

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ СИНГУЛЯРНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Г. Р. Оганесян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика,
т. 31, № 3, 1996

В работе устанавливаются локальные асимптотические представления для решений линейных сингулярных гиперболических уравнений с помощью интегральных операторов Фурье. Коэффициенты уравнений предполагаются неограниченными вблизи сингулярной гиперплоскости $t = 0$. Эти представления обобщают хорошо известную асимптотическую теорему Левинсона из теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Они полезны в изучении некоторых уравнений математической физики, а также в изучении корректности задачи Коши для дифференциальных уравнений в частных производных с кратными характеристиками.

§1. ВВЕДЕНИЕ

Хорошо известно, что решения строго гиперболических уравнений с гладкими коэффициентами можно представить с помощью интегральных операторов Фурье. Например, применяя к уравнению колебаний струны

$$v_{tt} = a^2 v_{xx} \quad (1.1)$$

преобразование Фурье

$$\hat{v}(t, \xi) = \int v(t, x) \exp(-ix\xi) dz,$$

получаем обыкновенное линейное дифференциальное уравнение

$$\hat{v}_{tt} + a^2 \xi^2 \hat{v} = 0 \quad (1.2)$$

с общим решением

$$\hat{v}(t, \xi) = \hat{f}(\xi) \exp\{iat \mid \xi \mid\} + \hat{g}(\xi) \exp\{-iat \mid \xi \mid\},$$

где $\hat{f}(\xi)$ и $\hat{g}(\xi)$ – произвольные функции. Применяя обратное преобразование Фурье

$$v(t, x) = (2\pi)^{-n} \int \hat{v}(t, \xi) \exp(iz\xi) d\xi,$$

получаем

$$v(t, x) = \Phi_1(t)f(y) + \Phi_2(t)g(y), \quad (1.3)$$

где операторы $\Phi_1(t)$ и $\Phi_2(t)$ имеют интегральные представления

$$\Phi_j f(y) = (2\pi)^{-n} \int f(y) \exp(i\theta_j(t, x, y, \xi)) dy d\xi, \quad j = 1, 2, \quad (1.4)$$

$$\theta_1 = (x - y)\xi + at|\xi|, \quad \theta_2 = (x - y)\xi - at|\xi|.$$

Здесь функции f и g принадлежат пространствам Соболева. Для уравнения в частных производных второго порядка

$$Lu = u_{tt} - a^2 u_{xx} + q(t, x)u = 0, \quad t \in]0, T[, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \lim_{t \rightarrow 0} q = \infty \quad (1.5)$$

ставится следующая задача : при каких ограничениях на операторы $L\Phi_j$, $j = 1, 2$ решения уравнения (1.5) можно представить в виде

$$u(t, x) = \hat{\Phi}_1(t)f(y) + \hat{\Phi}_2(t)g(y), \quad (1.6)$$

где

$$\hat{\Phi}_j(t) = \Phi_j(t) + \varepsilon_j(t, x), \quad \varepsilon_j(t, x) \rightarrow 0, \quad t \rightarrow 0, \quad j = 1, 2. \quad (1.6')$$

$\hat{\Phi}_j(t)$ называются *асимптотическими резольвентными операторами*, $\varepsilon_j(t, x)$ называются *функциями ошибок*.

Для более общих строго гиперболических (или гиперболических в смысле Петровского) уравнений решения $u(t, x)$ допускают представления (см. [2], [7])

$$u(t, x) = \sum_{j=1}^m \hat{\Phi}_j(t)C_j(y), \quad (1.7)$$

где $C_j(y)$ – произвольные функции из пространств Соболева, а $\hat{\Phi}_j$ – линейные интегральные операторы, которые можно представить в виде сумм интегральных операторов Фурье.

Ниже мы докажем следующие асимптотические версии представлений (1.7) для решений широкого класса t -гиперболических (нестрого гиперболических, слабо гиперболических) операторов с неограниченными в начальной гиперплоскости $t = 0$ коэффициентами :

$$u(t, x) = \sum_{j=1}^m [\Phi_j(t) + \varepsilon_j(t, y)] g_j(y), \quad \lim_{t \rightarrow 0} \varepsilon_j(t, y) = 0, \quad j = 1, \dots, m. \quad (1.8)$$

Мы применяем формулу (1.8) к изучению начальных задач вблизи сингулярной гиперплоскости.

§2. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

В этом параграфе содержатся формулировки теорем и предложений, доказываемых в статье. Теорема 2.1 приводит достаточный критерий асимптотических резольвентных операторов. Теорема 2.2 является теоремой существования и единственности для весовой начальной задачи, обобщающей начальную задачу с вронскианными данными, рассмотренную в работе [10]. Предложения 2.1, 2.3, 2.4 – частные случаи теоремы 2.2 для дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка с упрощенными начальными данными. В предложениях 2.2, 2.5 предлагается конструкция линейных интегральных операторов, встречающихся в представлениях (2.13). Отметим, что предложение 2.2 является обобщением ВКБ-асимптотик, хорошо известных в теории обыкновенных дифференциальных уравнений, для гиперболических дифференциальных уравнений в частных производных.

Мы рассматриваем дифференциальное уравнение в частных производных

$$Pu = \sum_{k=0}^m Q_{m-k}(t, x, D_x) \partial_t^k u(t, x) = 0, \quad t \in [0, T], \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (2.1)$$

где

$$Q_0 = 1, \quad Q_j \in C^\infty([0, T], \Psi_\rho^j), \quad j = 1, \dots, m, \quad (2.2)$$

а Ψ_ρ^j – класс псевдодифференциальных операторов, определяемых ниже. Обозначим через B множество всех C^∞ -функций, определенных и ограниченных в \mathbb{R}_x^n с производными всех порядков. Пусть $B_t^k = C^k([0, T], B)$. Будем говорить,

что C^∞ -функция $p(x, y, \xi)$ в $\mathbb{R}^{3n} = \mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_y^n \times \mathbb{R}_\xi^n$ принадлежит классу $S_{\rho, \delta}^m$ ($0 \leq \delta < 1/2 < \rho \leq 1$), если для любых мультииндексов α, β, γ имеем

$$|\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta \partial_y^\gamma p(x, y, \xi)| \leq C_{\alpha, \beta, \gamma} \langle \xi \rangle^{m + |\delta|\beta + |\gamma| - \rho|\alpha|} \quad \text{на } \mathbb{R}^{3n}, \quad (2.3)$$

где $\langle \xi \rangle = (1 + \xi_1^2 + \dots + \xi_n^2)^{1/2}$. Обычно $S_{\rho, \delta}^m$ — пространства Фреше с полунормами

$$|p|_l^{(m)} = \max_{\alpha + \beta + |\gamma| \leq l} \inf \{C_{\alpha, \beta, \gamma} \text{ из (2.3)}\}. \quad (2.4)$$

Будем также говорить, что символ $p(x, \xi)$ класса $S_{\rho}^m = S_{\rho, 1-\rho}^m$ принадлежит классу $S_{\rho}^m((k))$, где $k \geq 0$ — целое число, если

$$p_{(\beta)}^{(\alpha)}(x, \xi) \in S_{\rho}^{m-|\alpha|} \quad (|\alpha + \beta| \leq k).$$

И, наконец, будем говорить, что вещественнозначная C^∞ -функция $\varphi(x, \xi)$ в $\mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_\xi^n$ принадлежит классу $\mathcal{P}_\rho(\tau)$, где $0 \leq \tau \leq 1$ и $1/2 \leq \rho \leq 1$ (см. [4]), если $J(x, \xi) = \varphi(x, \xi) - x\xi$ удовлетворяет условиям

$$J(x, \xi) \in S_{\rho}^1((2)),$$

$$\|J\|_0 = \sum_{|\alpha + \beta| \leq 2} \sup_{x, \xi} \{|J_{(\beta)}^{(\alpha)}(x, \xi)| \langle \xi \rangle^{(|\alpha| - 1)} \leq \tau.$$

В частности, для $\rho = 1$ будем писать $\mathcal{P}(\tau)$. Для любого целого числа $l \geq 1$ мы определяем подкласс $\mathcal{P}(\tau, l)$ класса $\mathcal{P}_\rho(\tau)$ как множество фазовых функций $\varphi(x, \xi) \in \mathcal{P}_\rho(\tau)$, удовлетворяющих условиям

$$J(x, \xi) \in S_{\rho}^1((2)),$$

$$\begin{aligned} \|J\|_l &= \sum_{|\alpha + \beta| \leq l} \sup_{x, \xi} \{|J_{(\beta)}^{(\alpha)}(x, \xi)| \langle \xi \rangle^{(|\alpha| - 1)} + \\ &+ \sum_{2 \leq |\alpha + \beta| \leq 2+l} \sup_{x, \xi} \{|J_{(\beta)}^{(\alpha)}(x, \xi)| \langle \xi \rangle^{1 - (\rho - 1)|\beta| + \rho(|\alpha| - 2)}\} \leq \tau, \end{aligned}$$

при этом будем писать $\mathcal{P}(\tau, l)$ вместо $\mathcal{P}_1(\tau, l)$ для $\rho = 1$. Пусть $\varphi(x, \xi) \in \mathcal{P}_\rho(\tau)$. Для $p(x, \xi) \in S_{\rho}^m$ определим интегральный оператор Фурье P с фазовой функцией $\varphi(x, \xi)$ и символом $p(x, \xi)$ по формуле

$$Pu(x) = P_\varphi u(x) = (2\pi)^{-2n} \iint e^{i(\varphi(x, \xi) - y\xi)} p(x, \xi) u(y) \, d\xi \, dy, \quad \text{для } u \in B \quad (2.5)$$

в смысле регуляризованных осциллирующих интегралов ([4]). Будем полагать, что $P \in I_p^m$ и $\sigma(P) = p(x, \xi)$. Для $p = 1$ вместо I_p^m часто будем писать I^m .

Пусть $\Psi_{\rho, \delta}^m$ - класс псевдодифференциальных операторов с символами из $S_{\rho, \delta}^m$ ($\Psi_\rho^m = \Psi_{\rho, 1-\rho}^m$, $\Psi^m = \Psi_{1,0}^m$), \tilde{I}^m - класс линейных интегральных операторов, отображающих H^s на H^{s-m} . Напомним, что оператор (2.1) называется *t-гиперболическим* (или *слабо, нестрого гиперболическим*), если корни $\tau = \lambda_j(t, x, \xi)$, $j = 1, \dots, m$, характеристического уравнения

$$\sum_{k=0}^m q_{m-k}(t, x, \xi) \tau^k = 0, \quad q_0 = 1$$

вещественнозначны для любых $t \in]0, T[$, $(x, \xi) \in \mathbb{R}^{2n}$. Здесь $q_{m-k}(t, x, \xi)$ - главные символы операторов Q_{m-k} . Мы полагаем, что функции q_{m-k} , $k = 0, 1, \dots, m$ вещественнозначны для любых $t \in]0, T[$, $x \in \mathbb{R}^n$, $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Пусть операторы $\{\Phi_j(t)\}_{j=1}^m$ в (1.7) заданы. Вместо операторов $\Phi_j \in \tilde{I}^{1-j}$ можно построить вспомогательные линейные интегральные операторы

$$\Phi_{s+1, s}(t), \quad \Phi_{s+1, s}^{-1}(t) \in \tilde{I}^0, \quad s = 0, \dots, m-1. \quad (2.8)$$

В самом деле, положим

$$\Phi_{j, s}(t) = \Phi_{s+1, s}(t) Z_{j, s+1}(t), \quad j = s+2, \dots, m, \quad s = 0, \dots, m-2, \quad (2.9)$$

$$\Phi_{j, 0} = \Phi_j, \quad j = 1, \dots, m, \quad (2.9')$$

$$Z_{j, s+1}(t) = \int_T^t \Phi_{j, s+1}(\tau) d\tau, \quad j = s+2, \dots, m, \quad s = 0, \dots, m-2, \quad (2.9'')$$

Тогда из (2.9) получим

$$\Phi_{s+2, s} = \Phi_{s+1, s} \int_T^t \Phi_{s+2, s+1}(\tau) d\tau, \quad s = 0, \dots, m-1$$

и оператор $\Phi_{s+1, s}(t)$ можно рекуррентным образом определить из этих выражений. В частности

$$\begin{aligned} \Phi_1(t) &= \Phi_{1,0}(t), \quad \Phi_2(t) = \Phi_{1,0}(t) \int_T^t \Phi_{2,1}(\tau) d\tau, \\ \Phi_{3,0}(t) &= \Phi_{1,0}(t) \int_T^t \left(\Phi_{2,1}(\tau) \int_T^\tau \Phi_{3,2}(s) ds \right) d\tau. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Рассмотрим операторы

$$K_j^s = \begin{cases} -(\Phi_{2,1}\Phi_{3,2}\dots\Phi_{m,m-1})^{-1}P\Phi_j, & \text{если } j = 1, \dots, m, \quad s = m, \\ \sum (-1)^k Z_{j_1,s} Z_{j_2,j_1} \dots Z_{j_k,j_{k-1}} K_j^m, & \text{если } j = 1, \dots, m, \end{cases} \quad (2.11)$$

где суммирование проводится по всем индексам j_1, \dots, j_k таким, что

$$s < j_1 < j_2 < \dots < j_k = m, \quad k = 1, \dots, m - s, \quad s = 1, \dots, m - 1. \quad (2.11')$$

Теорема 2.1. Пусть функции $\beta_s(t) \geq 0$, $\beta_s \in L_1[0, T]$, $s = 1, \dots, m$ и бесконечно дифференцируемые по параметру $t \in]0, T[$, обратимые линейные интегральные операторы $\{\Phi_j(t)\}_{j=1}^m$, удовлетворяют условиям (2.8) и

$$(1/\beta_s(t))K_j^s(t) \in \bar{I}^0, \quad s, j = 1, \dots, m, \quad (2.12)$$

равномерно по $t \in]0, T[$. Тогда для любых функций $C_j(y) \in B$, $j = 1, \dots, m$, существует решение $u \in B_t^\infty$ уравнения (2.1), которое можно представить в виде

$$\partial_t^{k-1} u = \sum_{j=1}^m (\partial_t^{k-1} \Phi_j) [C_j(y) + \varepsilon_j(t, y)], \quad k = 1, \dots, m, \quad (2.13)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \|\varepsilon_j(t, \cdot)\|_p = 0, \quad j = 1, \dots, m, \quad \text{для некоторой } p \in \mathbb{R}. \quad (2.13')$$

Замечание 2.1. Теорема 2.1 не дает правила построения операторов Φ_j , но она полезна тем, что приближенные операторы Φ_j можно выбирать различными способами, в зависимости от уравнения.

Замечание 2.2. Пусть P_2 – оператор (2.1) при $m = 2$. В этом случае условия (2.8), (2.12) теоремы 2.1 можно записать в виде

$$\Phi_1, \Phi_1^{-1} \in \bar{I}^0, \quad (2.14)$$

$$\Phi_{2,1}, \Phi_{2,1}^{-1} \in \bar{I}^0, \quad (2.15)$$

$$\beta_s^{-1}(t)\Phi_j^{-1}(\Phi_{1t}\Phi_1^{-1} - \Phi_{2t}\Phi_2^{-1})^{-1}P_2\Phi_s \in \bar{I}^0, \quad s, j = 1, 2. \quad (2.16)$$

Замечание 2.3. Пусть $\Phi_{2,1}$ – решение задачи Коши

$$P_1\Phi_{2,1} \equiv \partial_t\Phi_{2,1} + (\Phi_1^{-1}Q_1\Phi_1 + 2\Phi_1^{-1}\Phi_{1t})\Phi_{2,1} = 0, \quad \Phi_{2,1}(T) = I, \quad (2.17)$$

где I – тождественный оператор. Тогда $\Phi_{2,1}$ может быть построен как интегральный оператор Фурье с точностью до сглаживающего оператора (см. теорему 3.3 или [3],[4]). Точнее говоря, существует $\bar{\Phi}_{2,1}(t) \in I^0$, такой, что

$$\Phi_{2,1}(t) - \bar{\Phi}_{2,1}(t) \in B_t(S^{-\infty}). \quad (2.17')$$

С учетом (2.10) и

$$P_2\Phi_2(t) = P_2\left(\Phi_1(t) \int_T^t \Phi_{2,1}(\tau) d\tau\right) = P_2\Phi_1(t) \left(\int_T^t (\Phi_{2,1}(\tau) d\tau)\right) + \Phi_1 P_1\Phi_{2,1}$$

или

$$P_2\Phi_2(t) = (P_2\Phi_1(t)) \left(\int_T^t \Phi_{2,1}(\tau) d\tau\right), \quad (2.18)$$

условия (2.16) можно опустить для $s = 2$. Для $s = 1$ условие (2.16) превращается в условие существования $\beta(t) \in L_1([0, T])$ такой, что

$$\beta^{-1}(t)P\Phi_1 \in \tilde{I}^0. \quad (2.19)$$

Замечание 2.4. Если символ r оператора

$$R = \Phi_1^{-1}(Q_1\Phi_1 + 2\Phi_{1t}) \quad (2.20)$$

удовлетворяет условиям

$$r \in B_t^1(S^1), \quad (2.21)$$

главный символ оператора R – вещественнозначная функция

$$\text{для любых } t \in (0, T], \quad (x, \xi) \in \mathbb{R}^{2n}, \quad (2.22)$$

то решение уравнения (2.17) удовлетворяет условию (2.17') (см. теорему 3.3).

Определим вспомогательные операторы

$$A_{s,s-1} = \Phi_{s,s-1}^{-1}(t)\delta_t, \quad s = 2, \dots, m, \quad (2.23)$$

и обозначим через $\sigma = (1, 2, \dots, m)$ циклическую перестановку из группы перестановок m чисел. Начальные условия для уравнения (2.1) зададим в виде

$$\lim_{t \rightarrow 0} \{\sigma^j A_{m,m-1} \dots A_{3,2} A_{2,1} \Phi_1^{-1} u\} = C_{j+1}(y), \quad j = 0, \dots, m-1, \quad (2.24)$$

где $C_{j+1}(y)$ – произвольные функции из B , а показатели σ действуют на индексы операторов $A_{s,s-1}$ в (2.24).

Теорема 2.2. Пусть выполнены условия (2.2), (2.8), (2.12), и пусть существуют функции $\mu_k(t, x)$, $\mu(t, x) \in B$ и числа τ_{kj} , $\delta_k \geq 0$, такие, что

$$\mu_k(\partial_t^k \Phi_1)^{-1} \partial_t^k \Phi_j \in \tilde{I}^{\tau_{kj}}, \quad k = 0, \dots, m-1, \quad j = 2, \dots, m, \quad (2.25)$$

$$\mu_m \Phi_1^{-1} Q_{m-k} (\partial_t^k \Phi_1)^{-1} \mu_k^{-1} \in \tilde{I}^{\delta_k}, \quad (2.26)$$

равномерно по $t \in [0, T]$ (можно положить $\delta_k = m$).

Тогда начальная задача (2.1), (2.24) для $C_j \in B$, $j = 0, 1, \dots, m-1$, имеет единственное решение $u \in B_1^\infty([0, T])$ и существует положительная постоянная c такая, что для любого решения $u \in B_1^m$ задачи (2.1), (2.24) имеют место оценки

$$\|\mu_k(\partial_t^k \Phi_1)^{-1} \partial_t^k u\|_s \leq c \sum_{j=1}^m \|C_j\|_{s+\tau_{kj}}, \quad k = 0, \dots, m-1, \quad (2.27)$$

$$\|\mu_m \Phi_1^{-1} \partial_t^m u\|_s \leq \sum_{j=1}^m \|C_j\|_{s+\tau_{mj}+\delta_k}. \quad (2.28)$$

Для уравнений второго порядка из теоремы 2.2 вытекает

Предложение 2.1. Пусть выполнены условия (2.2), (2.14) – (2.16), и пусть существуют числа $\delta, \tau, b \geq 0$ и функции $\mu_{1,2}(t, x) \in B$ такие, что

$$\mu_1 \Phi_{1t}^{-1} \Phi_{2t} \in \tilde{I}^\tau, \quad \mu_2 \Phi_1^{-1} Q_2 \Phi_1 \in \tilde{I}^\delta, \quad (2.29)$$

$$\mu_2 \Phi_1^{-1} Q_1 \Phi_{1t} \mu_1^{-1} \in \tilde{I}^b. \quad (2.30)$$

Тогда уравнение

$$P_2 u = (\partial_t^2 + Q_1 \partial_t + Q_2) u = 0 \quad (2.31)$$

с начальными данными

$$\lim_{t \rightarrow 0} \{ \Phi_{3-j}^{-1} (\Phi_{1t} \Phi_1^{-1} - \Phi_{2t} \Phi_2^{-1})^{-1} (u_t - \Phi_{jt} \Phi_j^{-1} u) \} = C_j(y), \quad j = 1, 2, \quad (2.32)$$

для $C_j \in B$ имеет единственное решение $u \in B_1^\infty$ и существует положительная постоянная c такая, что для любого решения u задачи (2.31), (2.32) имеют место оценки

$$\|\mu_k(\partial_t^k \Phi_1)^{-1} \partial_t^k u\|_s \leq c \sum_{j=1}^2 \|C_j\|_{s+\tau}, \quad k = 0, 1, \quad \mu_0 = 1, \quad (2.33)$$

$$\|\mu_2 \Phi_1^{-1} u_{tt}\|_s \leq c \sum_{j=1}^2 \|C_j\|_{s+r+\delta}, \quad (2.34)$$

где $\mu_0 = 1$.

Рассмотрим уравнение

$$P_2 u = (\partial_t^2 + Q^4(t, x, \partial_x)) u(t, x) = 0, \quad t \in]0, T[, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (2.35)$$

где Q - обратимый в $H^{-\infty} = \cup H^s$ эллиптический псевдодифференциальный оператор порядка $1/2$, бесконечно дифференцируемый по параметру $t \in]0, T]$. Пусть $\Phi_j(t, T)$, $j = 1, 2$ - разрешающий интегральный оператор Фурье псевдодифференциального уравнения первого порядка

$$\partial_t w_j + \Lambda_j(t, x, \partial_x) w_j(t, x) = 0, \quad t \in]0, T[, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (2.36)$$

где операторы Λ_1, Λ_2 (с символами λ_1, λ_2) имеют вид

$$\Lambda_1 = iQ^2 - Q^{-1}Q_t, \quad \Lambda_2 = -iQ^2 - Q^{-1}Q_t, \quad (2.37)$$

т.е. решения $w_j(t, x)$ уравнения (2.36) имеют вид

$$w_j(t, x) = \Phi_j(t, T) w_j(T, x), \quad j = 1, 2. \quad (2.38)$$

Предложение 2.2. Если существуют функции $\rho_1(t), \rho_2(t) \geq 0$; $\mu(t), \rho_1(t), \rho_2(t) \in L_1[\varepsilon, T]$, $\varepsilon > 0$ такие, что

$$\sigma(\mu(t)Q^2) \in B_t^\infty(S^1), \quad \sigma(\mu Q^{-1}Q_t) \in B_t^\infty(S^0), \quad (2.39)$$

$$P_2 - t\text{-гиперболический оператор}, \quad (2.40)$$

$$\rho_1^{-1}(t)Q^{-3}[Q_t, Q]Q, \quad \rho_2^{-1}(t)Q^{-2}(Q^{-1})_{tt}Q \in \Psi_\rho^0, \quad (2.41)$$

равномерно по $t \in [0, T]$, то для любых $C_j(y) \in B$, $j = 1, 2$ существует решение $u \in B_t^\infty$ уравнения (2.35), имеющее вид (2.13), (2.13') с $m = 2$, где Φ_1, Φ_2 - разрешающие операторы уравнения (2.36).

Замечание 2.5. Условие (2.40) для уравнения (2.35) означает, что главный символ оператора Q^2 вещественнозначен на $[0, T] \times \mathbb{R}_{x, \xi}^{2n}$.

Обозначим через $\|\cdot\|_{\Psi_\rho^m}$ норму псевдодифференциального оператора из класса Ψ_ρ^m : $\|\cdot\|_{\Psi_\rho^m} = C|p|_l^{(m)}$, см. теорему 3.2 в §3.

Определение 2.3. Если выполнены условия предложения 2.2 и

$$\|Q^{-3}Q_t\|_{\Psi^0} < 1 \quad \text{равномерно по } t \in [0, T], \quad (2.42)$$

то уравнение (2.35) с $C_1, C_2 \in H^p$ и начальными данными

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \Phi_2(T, t)(Q^{-2}\partial_t + i - Q^{-3}Q_t)u &= C_1(x), \\ \lim_{t \rightarrow 0} \Phi_1(T, t)(Q^{-2}\partial_t - i - Q^{-3}Q_t)u &= C_2(x), \end{aligned} \quad (2.43)$$

имеет единственное решение $u \in B_1^\infty$. Существует положительная постоянная c , не зависящая от u и такая, что

$$\|\mu_0 \Phi_1^{-1}u\|_s, \quad \|\mu_1 \Phi_{11}^{-1}u\|_s \leq c \sum_{j=1}^2 \|C_j\|_{s+2}, \quad \|\mu^2 \Phi^{-1}u_{tt}\|_s \leq c \sum_{j=1}^2 \|C_j\|_s. \quad (2.44)$$

Введем класс

$$M = \{p(t) \in C^\infty([0, T]), \quad p(t) > 0, \quad p_t p^{-5/4} \in L_2([0, T]), \quad |p_t p^{-3/2}| \leq \varepsilon\}, \quad (2.45)$$

где ε — достаточно малое положительное число.

Предложение 2.4. Пусть существует функция $p(t) \in M$ такая, что условия (2.39), (2.40) и

$$p^{1/4}(t)Q^{-1} \in \Psi^{-1/2}, \quad (p/p_t)^2 [Q, Q_t] \in \Psi^1, \quad (2.46)$$

$$p^{-1/4}(p/p_t)^j (\partial_t^j Q) \in \Psi^{1/2}, \quad j = 0, 1, 2 \quad (2.47)$$

выполнены, где $[\cdot, \cdot]$ — коммутатор. Тогда задача (2.35), (2.43) для $C_1 \in H^p$, $C_2 \in H^{p-1}$ имеет единственное решение $u \in B_1^\infty$ и существует положительная постоянная c такая, что для любого решения u этой задачи имеют место оценки

$$\tau(t)p^{1/4-k/2}(t)\|\partial_t^k u\|_s \leq \sum_{j=1}^2 \|C_j\|_s, \quad k = 0, 1, 2. \quad (2.48)$$

Здесь

$$\tau(t) = \exp \left(\int_T^t (p(s))^{1/2} ds \right).$$

Замечание 2.6. При замене условия (2.40) на

$$Q^2 - (Q^2)' \in \Psi^0 \quad (2.49)$$

оценки (2.48) упрощаются :

$$p^{1/4-k/2}(t)\|\partial_t^k u\|_s \leq c \sum_{j=1}^2 \|C_j\|_{s+k}, \quad k = 0, 1, 2. \quad (2.50)$$

Предложение 2.4 доказано в работе [8] другим способом. Можно получить различные асимптотические решения уравнения

$$u_{tt} + Qu = 0, \quad t \in]0, T[, \quad x \in R^n, \quad Q \in \Psi^2, \quad (2.51)$$

если представить их в виде $u = \Phi(t)v(t, x)$, где Φ – разрешающий интегральный оператор Фурье псевдодифференциального уравнения первого порядка

$$\begin{cases} \Phi_t = (A_1 + \dots + A_r)\Phi, & t \in]0, T[, \\ \Phi|_{t=T} = I, \end{cases}$$

где I – тождественный оператор, а A_i – псевдодифференциальные операторы, которые находятся из соотношений

$$A_{1t} + Q = 0,$$

$$A_{jt} + A_{j-1}^2 + A_j(A_1 + \dots + A_{j-1}) + (A_1 + \dots + A_{j-1})A_j = 0, \quad j = 2, \dots, r. \quad (2.52)$$

Из (2.52) легко заключить, что

$$\Phi_{tt} + Q\Phi = A_r^2. \quad (2.53)$$

Пусть $\Phi_{2,1}$ – решение операторного уравнения первого порядка

$$(\partial_t + 2\Phi^{-1}\Phi_t)\Phi_{2,1} = 0, \quad \Phi_{2,1}|_{t=0} = I,$$

где

$$\Phi_{2,1}(t) = \Phi(t) \int_T^t \Phi_{2,1}(\tau) d\tau.$$

Предложение 2.5. Пусть существует неотрицательная функция $\beta(t)$ из класса $L_1([0, T])$ такая, что

$$\Phi, \Phi^{-1}, \Phi_{2,1}, \Phi_{2,1}^{-1} \in I^0, \quad \beta^{-1}(t)A_r^2 \in \Psi_p^0,$$

а главный символ оператора Q — неотрицательная функция на $[0, T] \times \mathbb{R}^{2n}$. Тогда для $C_1(x), C_2(x) \in H^\infty$ существует решение уравнения (2.53), представимое в виде

$$\partial_t^k u = [\Phi^{(k)}(t) + \varepsilon_1(t, x)]C_1(x) + [\Phi_2^{(k)}(t) + \varepsilon_2(t, x)]C_2(x),$$

где

$$\lim_{t \rightarrow 0} \varepsilon_k(t, \cdot) = 0, \quad k = 0, 1, \quad \text{равномерно по } x \in \mathbb{R}^n.$$

§3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.1

Пусть

$$\lambda_1(t, x, \xi) = \bar{\lambda}_1(t, x, \xi) + \lambda(t, x, \xi), \quad (3.1)$$

$$\bar{\lambda}_1(t, x, \xi) \in B_t^1(S^1), \quad \lambda \in B_t^1(S^0), \quad \bar{\lambda}_1 \text{ вещественнозначна.} \quad (3.2)$$

Мы ищем фазовую функцию оператора (2.5), $\varphi(t, s) = \varphi(t, s; x, \xi) \in B_t^2(S^1)$ на $0 \leq s \leq t \leq T_0$ для некоторого T_0 ($0 < T_0 \leq T$), являющаяся решением задачи

Коши

$$\partial_t \varphi - \lambda_1(t, x, \nabla_x \varphi) = 0, \quad \text{на } 0 \leq s \leq t \leq T_0, \quad (3.3)$$

$$\varphi(s, s; x, \xi) = x\xi. \quad (3.3')$$

(3.3) называется уравнением эйконала. Для $\{q, p\} = \{(q_1, \dots, q_n), (p_1, \dots, p_n)\}$ рассмотрим систему гамильтоновых уравнений

$$\frac{\partial q}{\partial t} = -\nabla_p \lambda_1(t, q, p), \quad \frac{\partial p}{\partial t} = \nabla_q \lambda_1(t, q, p), \quad \{q, p\}_{t=s} = \{y, \eta\}. \quad (3.3'')$$

Теорема 3.1 ([4], Теорема 3.1). Пусть $y = y(t, s; x, \xi)$ ($0 \leq s \leq t \leq T_2$) — обратное отображение отображения $x = q(t, s; y, \xi) : y \mapsto x, \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ с параметром (t, s, ξ) , и пусть

$$u(t, s; y, \eta) - y\eta = \int_s^t [\lambda_1 - p \nabla_\xi \lambda_1](\tau, q(\tau, s; y, \eta), p(\tau, s; y, \eta)) d\tau. \quad (3.4)$$

Тогда решение задачи Коши (3.3), (3.3') можно записать в виде $\varphi(t, s; x, \xi) = u(t, s; y(t, s; x, \xi), \xi)$. Полагая $J(t, s) = J(t, s; x, \xi) = \varphi(t, s; x, \xi) - x\xi$, получим

$$\{J(t, s)/(t-s), \partial_t J(t, s), \partial_s J(t, s)\}_{0 \leq t, s \leq T_0} \text{ ограничена в } S^1. \quad (3.5)$$

Следствие 3.1. (1) Для любого целого числа $\nu \geq 0$ существуют c_ν и T_ν ($0 < T_\nu \leq T_0$) такие, что

$$\varphi(t, s, x, \xi) \in \mathcal{P}(c_\nu |t-s|, \nu), \quad 0 \leq t, s \leq T_\nu. \quad (3.5')$$

(2) Если в теореме 3.1 для $1 \leq m < \infty$

$$\lambda(t, x, \xi) \in B_t^m(S^1) \quad \text{на } [0, T],$$

то

$$\{J(t, s)/(t-s), \partial_t^j \partial_s^k J(t, s); j+k \leq m+1\}_{0 \leq t, s \leq T_0}$$

ограничена в S^1 .

Теорема 3.2 ([4], Теорема 2.3). Пусть $P \in I_\rho^m$. Тогда для любого действительного s оператор P определяет непрерывные отображения из H^{s+m} в H^s . Существуют постоянная $C = C > 0$ и целое число $l = l(s, m) \geq 0$ такие, что

$$\|Pu\|_s \leq C|p|_l^{(m)} \|u\|_{s+m}, \quad \text{для } u \in H^{s+m}. \quad (3.6)$$

Теорема 3.3 ([4], Теорема 3.2). Рассмотрим оператор $L = \partial_t - \Lambda(t, x, D_x)$. Пусть $\lambda = \sigma(\Lambda)$ удовлетворяет условиям (3.1), (3.2). Тогда существует линейный интегральный оператор $E(t, s) \in I^0$ такой, что

$$E(s, s) = I, \quad L_1 E(t, s) = 0 \quad \text{на } 0 \leq s \leq t \leq T_0.$$

$E(t, s)$ – интегральный оператор Фурье с точностью до сглаживающего оператора: существует оператор \bar{E}_φ с символом $e(t, s; x, \xi) \in B_t^1(S^0)$ ($0 \leq s \leq t \leq T_0$ с T_0 , как в следствии 3.1) такой, что

$$\bar{E}_\varphi(t, s) \in I^0, \quad \bar{E}_\varphi(t, s) - E(t, s) \in B_t(S^{-\infty}).$$

Определим вспомогательные функции $\{u^j(t, y)\}_{j=1}^m$ из выражений

$$\partial_t^{k-1} u(t, x) = \sum_{j=1}^m [\partial_t^{k-1} \Phi_j(t)] u^j(t, y), \quad k = 1, \dots, m. \quad (3.7)$$

Решая соотношения (3.7) относительно u^j , имеем

$$u^j(t, y) = \sigma^j A_{m,m-1} \cdots A_{3,2} A_{2,1} \Phi_1^{-1} u, \quad j = 1, \dots, m, \quad (3.8)$$

где линейные интегральные операторы $A_{s,s-1}$ определены в (2.23), а σ – циклическая перестановка из группы перестановок m чисел $(1, \dots, m)$. Докажем формулу (3.8) для частного случая $m = 3$. Исключим $u^1(t, y)$ из системы

$$\begin{aligned} u &= \Phi_1 u^1 + \Phi_2 u^2 + \Phi_3 u^3, \\ u_t &= \Phi_{1t} u^1 + \Phi_{2t} u^2 + \Phi_{3t} u^3, \\ u_{tt} &= \Phi_{1tt} u^1 + \Phi_{2tt} u^2 + \Phi_{3tt} u^3. \end{aligned} \quad (3.7')$$

Применяя $(\Phi_1^{-1})_t$ к левой части первого соотношения и Φ_1^{-1} к левой части второго соотношения, а затем суммируя полученные выражения, получим

$$(\Phi_1^{-1} \Phi_2)_t u^2 + (\Phi_1^{-1} \Phi_3)_t u^3 = (\Phi_1^{-1} u)_t.$$

Применяя $(\Phi_1^{-1})_{tt}$ к левой части первого соотношения в (3.7'), $(2\Phi_1^{-1})_t$ – ко второму и Φ_1^{-1} к третьему соотношению в (3.7'), а затем суммируя, получим

$$(\Phi_1^{-1} \Phi_2)_{tt} u^2 + (\Phi_1^{-1} \Phi_3)_{tt} u^3 = (\Phi_1^{-1} u)_{tt}.$$

Таким образом

$$\Phi_{2,1t} u^2 + \Phi_{3,1t} u^3 = (\Phi_1^{-1} u)_{tt}, \quad \Phi_{2,1} u^2 + \Phi_{3,1} u^3 = (\Phi_1^{-1} u)_t. \quad (3.9)$$

Теперь исключим u^2 из (3.9). Применяя Φ_{21}^{-1} к первому соотношению в (3.9), $(\Phi_{21}^{-1})_t$ ко второму соотношению и суммируя, получим

$$(\Phi_{2,1}^{-1} \Phi_{3,1})_t u^3 = (\Phi_{2,1}^{-1} (\Phi_1^{-1} u)_t)$$

или

$$u^3 = \Phi_{3,2}^{-1} \partial_t (\Phi_{2,1}^{-1} \partial_t (\Phi_1^{-1} u)) = A_{3,2} A_{2,1} \Phi_1^{-1} u, \quad (3.10)$$

где

$$\Phi_2(t) = \Phi_1(t) \int_T^t \Phi_{2,1}(y) dy, \quad \Phi_3(t) = \Phi_1(t) \int_T^t \Phi_{3,1}(y) dy,$$

$$\Phi_{3,1} = \Phi_{2,1}(t) \int_T^t \Phi_{3,2}(y) dy, \quad A_{3,2} = \Phi_{3,2}^{-1} \partial_t, \quad A_{2,1} = \Phi_{2,1}^{-1} \partial_t. \quad (3.11)$$

Переставляя индексы, получим

$$u^1 = (1, 2, 3)u^3 = A_{1,3}A_{3,2}\Phi_2^{-1}u, \quad u^2 = (1, 2, 3)^2u^3 = A_{2,1}A_{1,3}\Phi_3^{-1}u. \quad (3.12)$$

Соотношения (3.8) в общем случае доказываются аналогично. Дифференцируя (3.7) по t , с учетом (2.1), получаем

$$\sum_{j=1}^m (\partial_t \Phi_j^t) \partial_t u^j = -\delta_{km} \sum_{j=1}^m (P\varphi_j) u^j, \quad k = 1, \dots, m, \quad (3.13)$$

где δ_{km} — символ Кронеккера. Из соотношений (3.13), с учетом (2.9) — (2.9ⁿ), получаем

$$\begin{aligned} \partial_t u^s + \sum_{j=1}^{m-s} Z_{j+s,s}(t) \partial_t u^{j+s} &= 0, \quad s = 1, \dots, m-1, \\ \partial_t u^m &= -(\Phi_{2,1} \Phi_{3,2} \dots \Phi_{m,m-1})^{-1} \sum_{j=1}^m (P\Phi_j) u^j. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Решая соотношения (3.14) относительно $\partial_t u^s$, получим

$$\partial_t u^s = \sum_{j=1}^m K_j^s u, \quad s = 1, \dots, m, \quad (3.15)$$

где линейные интегральные операторы K_j^s определены в (2.11). Покажем как получить формулу (2.11) в частном случае, когда $m = 3$. Дифференцируя (3.7') по t , имеем

$$\Phi_1 u_t^1 + \Phi_2 u_t^2 + \Phi_3 u_t^3 = 0, \quad \Phi_{1t} u_t^1 + \Phi_{2t} u_t^2 + \Phi_{3t} u_t^3 = 0,$$

$$\Phi_{1tt} u_t^1 + \Phi_{2tt} u_t^2 + \Phi_{3tt} u_t^3 = -(P_3 \Phi_j) u^j,$$

где

$$P_3 \Phi_j = (\partial_t^3 + Q_1 \partial_t^2 + Q_2 \partial_t + Q_3) \Phi_j.$$

Учитывая выражения

$$\Phi_2 = \Phi_1 Z_{2,1}, \quad \Phi_3 = \Phi_1 Z_{3,1}, \quad Z_{3,1} = \int_T^t \Phi_{3,1}(s) ds, \quad \Phi_{3,1} = \Phi_{2,1} Z_{3,2}$$

(см. (2.9) — (2.9ⁿ)) получаем

$$u_t^1 + Z_{2,1} u_t^2 + Z_{3,1} u_t^3 = 0, \quad u_t^2 + Z_{3,2} u_t^3 = 0, \quad \Phi_1 \Phi_{2,1} \Phi_{3,2} u_t^3 = -P_3 \Phi_j u^j,$$

т.е. (3.15), где

$$K_j^3 = -(\Phi_1 \Phi_{2,1} \Phi_{3,2})^{-1} P_3 \Phi_j,$$

$$K_j^1 = (Z_{2,1} Z_{3,2} - Z_{3,1}) K_j^3, \quad K_j^2 = -Z_{3,2} K_j^3. \quad (2.11')$$

Соотношения (2.11) в общем случае доказываются аналогично. Из (3.15), интегрируя по $t \in [0, T]$, получаем систему интегродифференциальных уравнений

$$u^s(t, y) = C_s(y) + \int_0^t \sum_{j=1}^m K_j^s(\tau) u^j(\tau, y) d\tau, \quad s = 1, \dots, m. \quad (3.16)$$

Полагая $\beta_s^{-1}(t) K_j^s \in \bar{I}^0$, см. (2.12), приходим к оценкам

$$\|K_j^s v\|_p \leq c \beta_s(t) \|v\|_p, \quad s, j = 1, \dots \quad (3.17)$$

Из (3.16), (3.17) имеем

$$\|u^s(t)\|_p \leq \|C_s\|_p + c \int_0^t \beta_s(\tau) \sum_{j=1}^m \|u^j(\tau)\|_p d\tau. \quad (3.18)$$

После суммирования по s получаем

$$\sum_{s=1}^m \|u^s(t)\|_p \leq \sum_{s=1}^m \|C_s\|_p + c \int_0^t \beta(\tau) \sum_{j=1}^m \|u^j(\tau)\|_p d\tau, \quad (3.19)$$

где

$$\beta(t) = \sum_{s=1}^m \beta_s(t).$$

Применяя неравенство Гронуолла к (3.19), получаем

$$\sum_{s=1}^m \|u^s(t)\|_p \leq \sum_{s=1}^m \|C_s\|_p \exp \left(c \int_0^t \beta(\tau) d\tau \right). \quad (3.20)$$

Снова применяя (3.16) и учитывая (3.20), получаем

$$\|u^s - C_s\|_p \leq c \int_0^t \left(\beta_s(\tau) \exp \int_0^\tau c \beta(z) dz \right) d\tau \leq c \int_0^t \left(\beta(\tau) \exp \int_0^\tau c \beta(z) dz \right) d\tau,$$

или, после интегрирования

$$\|u^s - C_s\|_p \leq c_1 \left[-1 + \exp \left(c \int_0^t \beta(y) dy \right) \right], \quad s = 1, \dots, m. \quad (3.21)$$

Обозначая

$$\varepsilon_j(t, y) = u^j(t, y) - C_j(y), \quad j = 1, \dots, m, \quad (3.22)$$

из (3.21) приходим к соотношениям (2.13), (2.13'). Существование решения уравнения (2.1) может быть доказано применением итераций к (3.16). Теорема 2.1 доказана.

§4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМЫ 2.2 И ПРЕДЛОЖЕНИЯ

Доказательство теоремы 2.2 В условиях теоремы 2.2 из теоремы 2.1 имеем представления (2.13), (2.13') и соотношения

$$\mu_k(\partial_t^k \Phi_1)^{-1} \partial_t^k u = \mu_k(C_1 + \varepsilon_1) + \sum_{j=2}^{m-1} \mu_k(\partial_t^k \Phi_1)^{-1} \partial_t^k \Phi_j(C_j + \varepsilon_j), \quad k = 0, 1, \dots, m-1. \quad (4.1)$$

Используя условие (2.25), получим оценки (2.27). Из уравнения (2.1) имеем

$$\partial_t^m u = - \sum_{k=0}^{m-1} Q_{m-k} \partial_t^k u,$$

и

$$\mu_m \Phi_1^{-1} \partial_t^m u = - \sum_{k=0}^{m-1} \mu_m \Phi_1^{-1} Q_{m-k} (\partial_t^k \Phi_1) \mu_k^{-1} \mu_k (\partial_t^k \Phi_1)^{-1} \partial_t^k u. \quad (4.2)$$

Учитывая (2.25), (2.26), получим оценки (2.28)

$$\|\mu_m \Phi_1^{-1} \partial_t^m u\|_s \leq \sum_{k=0}^{m-1} \|\mu_k (\partial_t^k \Phi_1)^{-1} \partial_t^k u\|_{s+\delta_k} \leq \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{j=1}^m \|C^j\|_{s+r_{kj}+\delta_k}.$$

Теорема 2.2 доказана.

Предложение 2.1 является прямым следствием теоремы 2.1. Другое доказательство можно найти в [8].

Доказательство предложения 2.2 Из (2.36) – (2.38) следует, что интегральные операторы Φ_1, Φ_2 являются решениями задачи Коши

$$\partial_t \Phi_j + \Lambda_j \Phi_j = 0, \quad t \in]0, T[, \quad z \in \mathbb{R}^n,$$

$$\Phi_j|_{t=T} = I, \quad j = 1, 2. \quad (4.3)$$

Из (2.36), (2.37) получим

$$\Phi_{2t} \Phi_2^{-1} - \Phi_{1t} \Phi_1^{-1} = \Lambda_1 - \Lambda_2 = 2iQ^2,$$

$$\Lambda_j^2 - \Lambda_{jt} = 2(Q^{-1}Q_t)^2 - Q^{-1}Q_{tt} \pm iQ^{-1}[Q_t, Q]Q,$$

$$P\Phi_j = \Phi_{jt} + Q^4\Phi_j = (\Lambda_j^2 - \Lambda_{jt} + Q^4)\Phi_j = \{2(Q^{-1}Q_t)^2 -$$

$$-Q^{-1}Q_{tt} \pm iQ^{-1}[Q, Q_t]Q\}\Phi_j = \{(Q^{-1})_{tt} \pm iQ^{-1}[Q, Q_t]\}Q\Phi_j, \quad j = 1, 2. \quad (4.4)$$

Эти соотношения преобразуют условия (2.16) замечания 2.2 в

$$\beta_s^{-1}(z) \Phi_j^{-1} Q^{-2} \{(Q^{-1})_{tt} \pm iQ^{-1}[Q, Q_t]Q\} \Phi_s \in \tilde{I}^0, \quad s = 1, 2,$$

выполняющиеся в силу условий (2.41) предложения 2.2. Из условий (2.39), (2.40) предложения 2.2 следуют условия (2.14), (2.15) замечания 2.2 ($Q_1 = 0, Q_2 = Q^4$). Оператор $\Phi_1 \in I^0$ с точностью до сглаживающего оператора (см. теорему 3.3), поскольку он удовлетворяет псевдодифференциальному уравнению первого порядка $\Phi_{1t} = -\Lambda_1 \Phi_1$, где символ λ_1 оператора Λ_1 удовлетворяет условиям (3.1), (3.2). Аналогично, $\Phi_{2,1} \in I^0$, - с точностью до сглаживающего оператора, так как он удовлетворяет псевдодифференциальному уравнению первого порядка (2.17). Таким образом, из условий предложения 2.2 вытекают все условия замечания 2.2. Предложение 2.2 является следствием теоремы 2.1 и замечания 2.2.

Доказательство предложения 2.3 Докажем, что условия (2.29), (2.30) предложения 2.1 можно вывести из условий предложения 2.3. Поскольку $\Phi_{jt} = -\Lambda_j \Phi_j$, то из условия (2.29)₁ получаем

$$\mu_1 \Phi_{1t}^{-1} \Phi_{2t} = \mu_1 \Phi_1^{-1} \Lambda_1^{-1} \Lambda_2 \Phi_2 \in \tilde{I}^r, \quad \text{с } r = 0.$$

Это условие следует из условия $\Lambda_1^{-1} \Lambda_2 \in \Psi_\rho^0$, являющегося следствием формул (2.42) и

$$(iQ^2 + Q^{-1}Q_t)^{-1}(-iQ^2 + Q^{-1}Q_t) = (i + Q^{-3}Q_1)^{-1}(-i + Q^{-3}Q_t) \in \Psi_\rho^0.$$

Условие (2.29)₂ с $\delta_0 = 2, \mu = \mu^2$ следует из (2.39) : так как $\mu Q^2 \in \Psi_\rho^1$, то $\mu^2 Q^4 = (\mu Q^2)^2 \in \Psi_\rho^2$ и

$$\mu_2 \Phi_1^{-1} Q_2 \Phi_1 = \mu^2 \Phi_1 Q^4 \Phi_1 \in \Psi_\rho^2 \subset I_\rho^2.$$

Условие (2.30) выполнено, так как $Q_1 = 0$. Поэтому, условия предложения 2.1 выполнены при $\mu_2 = \mu^2(t), r = 0, \delta_0 = 2, \mu_1 = 1$. В силу

$$\Phi_{1t} \Phi_1^{-1} - \Phi_{2t} \Phi_2^{-1} = \Lambda_2 - \Lambda_1 = -2iQ^2, \quad u_t - \Phi_{jt} \Phi_j^{-1} u_t = u_t + \Lambda_j u, \quad (4.5)$$

начальные данные (2.32) преобразуются к виду (2.43). Из оценок (2.33) предложения 2.1 получаем (2.44). Итак, предложение 2.3 следует из предложения 2.1.

Лемма 4.1. Пусть условия (2.39), (2.49) выполнены. Тогда решения w уравнений

$$\partial_t w + \Lambda_j w = 0, \quad t \in]0, T[\quad (4.6)$$

удовлетворяют оценкам

$$\begin{aligned} \|Q(t)w(t)\|_s \exp\left(c \int_T^t \mu^{-1}(y) dy\right) &\leq \|Q(T)w(T)\|_s \leq \\ &\leq \|Q(t)w(t)\|_s \exp\left(c \int_T^t \mu^{-1}(y) dy\right). \end{aligned} \quad (4.7)$$

Доказательство. Если выполнены условия (2.39), (2.40), то

$$\mu(t)[Q^2 - (Q^2)^*] \in \Psi^0.$$

Подставляя $v = Qw$, $\tau = \tau(t) = \int_T^t \mu^{-1}(y) dy$ в (4.6), получим

$$v_t \pm iQ^2v = 0, \quad \text{или} \quad v_\tau \pm i\mu Q^2v = 0,$$

и

$$\bar{v}v_\tau + i\bar{v}\mu Q^2v = 0, \quad v\bar{v}_\tau \pm i\bar{v}Q^2v = 0.$$

Итак

$$\partial_\tau \|v\|^2 + i(v, \mu Q^2v) \pm i(\mu Q^2v, v) = 0$$

или

$$\partial_\tau \|v\|^2 = \pm i(v\mu(Q^2 - Q^{2*})v).$$

Из предложения (2.49) имеем $|\partial_\tau \|v\|^2| \leq c\|v\|^2$. Учитывая, что $v \rightarrow E_s v = (1 + |D_x|^2)^{s/2}v$, получим

$$|\partial_\tau \|v\|_s| \leq c\|v\|_s \quad \text{или} \quad -cd\tau \leq \|v\|_s^{-1} d\|v\|_s \leq cd\tau.$$

Интегрируя по $\tau \in [\tau, 0]$, $\tau \leq 0$, имеем

$$\begin{aligned} -c \int_\tau^0 d\tau &\leq \ln \frac{\|v(0)\|_s}{\|v(\tau)\|_s} \leq c \int_\tau^0 d\tau, \\ \|v(\tau)\|_s \exp(c\tau) &\leq \|v(0)\|_s \leq \|v(\tau)\|_s \exp(-c\tau), \\ \|v(t)\|_s \exp\left\{c \int_T^t \mu^{-1}(y) dy\right\} &\leq \|v(T)\|_s \leq \|v(t)\|_s \exp\left\{c \int_t^T \mu^{-1}(y) dy\right\}. \end{aligned}$$

Так как $v = Qw$, то мы приходим к оценке (4.7).

Доказательство предложения 2.4 Сначала докажем оценки (2.48). Из леммы 4.1 получим

$$\|\Phi_1^{-1}u(t)\|_s = \|u(T)\|_s = \|Q^{-1}(T)Q(T)u(T)\|_s \geq \|Q(T)u(T)\|_{s-1/2} \geq$$

$$\geq \|Q(T)u(t)\|_{s-1/2} \exp\left\{c \int_T^t \mu^{-1}(y) dy\right\} \geq p^{1/4}(t) \exp\left\{c \int_T^t \mu^{-1}(y) dy\right\} \|u(t)\|_s,$$

следовательно, с учетом (2.44), получим (2.48) с $k = 0$:

$$p^{1/4}(t) \left\{ \exp\left\{c \int_T^t \mu^{-1}(y) dy\right\} \right\} \|u(t)\|_s \leq \|\Phi_1^{-1}u(t)\|_s \leq c \sum_{j=1}^2 \|C^j\|_s.$$

Далее

$$\mu p^{1/4}(t) \left\{ \exp\left\{c \int_T^t \mu^{-1}(y) dy\right\} \right\} \|u(t)\|_s \leq \mu \|\Phi_1^{-1}u_t(t)\|_s \leq c \sum_{j=1}^2 \|C_j\|_s.$$

Поскольку $\mu = p^{-1/2}$, то мы приходим к (2.48) с $k = 1$. Доказательство формулы (2.48) завершается замечанием

$$\mu^2 p^{1/4}(t) \left\{ \exp\left\{c \int_T^t \mu^{-1}(y) dy\right\} \right\} \|u_{tt}\|_s \leq \mu^2 \|\Phi_1^{-1}u_{tt}(t)\|_s \leq c \sum_{j=1}^2 \|C_j\|_s.$$

Для доказательства предложения 2.4 покажем, что условия предложения 2.3 следуют из предположений предложения 2.4. Полагая $j = 0$ в (2.47), получим $p^{-1/4}Q \in \Psi^{1/2}$; отсюда следует, что $\mu Q^2 = (p^{-1/4}(t)Q)^2 \in \Psi^1$, т.е. (2.39)₁ с $\mu = p^{-1/2}(t)$. Полагая $j = 1$ в (2.47), из (2.46) получаем $p^{1/4}Q^{-1} \in \Psi^{-1/2}$, $p_i^{-1}p^{3/4}Q_i \in \Psi^{1/2}$; отсюда следует

$$p^{-1/2}Q^{-1}Q_i = p^{-3/2}p_i(p^{1/4}Q^{-1})(p_i^{-1}p^{3/4}Q_i) \in \Psi^0$$

(с учетом неравенства (2.45) $|p^{-3/2}p_i| < \varepsilon$), т.е. (2.39). Из (2.46), (2.47) с $\rho = p^{-5/2}p_i^2 \in L_1([0, T])$, (см. (2.45)), получаем условие (2.41) в виде

$$\rho_1 Q^{-3}[Q_i, Q]Q = (p^{1/4}Q^{-1})^3 p_i^{-2} p^2 [Q_i, Q] (p^{-1/4}Q) \in \Psi^0,$$

$$\begin{aligned} \rho_2(t) Q^{-2}(Q^{-1})_{tt} Q &= \rho_2^{-1}(t) Q^{-2} [2(Q^{-1}Q_i)^2 - Q^{-1}Q_{tt}] = \\ &= (p^{1/4}Q^{-1})^2 [2(p^{1/4}Q^{-1}p^{3/4}p_i^{-1}Q_i) - (p^{1/4}Q^{-1})p^{7/4}p_i^{-2}Q_{tt}] \in \Psi^0, \end{aligned}$$

так как

$$(Q^{-1})_{tt} Q = 2(Q^{-1}Q_i) - Q^{-1}Q_{tt}.$$

С учетом (2.45), условие (2.42) следует из включения

$$Q^{-3}Q_i = (p^{1/4}Q^{-1})^3 (p^{3/4}p_i^{-1}Q_i) p_i p^{-3/2} \in \Psi^{-1}.$$

Предложение 2.4 доказано.

Для доказательства замечания 2.6 заметим, что, с учетом (2.48), (2.39), можно положить в (4.7) $\mu = 1$. Следовательно, весовая функция $\exp\{c \int_T^t \mu^{-1}(y)\} dy$ стремится к константе при стремлении t к 0. Таким образом, (2.50) следует из оценок (4.7) леммы 4.1.

ABSTRACT. The paper establishes local asymptotic representations for solutions of linear singular hyperbolic equations by means of Fourier integral operators. It is assumed that the coefficients of the equations are unbounded near a singular hyperplane $t = 0$. These representations generalize the well known Levinson's asymptotic theorem from the theory of ordinary differential equations. They are useful for the study of some equations of mathematical physics. Another application is in the study of correctness of Cauchy problem for the partial differential equations with multiple characteristics.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. М. В. Федорюк, Асимптотические методы для линейных дифференциальных уравнений, М., Наука, 1983.
2. L. Hörmander, The Analysis of Linear Partial Differential Operators, vol. 3,4, Springer-Verlag, Berlin, 1985.
3. H. Kumano-go, "A calculus of Fourier integral operators on \mathbb{R}^n and the fundamental solution for an operator of hyperbolic type", Comm. Part. Dif. Equat., vol. 1(1), pp. 1 - 44, 1976.
4. H. Kumano-go, Pseudo-differential Operators, Massachusetts Inst. of Technology Press, 1982.
5. N. Levinson, "The asymptotic nature of solutions of linear systems of differential equations," Duke Math. J., vol. 15, pp. 111 - 126, 1948.
6. H. Tahara, "On Fuchsian hyperbolic partial differential equations", Lect. Notes Math., vol. 1223, pp. 243 - 253, 1986.
7. F. Trèves, Introduction to Pseudodifferential and Fourier Integral Operators, vol. 1,2, Plenum Press, New-York, 1980.
8. Г. Р. Оганесян, "ВКБ-оценки для дифференциальных уравнений в частных производных, и задача Коши для сингулярных дифференциальных уравнений второго порядка", Изв. АН Армении, Математика, т. 25, № 2, стр. 123 - 134, 1990.
9. Г. Р. Оганесян, "Единственность решения весовой задачи Коши и новая формула для энергии", Изв. АН Армении, Математика, т. 26, № 5, стр. 376 - 386, 1991.
10. G. R. Oganessian, "JWKB-estimates and weighted Cauchy problems for singular on initial hyperplane partial differential equations", Bull. Polish Acad. Sci. Math., vol. 39, № 1 - 2, pp. 31 - 38, 1991.
11. Г. Р. Оганесян, "Оценки для функций ошибок асимптотических решений обыкновенных линейных дифференциальных уравнений", Изв. НАН Армении, Математика, т. 31, № 1, стр. 9 - 28, 1996.

16 февраля 1996

Институт математики
НАН Армении