УРАВНЕНИЕ ВИНЕРА-ХОПФА В ЗАКРИТИЧЕСКОМ СЛУЧАЕ

Г. А. Григорян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика,
т. 32, № 1, 1997

В настоящей работе изучаются интегральные уравнения Винера-Хопфа $\varphi(t) = f(t) + \int_0^{\infty} K(t-\tau) \varphi(\tau) d\tau$, $t > 0$, с неотрицательными ядрами K , удовлетворяющими условию $\mu = \int_{-\infty}^{+\infty} K(t) dt > 1$. Основной результат гласит, что если $\int_{-\infty}^{\infty} |t|^j K(t) dt < +\infty$ при $j = 1, \dots, 4$ и норма μ достаточно близка к 1, то символ $A(\lambda) = 1 - \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} K(t) dt$ этого уравнения либо невырождающийся, либо допускает разложение вида $A(\lambda) = \frac{\lambda^2 - \beta^2}{(\lambda + i)^2} \cdot B(\lambda)$, где $B(\lambda) \neq 0$, $-\infty \leq \lambda \leq +\infty$, $\beta > 0$.

§0. ВВЕДЕНИЕ

Интегральное уравнение Винера-Хопфа

$$\varphi(t) = f(t) + \int_0^{\infty} K(t-\tau) \varphi(\tau) d\tau, \quad t > 0 \quad (1)$$

с неотрицательным ядром $K \in L_1(\mathbb{R})$ было изучено многими авторами в том случае, когда $\mu = \int_{-\infty}^{+\infty} K(t) dt \leq 1$ (см., например, [1 - 5]). В закритическом случае (ЗКС) $\mu > 1$ уравнение (1), по видимому, было изучено лишь для вполне монотонных на $[0, +\infty)$ ядер K (см. [3 - 6]), когда

$$K(\pm t) = \int_a^b \exp(-\tau t) d\sigma_{\pm}(\tau), \quad t > 0,$$

где $0 \leq a < b \leq +\infty$ и $\sigma_{\pm}(\tau)$ - неотрицательные меры на $[a, b]$.

Исследование уравнения (1) как при $\mu \leq 1$, так и при $\mu > 1$ имеет большое теоретическое и прикладное значение. К уравнению (1) сводятся задачи теории вероятностей, теории переноса излучения и др. При $\mu > 1$ уравнение (1) связано с вопросами теории цепных ядерных реакций.

В настоящей статье уравнение (1) исследуется при $\mu > 1$ в более общей форме, чем в работах [3 - 6].

§1. НЕКОТОРЫЕ ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ СОТНОШЕНИЯ

Пусть $K \in L_1(\mathbb{R}^+)$, где $\mathbb{R}^+ = [0, +\infty)$. Введем некоторые обозначения :

$$\mu_n \stackrel{\text{def}}{=} \mu_n(K) \equiv \int_0^\infty t^n K(t) dt, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

$$S(\lambda, K) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^\infty \sin \lambda t K(t) dt, \quad C(\lambda, K) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^\infty \cos \lambda t K(t) dt, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

В этом параграфе мы получим некоторые вспомогательные равенства и неравенства. Прежде всего докажем одну лемму, доказательство которой мы опускаем ввиду простоты.

Лемма 1.1. Пусть $\lambda > 0$, $\tau > 0$, $m \in \mathbb{N}$. Тогда

$$\int_0^\tau (\tau - t)^m \sin \lambda t dt \leq \min \left[\frac{\lambda \tau^{m+2}}{(m+1)(m+2)}, \frac{\tau^{m+1}}{m+1}, \frac{2\tau^m}{\lambda} \right]. \quad (1.1)$$

В следующей лемме мы определим вид остаточного члена формулы Тейлора для функции $S(\lambda, K)$.

Лемма 1.2. Пусть $\mu_p(|K|) < +\infty$, $p = 0, 1, \dots, 2m+1$. Тогда

$$\begin{aligned} S(\lambda, K) &= \sum_{p=0}^m \frac{(-1)^p \mu_{2p+1}(K)}{(2p+1)!} \lambda^{2p+1} + \\ &+ \frac{(-1)^m \lambda^{2m+2}}{(2m+1)!} \int_0^\infty K(\tau) d\tau \int_0^\tau (\tau - t)^{2m+1} \sin \lambda t dt. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Доказательство. Докажем формулу (1.2) сначала для $m = 0$. Предположим, что $K_1(t) = \int_t^\infty (\tau - t) K(\tau) d\tau$, $t \geq 0$. Тогда, очевидно, $S(\lambda, K) = S(\lambda, K_1'')$.

Дважды применив формулу интегрирования по частям, получим

$$S(\lambda, K) = \mu_1(K) \lambda - \lambda^2 \int_0^\infty \sin \lambda t dt \int_t^\infty (\tau - t) K(\tau) d\tau, \quad (1.3)$$

откуда получаем (1.2) для $m = 0$. Пусть (1.2) справедливо для некоторого $m = m_0 \in \mathbb{N}$. Покажем, что оно верно и для $m = m_0 + 1$. Поскольку

$$\int_0^\infty K(\tau) d\tau \int_0^\tau (\tau - t)^{2m_0+1} \sin \lambda t dt = S(\lambda, K_1),$$

где

$$K_1(\tau) = \int_t^\infty (\tau - t)^{2m_0+1} K(\tau) d\tau,$$

и по предположению (1.2) имеет место для $m = m_0$, то

$$S(\lambda, K) = \sum_{p=0}^{m_0} \frac{(-1)^p \mu_{2p+1}(K)}{(2p+1)!} \lambda^{2p+1} - \frac{(-1)^{m_0} \lambda^{2m_0+2}}{(2m_0+1)!} S(\lambda, K_1).$$

Заменим в (1.3) K на K_1 и подставим полученное выражение в правую часть последнего равенства. Тогда будем иметь

$$S(\lambda, K) = \sum_{p=0}^{m_0} \frac{(-1)^p \mu_{2p+1}(K)}{(2p+1)!} \lambda^{2p+1} - (\mu_1(K_1) - \lambda^2 S(\lambda, K_2)),$$

где

$$K_2(t) = \int_t^\infty (\tau - t) K_1(\tau) d\tau = \int_t^\infty \frac{(\tau - t)^{2m_0+3} K(\tau)}{(2m_0+2)(2m_0+3)} d\tau.$$

Отсюда, учитывая, что

$$\begin{aligned} \mu_1(K_1) &= \int_0^\infty t dt \int_t^\infty (\tau - t)^{2m_0+1} K(\tau) d\tau = \int_0^\infty K(\tau) d\tau \int_0^\tau t(\tau - t)^{2m_0+1} dt = \\ &= \frac{1}{(2m_0+2)(2m_0+3)} \mu_{2m_0+3}(K), \end{aligned}$$

получим

$$\begin{aligned} S(\lambda, K) &= \sum_{p=0}^{m_0+1} \frac{(-1)^p \mu_{2p+1}(K)}{(2p+1)!} \lambda^{2p+1} - \\ &- \frac{(-1)^{m_0+1} \lambda^{2(m_0+1)+2}}{(2(m_0+1)+1)!} \int_0^\infty \sin \lambda t dt \int_t^\infty (\tau - t)^{2(m_0+1)+1} K(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Изменив порядок интегрирования в последнем интеграле, приходим к (1.2) для $m = m_0 + 1$.

Пусть $0 \leq K \in L_1(\mathbb{R}^+)$. Рассмотрим многочлены

$$P_m(\lambda, K) = \sum_{p=0}^m \frac{(-1)^p \mu_{2p+1}(K)}{(2p+1)!} \lambda^{2p+1};$$

$$Q_m(\lambda, K) = P_{m-1}(\lambda, K) - \frac{\mu_{2m}(K)}{(2m)!} \lambda^{2m-1};$$

$$R_m(\lambda, K) = P_m(\lambda, K) - \frac{\mu_{2m+1}(K)}{(2m+1)!} \lambda^{2m+1}.$$

Для любых $\lambda > 0$ и K из лемм 1.1 и 1.2 получим следующее неравенство :

$$S(\lambda, K) \geq \lambda \cdot \max \{ P_m(\lambda, K); Q_m(\lambda, K); R_m(\lambda, K) \}, \quad (1.4)$$

где m — нечетное число. Докажем, наконец, справедливость следующих равенств :

$$S(\lambda, K) = \int_0^{\pi/\lambda} \sin \lambda t \left[\sum_{n=0}^{+\infty} \left\{ K \left(t + \frac{2\pi n}{\lambda} \right) - K \left(t + \frac{(2n+1)\pi}{\lambda} \right) \right\} \right] dt, \quad (1.5)$$

$$C(\lambda, K) = \int_0^{\frac{\pi}{2\lambda}} \cos \lambda t \cdot K(t) dt - S(\lambda, K_\lambda), \quad (1.6)$$

где

$$\lambda > 0 \quad \text{и} \quad K_\lambda(t) = K\left(t + \frac{\pi}{2\lambda}\right). \quad (1.7)$$

Пусть $n \in \mathbb{N}$, $\lambda > 0$. Поскольку

$$\int_{n\pi/\lambda}^{(n+1)\pi/\lambda} \sin \lambda t K(t) dt = \int_0^{\pi/\lambda} \sin(\lambda t + \pi n) K(t + \pi n/\lambda) dt,$$

то

$$\begin{aligned} S(\lambda, K) &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{n\pi/\lambda}^{(n+1)\pi/\lambda} \sin \lambda t K(t) dt = \\ &= \int_0^{\pi/\lambda} \sin(\lambda t + \pi n) \left(\sum_{n=0}^{\infty} K(t + \pi n/\lambda) \right) dt, \end{aligned}$$

и получаем (1.5). Для доказательства формулы (1.8) достаточно во втором интеграле равенства

$$C(\lambda, K) = \int_0^{\frac{\pi}{2\lambda}} \cos \lambda t K(t) dt + \int_{\frac{\pi}{2\lambda}}^{\infty} \cos \lambda t K(t) dt$$

произвести замену переменной $t = \tau + \frac{\pi}{2\lambda}$.

§2. НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ ДЛЯ ВЕЩЕСТВЕННОЗНАЧНЫХ ОРИГИНАЛОВ

Обозначим через $\mathcal{F}$ расширенную винеровскую алгебру функций вида

$$A(\lambda) = C + \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} K(t) dt,$$

где $C \neq 0$ — действительная постоянная, $\lambda \in \mathbb{R}$, $K \in L_1(\mathbb{R})$. Функцию K будем называть оригиналом A .

Пусть

$$\tilde{A}(\lambda) = C + \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} \tilde{K}(t) dt,$$

где $\tilde{K}(t) = K(-t)$, $t \in \mathbb{R}$.

Обозначим через $\mathcal{F}_R$ подмножество функций из $\mathcal{F}$, оригиналы которых принимают только действительные значения. Отметим некоторые очевидные свойства функций из $\mathcal{F}_R$.

1°. $\tilde{A}(\lambda) = A(-\lambda)$; 2°. $A \in \mathcal{F}_R$ тогда и только тогда, когда $\tilde{A} \in \mathcal{F}_R$.

Следующая лемма, доказательство которой мы опускаем ввиду ее простоты, выявляет важное свойство функций из $\mathcal{F}_R$.

Лемма 2.1. Для того, чтобы $A \in \mathcal{F}_R$, необходимо и достаточно, чтобы $A(-\lambda) = \overline{A(\lambda)}$.

Из леммы 2.1 и известных свойств преобразования Фурье получаем

Следствие 2.1. Множество нулей $A(\lambda) \in \mathcal{F}_R$ компактно в $\mathbb{R}$ и симметрично относительно точки $\lambda = 0$. Множества нулей функций A и $\bar{A}$ совпадают.

Лемма 2.2. Если $A \in \mathcal{F}_R$ и $A \neq 0$, $-\infty \leq \lambda \leq +\infty$, то

$$\operatorname{ind}_{-\infty \leq \lambda \leq \infty} A(\lambda) = \begin{cases} 2k, & \text{если } A(0)A(\infty) > 0, \\ 2k + 1, & \text{если } A(0)A(\infty) < 0, \end{cases} \quad (2.1)$$

где $k \in \mathbb{Z}$.

Доказательство. Введем следующие функции :

$$A_1(\lambda) = \begin{cases} A(\lambda), & \text{если } \lambda \leq 0, \\ a \cdot \frac{\lambda - i}{\lambda + i} + b, & \text{если } \lambda > 0; \end{cases}$$

$$A_2(\lambda) = \begin{cases} a \cdot \frac{\lambda - i}{\lambda + i} + b, & \text{если } \lambda \leq 0, \\ A(\lambda), & \text{если } \lambda > 0, \end{cases}$$

где $a = (A(\infty) - A(0))/2$, $b = (A(\infty) + A(0))/2$. Константы a и b выбраны таким образом, чтобы функции $A_j(\lambda)$, $j = 1, 2$ были непрерывны на $\mathbb{R}$ и $A_j(\lambda) \neq 0$, $-\infty \leq \lambda \leq +\infty$, $j = 1, 2$.

Очевидно $A_j(\lambda) \neq 0$, $-\infty \leq \lambda \leq +\infty$, $j = 1, 2$, причем $A_1(-\lambda) = \bar{A}_2(\lambda)$, что влечет за собой

$$\operatorname{ind}_{-\infty \leq \lambda \leq \infty} A_1(\lambda) = \operatorname{ind}_{-\infty \leq \lambda \leq \infty} A_2(\lambda) \equiv n. \quad (2.2)$$

Поскольку $A_1(\lambda)A_2(\lambda) = A(\lambda)r(\lambda)$, где $r(\lambda) = a \cdot \frac{\lambda - i}{\lambda + i} + b$, то ввиду (2.2) будем иметь

$$\operatorname{ind}_{-\infty \leq \lambda \leq \infty} A(\lambda) + \operatorname{ind}_{-\infty \leq \lambda \leq \infty} r(\lambda) = 2n. \quad (2.3)$$

Вычислим индекс $r(\lambda)$. Легко показать, что $\lambda_1 = \frac{-A(0)A(\infty)}{A(\infty)^2} \cdot i$ является единственным однократным нулем $r(\lambda)$, а $\lambda_2 = -i$ — ее единственным однократным полюсом. Тогда в верхней полуплоскости функция $r(\lambda)$ не имеет полюсов; она имеет там единственный однократный нуль при $A(0)A(\infty) > 0$ и не имеет ни одного нуля с положительной мнимой частью при $A(0)A(\infty) < 0$. Следовательно

$$\operatorname{ind}_{-\infty \leq \lambda \leq \infty} r(\lambda) = \begin{cases} 0, & \text{при } A(0)A(\infty) > 0 \\ 1, & \text{при } A(0)A(\infty) < 0. \end{cases}$$

Отсюда и из (2.3) получим (2.1).

§3. ГРАНИЦЫ НУЛЕЙ

В этом параграфе мы докажем две теоремы, позволяющие оценить модули нулей для некоторых функций из $\mathcal{F}_R$.

Лемма 3.1. Пусть $K_0 \in L_1(\mathbb{R}^+)$ и для любого $c > 0$ $K_0(t) \geq K_0(t+c)$ почти всюду (п.в.) на $\mathbb{R}^+$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует $K_\varepsilon \in L_1(\mathbb{R}^+) \cap C^{(1)}(\mathbb{R}^+)$ такая, что

$$K'(t) \neq 0, \quad t \in \mathbb{R}^+ \quad \text{и} \quad \|K_0 - K_\varepsilon\|_{L_1(\mathbb{R}^+)} < \varepsilon.$$

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$, $N > 0$ и пусть

$$K_N(t) = \begin{cases} K_0(t) & \text{при } 0 < t < N, \\ 0 & \text{при } t \geq N. \end{cases}$$

Будем считать N настолько большим, что $\|K_0 - K_N\|_{L_1} < \varepsilon/4$. Очевидно, для любого $c > 0$ имеем $K_N(t) \geq K_N(t+c)$ п.в. на $\mathbb{R}^+$. На $\mathbb{R}^+$ можно выбрать равномерную сеть t_p , $p = 1, \dots, n$ и постоянную функцию $K_n(t) = k_{n,p}$, $t_p \leq t \leq t_{p+1}$, $p = 0, \dots, n-1$ ($t_0 = 0$, $t_n = N$) такую, что $k_{n,p} \geq k_{n,p+1}$, $p = 0, \dots, n-1$ и $\|K_N - k_n\| < \varepsilon/4$. Пусть $\delta < (t_1 - t_0)/2$ и

$$K_{n,\delta} = \begin{cases} K_n(t) & \text{при } t \notin (t_p - \delta, t_p + \delta), p = 0, \dots, n, \\ A_p + B_p \sin\left(\frac{\pi}{2\delta(t_p - t)}\right) & \text{при } t \in (t_p - \delta, t_p + \delta), p = 1, \dots, n, \end{cases}$$

где $A_p = (K_n(t_p - \delta) + K_n(t_p + \delta))/2$, $B_p = (K_n(t_p - \delta) - K_n(t_p + \delta))/2$. Нетрудно видеть, что $K_{n,\delta} \in L_1(\mathbb{R}^+) \cap C^{(1)}(\mathbb{R}^+)$ и

$$\|K_n - K_{n,\delta}\| < 2NK_n(0)\delta, \quad K'_{n,\delta} \leq 0 \quad \text{на } \mathbb{R}^+$$

(последнее неравенство следует из того, что $B_p \geq 0$, $p = 1, \dots, n$).

Пусть $\delta < \frac{\varepsilon}{8NK_n(0)}$. Тогда функция $K_\varepsilon(t) = \varepsilon/4e^{-t} + K_{n,\delta}(t)$, $t > 0$ удовлетворяет условиям леммы. Действительно, $K'_\varepsilon(t) = -\varepsilon/4e^{-t} + K'_{n,\delta}(t) < 0$, $t \in \mathbb{R}^+$ и

$$\|K_0 - K_\varepsilon\|_{L_1} \leq \|K_0 - K_N\|_{L_1} + \|K_N - K_n\|_{L_1} + \|K_n - K_{n,\delta}\|_{L_1} + \left\| \frac{\varepsilon}{4} e^{-t} \right\|_{L_1} < \varepsilon.$$

Теорема 3.1. Пусть $A(\lambda) = 1 - \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda t} K(t) dt$, где K удовлетворяет условию $\mu = \int_{-\infty}^{+\infty} K(t) dt > 1$. Предположим, что $K(t) + K(-t) = K_0(t) + \Delta K(t)$, где

$\theta = \int_0^{\infty} |\Delta K(t)| dt < 1$, $K_0(t) \geq K_0(t+c)$ для любого $c > 0$ п.в. на $\mathbb{R}^+$. Тогда, если $\operatorname{Re}A(\lambda) = 0$, то $|\lambda| < 1/t$, где $\int_0^t K_0(\tau) d\tau = 1 - \theta$.

Доказательство. Приведем доказательство в том случае, когда функция $K_0(t)$ непрерывно-дифференцируема и $K_0'(t) \neq 0$ для $t \in \mathbb{R}^+$. Введем функцию $K(\tau, t)$:

$$K(\tau, t) = \begin{cases} K_0(t), & \text{если } \tau \leq t; \\ K_0(\tau), & \text{если } \tau > t. \end{cases}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}A(\lambda) &= 1 - \int_0^{\infty} K_0(\tau) \cos(\lambda\tau) d\tau - \int_0^{\infty} \Delta K(\tau) \cos(\lambda\tau) d\tau \geq \\ &\geq 1 - \theta - \int_0^{\infty} K_0(\tau) \cos(\lambda\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Поскольку $K_0(\tau)$ монотонно убывает на $\mathbb{R}^+$, то из (1.5) и (1.6) вытекает

$$C(\lambda, K_0) \leq \int_0^{\frac{\pi}{2\lambda}} \cos(\lambda\tau) K_0(\tau) d\tau.$$

Отсюда и из (3.1) для $\lambda > 0$ получим

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}A(\lambda) &\geq 1 - \theta - \int_0^{\frac{\pi}{2\lambda}} K(\tau, t) \cos(\lambda\tau) d\tau - \int_0^{\frac{\pi}{2\lambda}} (K_0(\tau) - K(\tau, t)) \cos(\lambda\tau) d\tau \geq \\ &\geq 1 - \theta - \int_0^t K_0(\tau) d\tau + tK_0(t) - \frac{K_0(t)}{\lambda}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что если $\operatorname{Re}A(\lambda) = 0$, то для любого $t \in (0, t_0)$ имеем

$$|\lambda| \leq \frac{K_0(t)}{1 - \theta - \int_0^t K_0(\tau) d\tau + tK_0(t)} \equiv F(t), \quad (3.2)$$

где t_0 — наименьший положительный нуль функции

$$Z(t) = 1 - \theta - \int_0^t K_0(\tau) d\tau + tK_0(t), \quad t > 0.$$

Существование t_0 следует из непрерывности $Z(t)$ и из того, что

$$Z(0) = 1 - \theta > 0, \quad Z(+\infty) = 1 - \theta - \int_0^{\infty} K_0(\tau) d\tau \leq 1 - \mu < 0.$$

Заметим, что $F(t_0 - 0) = +\infty$ в силу того, что $K_0(t_0) \neq 0$. Следовательно, функция $F(t)$ достигает своего минимума на $[0, t_0)$. Найдем этот минимум.

Нетрудно проверить, что $F'(+0) = K_0'(+0) < 0$, $F'(t_0 - 0) = +\infty$. Отсюда следует

существование $t^* \in (0, t_0)$ такого, что $F'(t^*) = 0$. Так как $K_0'(t) \neq 0$ и функция $1 - \theta - \int_0^t K_0(\tau) d\tau$ строго монотонно убывает на $\mathbb{R}^+$, то t^* единственна и t^* – точка минимума $F(t)$ на $(0, t_0)$. Имеем $F(t^*) = \frac{1}{t^*}$. Следовательно, из оценки (3.2) получим требуемое в том частном случае, когда $K_0 \in C^{(1)}(\mathbb{R}^+)$ и $K_0'(t) \neq 0$, $t \in \mathbb{R}^+$.

Докажем теперь теорему в общем случае. Из леммы 3.1 следует, что существует последовательность $K_{0,n}(t) (\in L_1(\mathbb{R}^+) \cap C^{(1)}(\mathbb{R}^+))$ такая, что $K_{0,n}'(t) \neq 0$ и $\{K_{0,n}\}_{n=1}^\infty$ сходится к K_0 в $L_1(\mathbb{R}^+)$. По уже доказанному, если $\operatorname{Re}A(\lambda) = 0$, то $|\lambda| < \frac{1}{t_n^*}$ для достаточно больших значений n , где $\int_0^{t_n^*} K_{0,n}(\tau) d\tau = 1 - \theta_n$, а

$$\theta_n = \int_0^{+\infty} |\Delta K(t) + K_0(t) - K_{0,n}(t)| dt < 1.$$

Поскольку $K_{0,n}$ сходится к K_0 в $L_1(\mathbb{R}^+)$ и $\lim_{n \rightarrow +\infty} \theta_n = \theta$, то $\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n^* = t^*$, где $\int_0^{t^*} K_0(\tau) d\tau = 1 - \theta$. Тогда $|\lambda| \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} 1/t_n^* = 1/t^*$.

Теорема 3.2. Пусть $A(\lambda) = 1 - \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda t} K(t) dt \in \mathcal{F}_R$

$$K_0(t) = K(t) + K(-t), \quad t > 0, \quad K_0^{(p)}(t) \in L_1(\mathbb{R}^+) \cap C(\mathbb{R}^+), \quad p = 0, \dots, m,$$

и α_m – наименьший положительный корень многочлена

$$W_m(x) = 1 + \sum_{p=1}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} (-1)^p K_0^{(2p-1)}(0) - x^m \int_0^{+\infty} |K_0^{(m)}(t)| dt,$$

где $K_0^{(p)}(0)$ – правая p -я производная $K_0(t)$ в точке $t = 0$, в случае $m = 1$ сумма равна нулю. Тогда если $\operatorname{Re}A(\lambda_0) = 0$, то $|\lambda_0| \leq \frac{1}{\alpha_m}$.

Доказательство. Очевидно $\operatorname{Re}A(\lambda) = 1 - \int_0^{+\infty} K_0(t) \cos(\lambda t) dt$. Интегрируя по частям m раз, получим

$$\operatorname{Re}A(\lambda) = 1 + \sum_{p=1}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} \frac{(-1)^p K_0^{(2p-1)}(0)}{\lambda^{2p}} - \frac{(-1)^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}}{\lambda^m} \int_0^\infty Z_m(\lambda t) K_0^{(m)}(t) dt,$$

где

$$Z_m(x) = \begin{cases} \sin x, & \text{если } m = 2k + 1, \\ \cos x, & \text{если } m = 2k. \end{cases}$$

Следовательно

$$\operatorname{Re}A(\lambda) \geq W_m\left(\frac{1}{\lambda}\right). \tag{3.3}$$

Поскольку α_m - наименьший положительный корень $W_m(x)$ и $W_m(0) = 1$, то $W_m(x) > 0$, $x \in (0, \alpha_m)$. Из (3.3) следует, что $\operatorname{Re}A(\lambda) \geq 0$ при $0 < 1/\lambda < \alpha_m$. Следовательно, если $\operatorname{Re}A(\lambda_0) = 0$ и $\lambda_0 > 0$, то $\lambda_0 \leq 1/\alpha_m$. Случай $\operatorname{Re}A(\lambda_0) = 0$ и $\lambda_0 > 0$ сводится к предыдущему, если заменить λ_0 на $-\lambda_0$ и воспользоваться леммой 2.1 •

Пример. Пусть $A(\lambda) = 1 - \int_{-\infty}^{+\infty} e^{it} e^{-|t|} dt$ и $\operatorname{Re}A(\lambda_0) = 0$. Применяв теорему 3.1 к $A(\lambda)$, получим $|\lambda_0| \leq \frac{1}{\ln 2}$. Применяв теорему 3.2, мы приходим к более точной оценке $|\lambda_0| \leq \frac{2}{\sqrt{1 + \sqrt{6}}}$.

§4. ФУНКЦИИ ИЗ $\mathcal{F}_R$ С КОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ НУЛЕЙ ЦЕЛОГО ПОРЯДКА

Пусть точки $\alpha_0 (= 0)$, $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ - всевозможные положительные попарно различные нули функции $A \in \mathcal{F}_R$, кратностей $m_0, m_1, \dots, m_n$ соответственно. Тогда в силу леммы 2.1, точки $-\alpha_j$ - нули A тех же кратностей. Пусть K - оригинал A . Предположим, что $\mu_m(|K(\pm t)|) < \infty$, где $m = \max\{m_0, m_1, \dots, m_n\}$. Тогда функция $A(\lambda)$ допускает следующее представление (см. [3], теорема 2.9) :

$$A(\lambda) = \rho(\lambda) B(\lambda), \quad (4.1)$$

где

$$\rho(\lambda) = \left(\frac{\lambda}{\lambda + i} \right)^{m_0} \prod_{j=1}^n \left(\frac{\lambda^2 - \alpha_j^2}{[\lambda + i]^2} \right)^{m_j}, \quad (4.2)$$

$B(\lambda) \in \mathcal{F}$, $B(\lambda) \neq 0$, $-\infty \leq \lambda \leq +\infty$. Из леммы 2.1 и очевидного соотношения $\rho(-\lambda) = \overline{\rho(\lambda)}$ следует, что $B(-\lambda) = \overline{B(\lambda)}$. Последнее равенство показывает, согласно лемме 2.1, что мы получим представления

$$\tilde{A}(\lambda) = \rho(\lambda) \tilde{B}(\lambda), \quad (4.3)$$

где $\tilde{B}(\lambda) \in \mathcal{F}_R$, $\tilde{B}(\lambda) \neq 0$, $-\infty \leq \lambda \leq +\infty$ и

$$\tilde{B}(\lambda) = \left(\frac{\lambda + i}{\lambda - i} \right)^{m_0 + 2 \sum_{j=1}^n m_j} \cdot B(-\lambda). \quad (4.4)$$

Разделив (4.1) на (4.3) приходим к следующему важному соотношению :

$$\frac{B(\lambda)}{\tilde{B}(\lambda)} = \left(\frac{A(\lambda)}{|A(\lambda)|} \right)^2, \quad \lambda \neq \pm \alpha_j, \quad j = 0, \dots, n. \quad (4.5)$$

Поскольку левая часть этого равенства непрерывна на $\mathbb{R}$, то его правую часть можно доопределить в точках $\pm\alpha_j$ по непрерывности. Поэтому (4.5) справедлива для всех $\lambda \in \mathbb{R}$.

Введем обозначения

$$\tau = \text{ind}_{-\infty \leq \lambda \leq \infty} B(\lambda), \quad \tilde{\tau} = \text{ind}_{-\infty \leq \lambda \leq \infty} \tilde{B}(\lambda), \quad \chi = \text{ind}_{-\infty \leq \lambda \leq \infty} \left(\frac{A(\lambda)}{|A(\lambda)|} \right)^2$$

(существование χ следует из (4.5) и из существования τ и $\tilde{\tau}$).

Из (4.4) и (4.5) получим

$$\begin{cases} \tau + \tilde{\tau} = -m_0 - 2 \sum_{j=1}^n m_j, \\ \tau - \tilde{\tau} = \chi. \end{cases} \quad (4.6)$$

Разрешив эту систему относительно τ и $\tilde{\tau}$, получим

$$\begin{cases} \tau = -\frac{m_0}{2} - \sum_{j=1}^n m_j + \frac{\chi}{2}, \\ \tilde{\tau} = -\frac{m_0}{2} - \sum_{j=1}^n m_j - \frac{\chi}{2}. \end{cases} \quad (4.7)$$

Теорема 4.1. Пусть $A(\lambda) = 1 - \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda t} K(t) dt \in \mathcal{F}_R$. Если

а) $K(t) \geq 0$, $t \in \mathbb{R}$, $\mu_n(K_{\pm}) < +\infty$, $K_{\pm}(t) = K(\pm t)$, $n = 0, \dots, 2m+2$ для некоторого нечетного m ;

б) $\mu = \int_{-\infty}^{+\infty} K(t) dt > 1$;

в) $K(t) + K(-t) = K_0(t) + \Delta K(t)$, где $\theta = \int_0^{\infty} |\Delta K(t)| dt < 1$, $K_0(t) \geq K_0(t+c)$, для любого $c > 0$ п.в. на $\mathbb{R}^+$;

г) $\alpha = \max\{\alpha_m, \beta_m, \gamma_m\} > \beta$, где $\int_0^{1/\beta} K_0(\tau) d\tau = 1 - \theta$, $\alpha_m, \beta_m, \gamma_m$ — наименьшие положительные корни соответственно многочленов $P_m(\lambda, K)$, $Q_m(\lambda, K)$, $R_m(\lambda, K)$, $K_1(t) = t K(t)$, $t \in \mathbb{R}$;

то или $A(\lambda) \neq 0$ $-\infty \leq \lambda \leq +\infty$ и $\text{ind}_{-\infty \leq \lambda \leq +\infty} A(\lambda) = \pm 1$, или существует $\beta_0 > 0$ такое, что

$$A(\lambda) = \frac{\lambda^2 - \beta_0^2}{(\lambda + i)^2} B(\lambda), \quad B(\lambda) \in \mathcal{F}_R, \quad B(\lambda) \neq 0, \quad -\infty \leq \lambda \leq +\infty$$

$$\text{и } \text{ind}_{-\infty \leq \lambda \leq +\infty} B(\lambda) = -1.$$

Доказательство. Из условия б) следует, что $\text{Re}A(\lambda)$ имеет хотя бы один корень на $\mathbb{R}$. Пусть $\beta_0 > 0$ — наибольший из этих корней, существование которого

вытекает из следствия 2.1. Из а) и б) и из теоремы 3.1 следует, что $\beta_0 \leq \beta$, где $\int_0^{1/\beta} K_0(\tau) d\tau = 1 - \theta$. Используя условия а), г) и (1.4), получим $[\operatorname{Re}A(\lambda)]' > 0$, $\lambda \in (0, \beta_0]$. Поскольку $\operatorname{Re}A(\beta_0) = 0$, то $\operatorname{Re}A(\lambda) < 0$, $\lambda \in (0, \beta_0]$. Из соотношений $\operatorname{Re}A(\lambda) \neq 0$ при $\lambda \in (\beta_0, +\infty)$ (т.к. β_0 наибольший из корней функции $\operatorname{Re}A(\lambda)$) и $\operatorname{Re}A(\pm\infty) = 1$, то $\operatorname{Re}A(\lambda) > 0$, $\beta_0 < \lambda \leq +\infty$. Следовательно, при изменении λ в интервале $(0, +\infty)$, кривая $A(\lambda)$, соединяющая точку 1 с точкой $1 - \mu$, пересекает мнимую ось в точке $A(-\beta_0) = -i\xi$. Таким образом, кривая $A(\lambda)$ совершает один обход вокруг точки O либо в положительном либо в отрицательном направлении при изменении λ в $(-\infty, +\infty)$. Следовательно, при $A(\beta_0) \neq 0$ имеем $A(\lambda) \neq 0$ и $\operatorname{ind}_{-\infty \leq \lambda \leq +\infty} A(\lambda) = \pm 1$. Предположим теперь $A(\beta_0) = 0$. Тогда поскольку $\operatorname{Re}A'(\beta_0) > 0$, то $A'(\beta_0) \neq 0$. Следовательно, β_0 является корнем кратности 1. Тогда в силу рассуждений, приведенных в начале этого параграфа (см. (4.1)), находим

$$A(\lambda) = \frac{\lambda^2 - \beta_0^2}{(\lambda + i)^2} B(\lambda), \quad B(\lambda) \in \mathcal{F}_R, \quad B(\lambda) \neq 0, \quad -\infty \leq \lambda \leq +\infty.$$

В этом случае согласно (4.7) для индекса $B(\lambda)$ получим

$$\tau = -1 + \chi/2, \quad (4.8)$$

где $\tau = \operatorname{ind}_{-\infty \leq \lambda \leq +\infty} B(\lambda)$, $\chi = \operatorname{ind}_{-\infty \leq \lambda \leq +\infty} \left(\frac{A(\lambda)}{|A(\lambda)|} \right)^2$. Теперь покажем, что $|\chi| \leq 2$. Поскольку $\operatorname{Re}A(\lambda) < 0$, $\lambda \in (0, \beta_0)$, $\operatorname{Re}A(\lambda) > 0$, $\lambda \in (\beta_0, +\infty)$, то $\left| \left[\operatorname{Arg} \left(\frac{A(\lambda)}{|A(\lambda)|} \right)^2 \right] \right|_0^{\infty} \leq 2\pi$. Далее, используя лемму 2.1, получим следующее:

$$\left| \left[\operatorname{Arg} \left(\frac{A(\lambda)}{|A(\lambda)|} \right)^2 \right] \right|_{-\infty}^0 \leq 2\pi \text{ и}$$

$$|\chi| \leq \frac{1}{2\pi} \left\{ \left| \left[\operatorname{Arg} \left(\frac{A(\lambda)}{|A(\lambda)|} \right)^2 \right] \right|_{-\infty}^0 + \left| \left[\operatorname{Arg} \left(\frac{A(\lambda)}{|A(\lambda)|} \right)^2 \right] \right|_0^{+\infty} \right\} \leq 2.$$

Исходя из этой оценки и из (4.8) покажем, что $\chi = 0$. Поскольку $B(0) = \frac{A(0)}{\beta_0^2} < 0$, $B(\pm\infty) = A(\pm\infty) = 1$, то $B(0) \cdot B(\pm\infty) < 0$. Из леммы 2.2 следует, что $\tau = 2k + 1$, $k \in \mathbb{Z}$. Подставляя это значение τ в (4.8), приходим к соотношению $\chi = 4(k + 1)$. Тогда поскольку $|\chi| \leq 2$, то $\chi = 0$. Используя (4.8), получим $\operatorname{ind}_{-\infty \leq \lambda \leq +\infty} B(\lambda) = \tau = -1$.

Теорема 4.2. Предположим, что $A_c(\lambda) = 1 - c \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda t} K(t) dt$, $K(t) \geq 0$, $t \in \mathbb{R}$, $\mu = \int_{-\infty}^{+\infty} K(t) dt = 1$, $K_{\pm}(t) = K(\pm t)$; $\mu_n(K_{\pm}) < +\infty$, $n = 0, \dots, 2m + 2$ для некоторого нечетного m . Тогда существует $c_0 > 1$ такое, что для любого $c \in (1, c_0)$ или $A_c(\lambda) \neq 0$ $-\infty \leq \lambda \leq +\infty$ и $\text{ind}_{-\infty \leq \lambda \leq +\infty} A_c(\lambda) = \pm 1$, или существует $\beta_c \in (1, c_0)$ такое, что

$$A_c(\lambda) = \frac{\lambda^2 - \beta_c^2}{(\lambda + i)^2} B_c(\lambda), \quad B_c(\lambda) \in \mathcal{F}_R, \quad B_c(\lambda) \neq 0, \quad -\infty \leq \lambda \leq +\infty$$

$$\text{и } \lim_{c \rightarrow 1+0} \beta_c = 0.$$

Доказательство. Пусть $K_c(t) = ctK(t)$, $\tilde{\beta}_c$ является наибольшим корнем $A(\lambda)$ ($c > 1$) и пусть $\alpha_m(c)$, $\beta_m(c)$, $\gamma_m(c)$ – наименьшие положительные корни многочленов $P_m(\lambda, K)$, $Q_m(\lambda, K)$, $R_m(\lambda, K)$ соответственно. Из очевидных равенств $P_m(\lambda, K_c) = cP_m(\lambda, K_1)$, $Q_m(\lambda, K_c) = cQ_m(\lambda, K_1)$, $R_m(\lambda, K_c) = cR_m(\lambda, K_1)$ вытекает, что $\alpha_m(c) = \alpha_m(1)$, $\beta_m(c) = \beta_m(1)$, $\gamma_m(c) = \gamma_m(1)$ для любого $c \in \mathbb{R}$. Поскольку $A_c(\lambda)$ непрерывна по c и $\tilde{\beta}_1 = 0$, то $\tilde{\beta}_c \rightarrow 0$ при $c \rightarrow 1 + 0$. Отсюда заключаем, что существует $c_0 > 1$ такое, что для любого $c \in (1, c_0)$ $\tilde{\beta}_c < \max\{\alpha_m(1), \beta_{1m}(1), \gamma_m(1)\}$. Из (1.4) следует, что $[\text{Re}A_c(\lambda)]' > 0$, $\lambda \in (0, \tilde{\beta}_c]$. Далее точно так же как и в теорем 4.1 мы приходим к заключению, что или $A_c(\lambda) \neq 0$ $-\infty \leq \lambda \leq +\infty$ и $\text{ind}_{-\infty \leq \lambda \leq +\infty} A_c(\lambda) = \pm 1$ или

$$A_c(\lambda) = \frac{\lambda^2 - \beta_0^2}{(\lambda + i)^2} B_c(\lambda), \quad \text{ind}_{-\infty \leq \lambda \leq +\infty} B_c(\lambda) = -1, \quad c \in (1, c_0).$$

Нам осталось показать, что $\lim_{c \rightarrow 1+0} \beta_c = 0$. Но это сразу получается из очевидных соотношений $0 \leq \beta_c \leq \tilde{\beta}_c$.

§5. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВИНЕРА–ХОПФА С ВЫРОЖДЕННЫМИ СИМВОЛАМИ

Пусть E_+ – одно из следующих банаховых пространств: $L_p^+ \equiv L_p(\mathbb{R}^+)$, $1 \leq p \leq +\infty$, $C^+ \equiv C^+(\mathbb{R}^+)$, $C_0^+ \equiv C_0^+(\mathbb{R}^+)$ (C^+ – пространство непрерывных на $\mathbb{R}^+$ функций, C_0^+ – пространство функций, непрерывных на $\mathbb{R}^+$ и стремящихся к нулю на бесконечности).

Пусть $\rho_{\pm}(\lambda) = \prod_{j=1}^n \left(\frac{\lambda - \alpha_j}{\lambda \pm i} \right)^{m_j^{\pm}}$, где $\alpha_j \in \mathbb{N}$, $j = 1, \dots, n$, – некоторые действительные числа, и пусть $\mathcal{R}_+$ и $\mathcal{R}_-$ – операторы Винера–Хопфа с символами

ρ_+ и ρ_- соответственно. Хотя операторы $\mathcal{R}_\pm: E_+ \rightarrow E_+$ не являются Φ -операторами, но тем не менее (см. [3], стр. 144 – 147, 197 – 199) в этом случае можно построить банаховы пространства

$$\tilde{E}_+ = \tilde{E}_+(\rho_+)(\supset E_+), \quad \bar{E}_+ = \bar{E}_+(\rho_-)(\subset E_+)$$

и операторы $\tilde{\mathcal{R}}_+, \bar{\mathcal{R}}_-$ такие, что

- а) $\tilde{\mathcal{R}}_+: \tilde{E}_+ \rightarrow E_+$, $\bar{\mathcal{R}}_-$ – Φ -операторы;
 б) $\tilde{\mathcal{R}}_+|_{E_+} = \mathcal{R}_+$, $\tilde{\mathcal{R}}_- \varphi = \mathcal{R}_- \varphi$ для любого $\varphi \in E_+$.

Пусть символ $A(\lambda) = 1 - \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda t} K(t) dt$ уравнения (1) имеет конечное число нулей целого порядка, т.е.

$$A(\lambda) = \prod_{j=1}^n \left(\frac{\lambda - \alpha_j}{\lambda + i} \right)^{m_j} B(\lambda), \quad (5.1)$$

где $B(\lambda) \in \mathcal{F}$, $B(\lambda) \neq 0$, $-\infty \leq \lambda \leq +\infty$.

Для символа $A(\lambda)$ можно записать представление $A(\lambda) = \rho_-(\lambda) C(\lambda) \rho_+(\lambda)$, где $m_j^+ + m_j^- = m_j$, $j = 1, \dots, n$. Очевидно $C(\lambda) \neq 0$, $C(\lambda) \in \mathcal{F}$.

Это представление порождает факторизацию соответствующего оператора : $I - \bar{K} = \mathcal{R}_- \bar{C} \mathcal{R}_+$, где I – единичный оператор, $(\bar{K}\varphi)(t) \equiv \int_0^{+\infty} K(t - \tau) \varphi(\tau) d\tau$ при $\varphi \in E_+$, $\bar{C}$ – Φ -оператор в E_+ . Это представление приводит к оператору $\mathcal{R}_- \bar{C} \mathcal{R}_+: \tilde{E}_+ \rightarrow \bar{E}_+$. Наконец, получаем некоторый Φ -оператор, действующий из $\tilde{E}_+$ в $\bar{E}_+$, который является продолжением оператора $I - \bar{K}$. Идея такого типа продолжения лежит в основе метода специальной факторизации, позволяющего свести вопрос о разрешимости уравнения (1) в $\tilde{E}_+$ при $f \in \bar{E}_+$ к нахождению значения $\text{ind}_{-\infty \leq \lambda \leq +\infty} C(\lambda)$. Этот факт, доказанный с помощью ряда теорем в [3] и теоремы, доказанной в §4, позволяет нам установить некоторые признаки разрешимости уравнения (1) в неэллиптическом случае.

Теорема 5.1. Пусть ядро K уравнения (1) удовлетворяет следующим условиям :

- а⁰) $K(t) = K(-t)$, $t \in \mathbb{R}$;
 б⁰) существует $\varepsilon > 0$: $e^{\varepsilon|t|} K(t) \in L_1(\mathbb{R})$.

Тогда уравнение (1) при любом $f \in E_+$ имеет решение $\varphi(t) = O(t^s)$ при $t \rightarrow +\infty$, $s > 0$. Соответствующее однородное уравнение имеет конечное число линейно независимых решений $\varphi_l(t) = O(t^{s_l})$, $t \rightarrow +\infty$, $s_l > 0$, $l = 1, \dots, n$.

Доказательство. Из условия b^0) следует, что для некоторого $\epsilon > 0$ символ $A(\lambda)$ уравнения (1) аналитически продолжается в полосу $|\text{Im}\lambda| < \epsilon$. Тогда ввиду следствия 2.1, $A(\lambda)$ имеет конечное число нулей целого порядка. Кроме того из b^0) следует, что $\mu_n(K_{\pm}) < +\infty$, $n = 0, 1, \dots$, $K_{\pm}(t) = K(\pm t)$. Используя теорему 2.9 из [3] (стр. 214), следует, что $A(\lambda)$ имеет вид (4.1), (4.2). Из условия a^0) легко вывести, что $\left(\frac{A(\lambda)}{|A(\lambda)|}\right)^2 \equiv 1$. Тогда $\text{ind}_{-\infty \leq \lambda \leq +\infty} \left(\frac{A(\lambda)}{|A(\lambda)|}\right)^2 = 0$ и, согласно (4.7), $\tau = \text{ind}_{-\infty \leq \lambda \leq +\infty} B(\lambda) = -\frac{N}{2}$, где N - общее число нулей $A(\lambda)$ (с учетом их кратностей) и $A(\lambda)$ имеет вид (5.1). Тогда по теореме 2.6 из [3] (стр. 209) для любого $f \in E_+$ уравнение (1) имеет решение φ в $\tilde{E}_+$ $\left(\prod_{j=1}^n \left(\frac{\lambda - \alpha_j}{\lambda + i}\right)^{m_j}\right)$, которое имеет на $+\infty$ не более чем полиномиальный рост (см. [3], замечание к теореме 2.5, стр. 208).

Теорема 5.2. Пусть ядро K уравнения (1) удовлетворяет условиям теоремы 4.1, и пусть символ (1) вырожден. Тогда для любого $f \in E_+$ уравнение (1) имеет решение $\varphi(t) = O(1)$ при $t \rightarrow +\infty$. Для некоторого $\beta_0 > 0$ соответствующее однородное уравнение имеет в $\tilde{E}_+$ $\left(\frac{\lambda^2 - \beta_0^2}{(\lambda + i)^2}\right)$ ровно одно (с точностью до постоянного множителя) ограниченное решение $\varphi_* \notin C_+ \cup \bigcup_{1 \leq p \leq \infty} L_p^+$.

Доказательство. Пусть $A(\lambda)$ - символ уравнения (1). По теореме 4.1 существует $\beta_0 > 0$ такое, что

$$A(\lambda) = \frac{\lambda^2 - \beta_0^2}{(\lambda + i)^2} B(\lambda), \tag{5.2}$$

$$B(\lambda) \in \mathcal{F}_R, \quad B(\lambda) \neq 0, \quad -\infty \leq \lambda \leq +\infty, \quad \text{ind}_{-\infty \leq \lambda \leq +\infty} B(\lambda) = -1. \tag{5.3}$$

Предположим, что $\tilde{E}_+ = E_+(\rho_+)$, $\bar{E}_+(\rho_-)$, где $\rho_+(\lambda) = \frac{\lambda^2 - \beta_0^2}{(\lambda + i)^2}$, $\rho_-(\lambda) \equiv 1$. Из (5.2), (5.3) и из теоремы 2.6 ([3], стр. 209) вытекает, что для любого $f \in E_+$ уравнение (1) имеет решение $\varphi \in E_+$. Следовательно, $\varphi(t) = O(1)$, $t \rightarrow +\infty$. Из (5.2), (5.3) и из указанной теоремы вытекает также, что соответствующее однородное уравнение имеет ограниченное решение $\varphi_*(t)$, которое единственно (с точностью до постоянного множителя) в $\tilde{E}_+(\rho_+)$.

Чтобы показать, что $\varphi_* \notin C_+ \cup \bigcup_{1 \leq p \leq \infty} L_p^+$, положим $\rho_+(\lambda) \equiv 1$, $\rho_-(\lambda) = \frac{\lambda^2 - \beta_0^2}{(\lambda - i)^2}$ и используем теорему 2.6 из [3].

Автор выражает благодарность Енгибаряну Н. Б. и Арабаджяну Л. Г. за обсуждение полученных результатов.

ABSTRACT. In this paper Wiener–Hopf integral equation $\varphi(t) = f(t) + \int_0^{\infty} K(t - \tau)\varphi(\tau) d\tau$, $t > 0$ is studied for nonnegative kernels K satisfying $\mu = \int_{-\infty}^{+\infty} K(t) dt > 1$. The main result states that if $\int_{-\infty}^{\infty} |t|^j K(t) dt < +\infty$ for $j = 1, \dots, 4$ and the norm μ is sufficiently close to 1, then the symbol $A(\lambda) = 1 - \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} K(t) dt$ of this equation is either nondegenerate or admits a decomposition of the form $A(\lambda) = \frac{\lambda^2 - \beta^2}{(\lambda + i)^2} \cdot B(\lambda)$, where $B(\lambda) \neq 0$, $-\infty \leq \lambda \leq +\infty$, $\beta > 0$.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Л. Г. Арабаджян, Н. Б. Енгибарян, "Уравнения свертки и нелинейные функциональные уравнения", Итоги Науки и Техники, Матем. Анал., т. 22, ВИНТИ, М., стр. 175 — 244, 1984.
2. Н. Б. Енгибарян, Б. Н. Енгибарян, "Интегральные уравнения свертки на полупрямой с вполне монотонным ядром", Мат. Сб., т. 187, № 10, стр. 53 — 72, 1996.
3. З. Прёслорф, Некоторые Классы Сингулярных Уравнений, М., Мир, 1979.
4. М. Г. Крейн, Ю. А. Шмультян, "Уравнение Винера–Хопфа, ядра которых допускают интегральное представление через экспоненты", Изв. АН АрмССР, Математика, т. 17, № 4, стр. 307 — 327; № 5, стр. 328 — 375, 1982;
5. М. И. Хайкин, "Об одном уравнении Винера–Хопфа с положительным ядром", Изв. ВУЗ-ов, Математика, № 4, стр. 56 — 63, 1982.
6. F. Spitzer, "The Wiener–Hopf equation whose kernel is a probability density", Duke Math. J., vol. 24, no. 3, pp 327 — 343, 1957; vol. 27, no. 3, pp. 363 — 372, 1960.

11 сентября 1996

Бюраканская астрофизическая обсерватория
НАН Армении