, s^{d_0 - \varepsilon\, k},$$

$$|P_1(\xi^s)| = s^{d_1}\, |P_1(\eta^s)| \leq c_1\, s^{d_1}.$$

Так как $|Q(\xi^s)| = |P(\xi^s) - P_0(\xi^s) - P_1(\xi^s)| = o(s^{d_1})$ при $s \to \infty$, то для достаточно больших s и для некоторой постоянной $c_2 \geq 0$ имеем

$$|P_0(\xi^s)| \leq c_2\, s^{\alpha_\varepsilon}, \tag{3.3}$$

где $\alpha_\varepsilon = \max\{d_0 - \varepsilon\, k, d_1\}$.

Используя (3.2) $0 \neq |\nu| \leq k$, имеем $D^\nu P_0(\xi) = (\xi_1 - \tau\,\xi_2)^{k - |\nu|} r_2(\xi)$, где $r(\eta) \neq 0$. Следовательно, $D^\nu P_0(\xi^s) = s^{d_0 - |\nu| - \varepsilon(k - |\nu|)} r_2(\eta^s)$, $s = 1, 2, \ldots$. Аналогично, $D^\nu P_1(\xi^s) = s^{d_1 - |\nu|} D^\nu P_1(\xi^s)$, $s = 1, 2, \ldots$ и

$$|D^\nu Q(\xi^s)| = o(s^{d_0 - |\nu|}) \qquad \text{при} \quad s \to \infty.$$

Из последних трех соотношений и Леммы 1.2 следует, что существует постоянная $c_3 > 0$ такая, что $|D^\nu P(\xi^s)| \geq c_3\, s^{b_\varepsilon}$, где $b_\varepsilon = \max\{d_0 - |\nu| - \varepsilon(k - |\nu|), d_1 - |\nu|\}$. Выберем число ε так, что

$$d_0 - \varepsilon\, k = d_1 \tag{3.4}$$

Сначала предположим, что $|\nu| = k$. Так как, по предположению $d_0 - k > d_1$, то $b_\varepsilon = d_0 - k > d_1 = a_\varepsilon$ и

$$\frac{|D^\nu P(\xi^s)|}{1 + |D^\nu P(\xi^s)|} \to \infty \qquad \text{при} \quad s \to \infty. \tag{3.5}$$

Следовательно, $D^\nu P \not< P$. Пусть теперь $|\nu| < k$. Покажем, что $a_\varepsilon < b_\varepsilon$, где ε как и в (3.4). Заметим, что

$$d_0 - |\nu| - \varepsilon(k - |\nu|) = d_0 - |\nu| - (d_0 - d_1)\frac{k - |\nu|}{k} = (d_1 - |\nu|) + \frac{|\nu|}{k}(d_0 - d_1) > d_1 - |\nu|.$$

Таким образом, $b_\varepsilon = d_0 - |\nu| - \varepsilon(k - |\nu|)$. Имеем $b_\varepsilon - a_\varepsilon = d_0 - |\nu| - \varepsilon(k - |\nu|) - (d_0 - \varepsilon k) = |\nu|(\varepsilon - 1)$. Учитывая, что $d_0 - k > d_1$ и (3.4), получим $b_\varepsilon > a_\varepsilon$, откуда следует (3.5). Следовательно, $D^\nu P \not< P$. Теорема 3.3 доказана.

ABSTRACT. Let $P(\xi) = P(\xi_1, ..., \xi_n)$ be a polynomial with real constant coefficients. We derive conditions sufficient for the estimate $|D^\nu P(\xi)| \le c(|P(\xi)| + 1)$, $\xi \in \mathbb{R}^n$ to hold for all multi-indices $\nu = (\nu_1, ..., \nu_n) \in \mathbb{Z}^n$, or for some chosen multi-index. In two dimensional case these conditions are also necessary.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Хермандер, Анализ Линейных Дифференциальных Операторов с Частными Производными, тома 1 – 4, Москва, Мир, 1986.
2. Г. Г. Казарян, "Сравнение мощности многочленов и их гипоэллиптичность", Труды МИАН СССР, том 150, стр. 143 — 159, 1979.
3. В. П. Михайлов, "О поведении на бесконечности одного класса многочленов", Труды МИАН СССР, том 91, стр. 59 — 81, 1967.
4. С. М. Никольский, "Первая краевая задача для одного общего линейного уравнения", ДАН СССР, том 144, № 4, стр. 767 — 769, 1962.
5. Л. Р. Волевич, С. Г. Гиндикин, "Об одном классе гипоэллиптических операторов", Мат. Сб., том 75, № 3, стр. 400 — 416, 1968.
6. J. Friberg, "Multi-quasi-elliptic polynomials", Ann Suola norm. supper Pisa. Ser. III, vol. 21, pp. 239 — 260, 1967.
7. L. Cattabriga, "Su une classe di polinomi ippoellittici", Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, vol. 36, pp. 285 — 309, 1966.
8. Г. Г. Казарян, "Оценки дифференциальных операторов и гипоэллиптические операторы", Труды МИАН СССР, том 140, стр. 130 — 161, 1966.
9. Г. Г. Казарян, В. Н. Маркарян, "Носитель гипоэллиптичности линейных дифференциальных операторов", Изв. АН Армении, Математика, том 21, № 5, стр. 453 — 470, 1986.
10. Ф. Трев, "О локальной разрешимости линейных дифференциальных уравнений с частными производными", Успехи Мат. Наук, вып. 2, стр. 252 — 261, 1976.
11. Г. Г. Казарян, "Об одном семействе полуэллиптических полиномов", Изв. АН Арм. ССР, том 9, № 3, стр. 180 — 211, 1974.

26 Декабря 1998 Ереванский государственный университет