ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ МАРТИНГАЛ–РАЗНОСТНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПОЛЕЙ

Б. С. Нахапетян, А. Н. Петросян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, т. 30, № 6, 1995

В статье исследованы случайные поля на решетке Z^ν, $\nu > 1$, имеющие мартингал–разностное свойство и доказаны предельные теоремы. Результаты могут применяться в теории гиббсовских случайных полей.

§1. ВВЕДЕНИЕ

Суммы компонент мартингал–разностных случайных полей (с.п.) на решетке образуют мартингал по любой последовательности конечных возрастающих подмножеств решетки Z^ν. Мартингалы относительно возрастающих множеств представляют собой естественное обобщение обычных мартингалов к многомерному параметровому случаю и были интенсивно изучены в работах [7], [8], [18]. В этих работах внимание главным образом уделялось теоремам сходимости и построению стохастического интеграла по таким мартингалам. Представляют интерес также предельные теоремы и, в частности, центральная предельная теорема (ЦПТ). Сначала Биллингсли [3] и Ибрагимов [15] получили условия, при которых ЦПТ справедлива для одномерных ($\nu = 1$) мартингалов. Они показали, что нормированные суммы компонент стационарных эргодических мартингал–разностей удовлетворяют ЦПТ. Их результаты были обобщены на нестационарный случай Брауном [5] и Дворецким [13]. Теория предельных теорем длямартингалов представлена в работах [17], [20].

Наша цель – многомерный аналог теоремы Биллингсли–Ибрагимова (см. также [27]) для однородных с.п. Мы показываем, что для любого однородного эргодического мартингал–разностного с.п. второго порядка справедлива ЦПТ.

Вообще справедливость ЦПТ для мартингал–разностного с.п. зависит от корреляционных свойств. В однородном случае необходимое убывание корреляций следует из условия эргодичности. Для неоднородных с.п. условие эргодичности мы заменяем определенными условиями перемешивания. Для перемешивающихся с.п. известны различные условия, при наличии которых имеет место ЦПТ. Одним из требований является достаточно быстрое убывание коэффициента перемешивания. Обычно требуется степенное убывание (см, например, [4], [6], [23] – [25], [34]). Мы показываем, что если перемешивающееся с.п. обладает мартингал–разностным свойством, то для справедливости ЦПТ условий на скорость стремления к нулю коэффициента перемешивания накладывать не надо. Далее полученные результаты мы применяем к гиббсовским случайным полям.

Гиббсовские с.п. являются одним из основных объектов изучения в математической статистической физике. Они задаются весьма общим и удобным способом (см, например, [9], [10], [14], [22], [31]), позволяющим трактовать их как некоторую специальную (гиббсовскую) форму описания с.п. вообще. Дело в том, что стандартные ограничения, накладываемые на задающие эти поля потенциалы, носят столь общий характер, что в звисимости от дополнительных условий на потенциал, можно говорить о гиббсовском описании однородных ([9], [10]), марковских ([1], [28], [29], [32], [33]), гауссовских ([12]) и т.д. полей. Одна из задач, рассмотренных в настоящей работе, относится к указанному кругу вопросов, а именно, к вопросу о гиббсовском представлении мартингал–разностных с.п. Вообще эта задача тесно связана с задачей о существовании с.п. с заданными одноточечными условными распределениями. Эта интересная задача остается нерешенной. Некоторые рассуждения можно найти в ([11]). Здесь мы описываем построение одноточечных распределений (см. Конструкцию Б), для которых соответствующее с.п. – мартингал–разность. Мы также определяем довольно широкий класс потенциалов (четные потенциалы), для которых соответствующее гиббсовское с.п. – мартингал–разность. Потенциалы многих известных моделей в статистической физике становятся четными после некоторой симметризации (модель Поттса, модель ротаторов Шлосмана, модель Блюма–Кейтеля и т.д.). В моделях с четными потенциалами возможны фазовые переходы [21], [27]. Суммарный спин в критической точке в некоторых из этих моделей может иметь неожиданное поведение (справедливость центральной предельной теоремы, см. [27]).

§2. МАРТИНГАЛЫ ОТНОСИТЕЛЬНО ВОЗРАСТАЮЩИХ ПОДМНОЖЕСТВ

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ – вероятностное пространство, и пусть $\mathcal{W}$ есть множество всех конечных подмножеств решетки Z^ν, $\nu \geq 1$. Рассмотрим набор случайных величин (с.в.) $S_V, V \in \mathcal{W}$ и частично упорядоченную совокупность σ–алебр $\mathcal{F}_V$, $V \in \mathcal{W}$, т.е.

$$\mathcal{F}_V \subset \mathcal{F},\ \overline{V} \subset V \Rightarrow \mathcal{F}_V \subset \mathcal{F}_{\overline{V}}, \quad \mathcal{F}_\emptyset = \{\emptyset, \Omega\}.$$

Если для каждого $V \in \mathcal{W}$ велчины S_V являются $\mathcal{F}_V$–измеримыми, то набор $S = (S_V, \mathcal{F}_V)$ назовем ***стохастическим набором.***

Определение 1. Стохастический набор $S = (S_V, \mathcal{F}_V)$ назовем ***мартингалом***, если для любых $\bar{V}, V \in \mathcal{W}$, $\bar{V} \subset V$ имеем

$$E|S_V| < \infty \quad \text{и} \quad E(S_V|\mathcal{F}_{\bar{V}}) = S_{\bar{V}} \quad \text{п.н.}$$

Определение 2. Стохастический набор $S = (S_V, \mathcal{F}_V)$ назовем ***мартингалом относительно некоторой последовательности конечных возрастающих подмножеств (п.к.в.п) V_n, $n = 1, 2, ...$, если для всех $n = 2, 3, ...$ имеем***

$$E|S_{V_n}| < \infty \quad \textit{и} \quad E(S_{V_n}|\mathcal{F}_{V_{n-1}}) = S_{V_{n-1}} \quad \textit{п.н.}$$

Утверждение 1. *Каждый мартингал $S = (S_V, \mathcal{F}_V)$ есть мартингал относительно любой п.к.в.п. и наоборот, стохастический набор $S = (S_V, \mathcal{F}_V)$, являющийся мартингалом относительно любой п.к.в.п., есть мартингал.*

Доказательство тривиально.

Пример 1. Пусть Y такая с.в., что $E|Y| < \infty$ и $\mathcal{F}_V, V \in \mathcal{W}$ – частично упорядоченная совокупность σ–алгебр. Положив $S_V = E(Y|\mathcal{F}_V)$, $V \in \mathcal{W}$, получим стохастический набор $(S_V, \mathcal{F}_V)$, являющийся мартингалом.

Пример 2. Пусть X – стандартное пространство с конечной мерой μ на σ–алгебре $\mathcal{B}$ борелевских подмножеств X. Обозначим через p_V, $V \in \mathcal{W}$ плотность вероятностей, определенную на пространстве произведений $(X^V, \mathcal{B}^V, \mu^V)$. Пусть $\{p_V,\ V \in \mathcal{W}\}$ – согласованное в смысле Колмогорова семейство строго положительных плотностей. Пусть $\{q_V,\ V \in \mathcal{W}\}$ – другое семейство плотностей, также согласованное в смысле Колмогорова. Положим $S_V = q_V p_V^{-1}$, $V \in \mathcal{W}$. Тогда стохастический набор $(S_V, \mathcal{B}^V)$ – мартингал.

Другие примеры многомерных мартингалов можно строить на основе нижеприводимого понятия мартингал–разностного с.п. (см. Конструкции А, Б, В).

Определение 3. С.п. ξ_t, $t \in Z^\nu$ назовем ***мартингал–разностным с.п.***, если для каждого $t \in Z^\nu$

$$E|\xi_t| < \infty \quad \text{и} \quad E(\xi_t | \xi_s,\ s \in Z^\nu \setminus \{t\}) = 0 \quad \text{п.н.}$$

Определение 4. С.п. ξ_t, $t \in Z^\nu$ назовем ***мартингал–разностным с.п. относительно некоторой частично упорядоченной совокупности σ–алгебр*** $\mathcal{F}_V$, $V \in U$, $U \subset \mathcal{W}$, если

$$E|\xi_t| < \infty, \quad t \in Z^\nu \quad \text{и при всех } V \in U,\ t \notin V \quad E(\xi_t|\mathcal{F}_V) = 0 \quad \text{п.н.}$$

Определение 5. С.п. ξ_t, $t \in Z^\nu$ назовем ***мартингал–разностным относительно некоторой п.к.в.п.*** V_n, $n = 1, 2, \ldots$, если ξ_t, $t \in Z^\nu$ является мартингал–разностью относительно совокупности σ–алгебр

$$\mathcal{F}_{V_n} = \sigma(\xi_t,\ t \in V_n), \quad n = 1, 2, \ldots$$

Следующее утверждение очевидно.

Утверждение 2. *Пусть ξ_t, $t \in Z^\nu$ такое с.п., что $E|\xi_t| < \infty$, $t \in Z^\nu$, и пусть $S_V = \sum_{t \in V} \xi_t$, $V \in \mathcal{W}$. Если стохастический набор $(S_V, \sigma(\xi_t,\ t \in V))$, $V \in \mathcal{W}$ образует мартингал, то с.п. ξ_t, $t \in Z^\nu$ является мартингал–разностным. Если с.п. ξ_t, $t \in Z^\nu$ является мартингал–разностным, то стохастический набор $(S_V, \sigma(\xi_t, t \in V))$, $V \in \mathcal{W}$ образует мартингал.*

Ясно, что центрированное с.п. с независимыми компонентами является мартингал–разностным с.п. Для построения более интересных примеров необходимо рассматривать зависимые с.п. с компонентами, принимающими более двух различных значений. Дело в том, что мартингал–разностное с.п. с двумя значениями необходимо является полем с независимыми компонентами. Ниже мы приведем некоторые конструкции мартингал–разностных с.п., не имеющих аналогов в одномерном случае и которые могут быть приложимы в теории гиббсовских с.п.

Конструкция А. Предположим, что множество $X \subset R^1$ симметрично относительно нуля (т.е. если $x \in X$, то $-x \in X$), и пусть $\mathcal{B}(X)$ есть σ–алгебра его борелевских подмножеств. Рассмотрим на $\mathcal{B}(X)$ симметричную меру μ (т.е $\mu(A) = \mu(-A)$, $A \in \mathcal{B}(X)$). Пусть теперь ξ_t, $t \in Z^\nu$, $\xi_t \in X$ – с.п. такое, что его конечномерные распределения абсолютно непрерывны относительно продакт–мер μ^V, $V \in \mathcal{W}$ с плотностями $p_V(x_t, t \in V)$, $V \in \mathcal{W}$ такими, что

$$p_V(\theta_t x_t,\ t \in V) = p_V(x_t,\ t \in V)$$

для всех $\theta_t \in \{1, -1\}$. Тогда с.п. ξ_t, $t \in Z^\nu$ будет мартингал–разностным. Достаточно удостовериться, что для любых $V \in \mathcal{W}$ и $t \in Z^\nu$

$$E(\xi_t | \xi_s,\ s \in V \setminus \{t\}) = 0 \quad \text{п.н.}$$

или

$$\int_A \xi_t\ P(d\omega) = 0 \quad \text{для любого} \quad A \in \sigma(\xi_s,\ s \in V \setminus \{t\}).$$

Последнее соотношение может быть переписано следующим образом :

$$\int_B \left(\int_X x p_V(y, x)\ \mu(dx) \right)\ \mu^{V \setminus \{t\}}(dy) = 0 \quad \text{для любого} \quad B \in \mathcal{B}(X^{V \setminus \{t\}}),$$

где

$$X^{V \setminus \{t\}} = \{(x_s,\ s \in V \setminus \{t\})\}, \quad x_s \in X, \quad s \in V \setminus \{t\}.$$

Принимая во внимание четность конечномерных плотностей и симметричность пространства X, получаем

$$\int_X x p_V(y, x)\ \mu(dx) = 0.$$

Конструкция Б. Рассмотрим конечное подмножество $X \subset R^1$ такое, что $X = \bigcup_{i=1}^{N} X_i$, $X_i \cap X_j = \emptyset$, $i \neq j$ и $\sum_{x \in X_i} x = 0$, $i = 1, ..., N$. Пусть ξ_t, $t \in Z^\nu$, $\xi_t \in X$, $t \in Z^\nu$ – с.п. такое, что его условные вероятности

$$q_t^{\bar{x}}(x) = P(\xi_t = x \mid \xi_s = \bar{x}_s,\ s \in Z^\nu \setminus \{t\}), \quad t \in Z^\nu, \quad x \in X, \quad \bar{x} = (\bar{x}_s,\ s \in Z^\nu \setminus \{t\})$$

имеют постоянное значение $q_{t,i}^{\bar{x}}$ при $x \in X_i$, $i = 1, ...N$, т.е.

$$q_t^{\bar{x}}(x) = q_{t,i}^{\bar{x}}, \quad x \in X_i, \quad i = 1, ...N. \tag{1}$$

Это с.п. будет мартингал–разностным при

$$E(\xi_t | \xi_s, s \in Z^\nu \setminus \{t\}) = \sum_{x \in X} x q_t^{\bar{x}}(x) = \sum_{i=1}^{N} \sum_{x \in X_i} x q_t^{\bar{x}}(x) = \sum_{i=1}^{N} q_{t,i}^{\bar{x}} \sum_{x \in X_i} x = 0.$$

Есть вопрос, касающийся существования с.п. с заданными одноточечными условными вероятностями. В следующем параграфе мы рассматриваем такой потенциал, что соответствующие гиббсовские одноточечные условные вероятности обладают свойством (1). В таком случае соответствующее гиббсовское с.п. будет мартингал–разностным.

Конструкция В. Пусть $T = \{T_j\}$ – разбиение решетки Z^ν ($Z^\nu = \cup_j T_j$, $T_j \cap T_k = \emptyset$, $j \neq k$), и пусть с.п. ξ_t, $t \in Z^\nu$ обладает следующим свойством : для всех j с.п. ξ_t, $t \in T_j$ является мартингал–разностным (т.е. для всех $t \in T_j$, $E(\xi_t | \xi_s, s \in T_j \setminus \{t\}) = 0$, п.н.). Если случайные величины ξ_t и ξ_u независимы при всех $t \in T_j$, $u \in T_k$, $j \neq k$, то ξ_t, $t \in Z^\nu$ является мартингал–разностным с.п.

Для доказательства этого воспользуемся следующим простым утверждением. Пусть σ–алгебры $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$ независимы и с.в. ξ не зависит от σ–алгебры $\mathcal{F}_1$. Тогда $E(\xi|\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2) = E(\xi|\mathcal{F}_2)$ п.н. Проверим, что для любых $V \in \mathcal{W}$ и $t \in Z^\nu$

$$E(\xi_t | \xi_s,\ s \in V \setminus \{t\}) = 0 \quad \text{п.н.}$$

Предположим, что $t \in T_{j_0}$. Тогда можем написать

$$V \setminus \{t\} = (V \setminus \{t\}) \cap \bigcup_j T_j = [(V \setminus \{t\}) \cap T_{j_0}] \bigcup_{j \neq j_0} \{V \cap T_j\}.$$

Таким образом, имеем

$$E(\xi_t|\xi_s, s \in V \setminus \{t\}) = E(\xi_t|\xi_s, s \in (V \setminus \{t\}) \cap T_{j_0}, \xi_s, s \in \cup_{j \neq j_0}(V \cap T_j)) =$$

$$= E(\xi_t|\xi_s, s \in (V \setminus \{t\}) \cap T_{j_0}) = 0 \text{ п.н.}$$

§3. ГИББСОВСКИЕ СЛУЧАЙНЫЕ ПОЛЯ

Пусть X –стандартное пространство с конечной мерой μ, $\mu(X) > 0$ на σ–алгебре B его борелевских подмножеств. Совокупность измеримых функций $\Phi = \{\Phi_V, V \in \mathcal{W}\}$, где каждая Φ_V определена на соответствующем измеримом пространстве (X^V, B^V, μ^V), $V \in \mathcal{W}$ называется *потенциалом*. Для каждого $V \in \mathcal{W}$ и $\bar{x} \in X^{Z^\nu \setminus V}$ определим *потенциальную энергию*

$$U_V^{\bar{x}}(x) = \sum_{\emptyset \neq J \subset V} \sum_{\bar{J} \in \mathcal{W}(Z^\nu \setminus V)} \Phi_{J \cup \bar{J}}(x_J \vee \bar{x}_{\bar{J}}), \quad x \in X^V, \quad \bar{x} \in X^{Z^\nu \setminus V},$$

$$x_J = (x_t, t \in J), \quad \bar{x}_{\bar{J}} = (\bar{x}_t, t \in \bar{J}), \quad x_J \vee \bar{x}_{\bar{J}} = ((x_t, t \in J), (\bar{x}_t, t \in \bar{J})).$$

Потенциальная энергия конечна, например, при стандартном условии

$$||\Phi|| = \sup_{a \in Z^\nu} \sum_{J: a \in J \in \mathcal{W}} \sup_{x \in X^J} |\Phi_J(x)| < \infty. \quad (2)$$

Для любых $I, V \in \mathcal{W}$, $I \subset V$ определим гиббсовские плотности

$$(q_V^{\bar{x}})_I(x) = \Xi_V^{-1}(\bar{x}) \int_{X_{V \setminus I}} \exp\{-U_V^{\bar{x}}(x \vee z)\} \, \mu_{V \setminus I}(dz), \quad x \in X^I, \ \bar{x} \in X^{Z^\nu \setminus V},$$

где

$$\Xi_V(\bar{x}) = \int_{X_V} \exp\{-U_V^{\bar{x}}(z)\} \, \mu_V(dz).$$

Предположим теперь, что существует последовательность возрастающих подмножеств V_k, $k = 1, 2 \ldots$, $\bigcup\limits_k V_k = Z^\nu$ и граничные условия $\bar{x}_k \in X^{Z^\nu \setminus V_k}$ такие, что для любых фиксированных $I \in \mathcal{W}$ и $x \in X^I$ существует предел

$$\lim_{k \to \infty} \left(q_{V_k}^{\bar{x}_k}\right)_I(x) = p_I(x).$$

Тогда совокупность конечномерных плотностей $\{p_I, I \in \mathcal{W}\}$ оказывается согласованной в смысле Колмогорова и, тем самым, определяется некоторое с.п., называемое *гиббсовским с.п.*, отвечающим потенциалу Φ.

Определение 6. Пусть потенциал Φ определен на $\bigcup_{J\in\mathcal{W}} X^J$, где $X \subset R^1$ симметрично относительно нуля. Назовем Φ *четным*, если для любых $V \in \mathcal{W}$, $x \in X_V$

$$\Phi_V(x_t, t \in V) = \Phi_V(\theta_t x_t, t \in V), \quad \theta_t \in \{-1, 1\}.$$

Утверждение 3. *Пусть Φ – четный потенциал, удовлетворяющий условию (2). Тогда совокупность гиббсовских с.п., соответсвующих этому потенциалу, не пуста; любое гиббсовское с.п. этой совокупности является мартингал–разностным.*

Доказательство. Существование гиббсовского с.п. при условии (2) хорошо известно (см, например, [9], [14]). Свойство же мартингал–разности следует из определения гиббсовского с.п. и конструкции А, поскольку в рассматриваемом случае плотности гиббсовских с.п. будут четными.

Приведем примеры четных потенциалов, удовлетворяющих условию (2).

а) $$\Phi_V(x_t, t \in V) = \begin{cases} \sup_{t\in V} \phi(x_t)(Diam\ V)^{-\gamma}, & |V| > 1, x_t \in X, t \in V, \gamma > \nu, \\ \phi(x_t), & |V| = 1, \quad t \in Z^\nu, \end{cases}$$

где $\phi(x)$, $x \in X$ есть некоторая четная функция такая, что $\sup_{x\in X} |\phi(x)| < \infty$.

б) $$\Phi_V(x_t, t \in V) = \begin{cases} \mu|x_t|, & |V| = 1,\ \mu > 0, \\ |x_t| \cdot |x_s| \cdot |t - s|^{-\gamma}, & |V| = 2,\ \gamma > \nu,\ x_t, x_s \in X. \\ 0, & |V| > 2. \end{cases}$$

в) Симметризованная модель Поттса. Пусть $X = \{-N, ..., -1, 0, 1, ..., N\}$

$$\delta_{t,s}(x_t, x_s) = \begin{cases} 1, & \text{если } x_t = x_s \text{ и } d(t,s) = 1, \\ 0, & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

где $x_t, x_s \in X$ и $d(t,s) = \max\limits_{1\le i\le\nu} |t^{(i)} - s^{(i)}|$. Положив

$$\Phi_{\{t,s\}} = \delta_{\{t,s\}}(x_t, x_s) + \delta_{\{t,s\}}(-x_t, x_s),$$

получаем четный потенциал.

г) Симметризованная модель ротаторов Шлосмана. Пусть $X = [-\pi, \pi]$ и λ – мера Лебега. Пусть

$$\phi_{t,s} = -\beta|t - s|^{-\gamma} \cos(y - x), \quad \gamma > \nu, \quad 0 < \beta < \infty.$$

Положив

$$\Phi_{\{t,s\}}(x, y) = \phi_{t,s}(x, y) + \phi_{t,s}(-x, y),$$

получаем четный потенциал.

В конце статьи мы рассматриваем модель с четным потенциалом

$$\Phi(x_t, x_s) = \begin{cases} |x_t| \cdot |x_s|, & d(t,s) = 1,\ x_t, x_s \in X = \{-1, 0, 1\},\ t, s \in Z^\nu \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}$$

и даем ее фазовую диаграмму.

Ниже мы описываем потенциалы гиббсовских с.п., основанные на идее конструкции Б. Пусть X – множество, описанное в конструкции Б, и пусть $f(x)$, $x \in X$ – некоторая функция такая, что $f(x) = a_j$, $x \in X_j$, $j = 1, ..., N$. Рассмотрим потенциал вида $\Phi_{\{t,s\}}(x, y) = f(x)f(y)$. Покажем, что гиббсовское с.п. с этим потенциалом – мартингал–разностное. Имеем

$$\sum_{x\in X} x q_t^{\bar{x}}(x) = \sum_{x\in X} x \exp\left[-f(x) \sum_{|\bar{x}-x|=1} f(\bar{x})\right] Z_t^{-1} =$$

$$= \sum_{j=1}^{N} \exp\left[-a_j \sum_{|\bar{x}-x|=1} f(\bar{x})\right] Z_t^{-1} \sum_{x\in X_j} x = 0,$$

$$Z_t = \sum_{x\in X} \exp\left[-f(x) \sum_{|\bar{x}-x|=1} f(\bar{x})\right].$$

§4. УСЛОВИЯ УБЫВАНИЯ КОРРЕЛЯЦИЙ ДЛЯ СЛУЧАЙНЫХ ПОЛЕЙ

В этом параграфе мы формулируем некоторые важные определения и одну теорему Добрушина [13] (см. также [30]), которые используются в дальнейшем. Пусть $\Omega = \{(x_t,\ t \in Z^\nu)\}$ – совокупность функций (реализаций), определенных на Z^ν, и $x_t \in X$, $X \subseteq R^1$. Пусть B – σ–алгебра, порожденная цилиндрическими множествами из Ω. Для любого $V \in \mathcal{W}$ через B^V обозначим σ–алгебру цилиндрических множеств с основанием в X^V. Существует группа сдвигов τ_a, $a \in Z^\nu$:

$$(\tau_a x)_t = x_{t+a}, \quad a \in Z^\nu, \quad x \in \Omega.$$

Обозначим через L σ–алгебру инвариантных подмножеств B : $L = \{A \in B : \tau_a A = A\}$.

Определение 7. Случайное поле ξ_t, $t \in Z^\nu$ с распределением P назовем *однородным (трансляционно–инвариантным)*, если для любых $A \in B$ и $a \in Z^\nu$ $P(\tau_a A) = P(A)$.

Определение 8. Случайное поле ξ_t, $t \in Z^\nu$ называется *эргодическим*, если его распределение P является тривиальным на L, т.е. при $A \in L$ вероятность $P(A)$ равна либо 0 либо 1.

В теории предельных теорем для с.п. используются различные критерии убывания корреляций. Мы будем использовать следующие.

Определение 9. Говорят, что с.п. ξ_t, $t \in Z^\nu$ с распределением P удовлетворяет *условию сильного перемешивания*, если

$$\sup\left\{|P(AB) - P(A)P(B)|, \quad A \in B^I,\ B \in B^V,\ |I| \le n,\ |V| \le m\right\} \le \alpha_{m,n}(d(I,V)),$$

$$I, V \in \mathcal{W}, \quad m, n \in N,$$

где $\alpha_{m,n}(d) \to 0$ при $d \to \infty$ и фиксированных m, n

$$d(I,V) = \inf_{t \in I, s \in V}\{|t - s|\}, \quad |t| = \max_{1 \le i \le \nu}\{|t^{(i)}|\}.$$

Определение 10. Говорят, что с.п. ξ_t, $t \in Z^\nu$ с распределением P удовлетворяет *условию равномерно сильного перемешивания*, если

$$sup\left\{|P(A|B) - P(A)|, \quad A \in B^I,\ B \in B^V,\ P(B) > 0\right\} \le \phi_I(d(I,V)),$$

где $\phi_I(d) \to \infty$ при $d \to \infty$ и фиксированном $I \in \mathcal{W}$.

Следующая лемма будет полезна нам в дальнейшем.

Лемма 1. *Пусть случайные величины X, Y измеримы относительно σ–алгебр B_I, B_V соответственно, $I, V \in \mathcal{W}$, и пусть*

$$E|X|^p < \infty, \quad |Y| < C \quad \text{п.н.}, \quad 0 < C < \infty.$$

Тогда существуют некоторые положительные константы $0 < A, B < \infty$ такие, что

$$|Cov(X,Y)| \le AE^{1/p}|X|^p \alpha_{m,n}^{1-1/p}(d(I,V)),$$

$$|Cov(X,Y)| \le BE^{1/p}|X|^p \phi_I(d(I,V)).$$

Доказательство этой леммы практически не отличается от доказательства аналогичной леммы в одномерном случае (см., например, [16], [25]).

Рассмотрим теперь двойную серию с.в.

$$X_{n,1}, X_{n,2}, ..., X_{n,k_n}, \quad k_n \to \infty \quad \text{при} \quad n \to \infty. \tag{3}$$

Введем следующее обозначение

$$F_{n,k} = \sigma(X_{n,j}, j = 1, ..., k), \quad \mu_{n,k} = E(X_{n,k}|F_{n,k-1}),$$

$$\sigma^2_{n,k} = E(X^2_{n,k}|F_{n,k-1}) - \mu^2_{n,k}, \quad S_{n,k} = \sum_{j=1}^{k} X_{n,j}, \quad k = 2, ..., k_n.$$

Будем говорить, что для серии (3) справедлива ЦПТ, если

$$\lim_{n\to\infty} P\left(S_{n,k_n} - \sum_{k=1}^{k_n} \mu_{n,k} < z\right) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{z} e^{-u^2/2}\, d(u), \quad z \in R^1.$$

Если для серии (3) выполняется равенство $\mu_{n,k} = 0$, $k = 2, ..., k_n$, $n = 1, 2, ...$ (п.н.), то будем говорить, что (3) – мартингал–разностная двойная серия.

Ниже $I(A)$ означает обычный индикатор множества A.

Теорема 1. *[Дворецкий]. Пусть $X_{n,1}, .., X_{n,k_n}$, $k_n \to \infty$ при $n \to \infty$ есть мартингал–разностная двойная серия. Если выполнены условия*

1) $\sum_{j=1}^{k_n} \sigma^2_{n,j} \to 1$ *по вероятности при* $n \to 0$ *;*

2) $\sum_{j=1}^{k_n} E(X^2_{n,j} I(|X| > \varepsilon)|F_{n,k_n-1}) \to 0$ *по вероятности при* $n \to 0$, $\varepsilon > 0$,

то для этой двойной серии справедлива ЦПТ.

§5. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

В этом разделе мы доказываем ЦПТ для мартингал–разностных с.п. и применяем ее к гиббсовскому с.п. Будем говорить, что для с.п. ξ_t, $t \in Z^\nu$, $E|\xi_t|^2 < \infty$ справедлива ЦПТ, если

$$\lim_{n\to\infty} P\big((S_{V_n} - E\, S_{V_n})(Var\, S_{V_n})^{-1/2} < z\big) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{z} e^{-u^2/2}\, d(u),$$

$$S_{V_n} = \sum_{t\in V_n} \xi_t, \quad V_n = \{t \in Z^\nu : |t| \le n\}, \quad n = 1, 2...$$

Теорема 2. *Для любого однородного эргодического мартингал–разностного с.п. ξ_t, $t \in Z^\nu$ с $0 < \sigma^2 = E\xi_0^2 < \infty$ справедлива ЦПТ.*

Доказательство. Пусть $p = p(n)$, $n \in N$ – некоторая функция, принимающая натуральные значения и такая, что $p(n) \to \infty$, $p(n) = o(n)$ при $n \to \infty$, и пусть $I_n(i) = [(i-1)p, ip]$ – некоторый интервал в Z^ν, $i = 1, ..., \hat{k} = [\frac{n}{p}]$. $[\cdot]$ – целая часть числа. Обозначим $I_n = \bigcup_{i=1}^{\hat{k}} I_n(i)$, и пусть I_n^ν – декартово произведение ν копий множества I_n. Понятно, что I_n есть объединение $k = \hat{k}^\nu$–мерных кубов $\Delta_{n,j}$, $j = 1, ..., k$ со стороной длины $p = p(n)$, т.е $I_n = \bigcup_{j=1}^{k} \Delta_{n,j}$. Последовательность с.в. $(\sigma n^{\nu/2})^{-1} S_{V_n \setminus I_n^\nu}$, $n = 1, 2, ...$ стремится к нулю при $n \to \infty$. Поэтому достаточно показать асимптотическую нормальность последовательности $(\sigma n^{\nu/2})^{-1} S_{I_n^\nu}$. Рассмотрим мартингал–разностную двойную серию

$$X_{n,j} = (\sigma n^{\nu/2})^{-1} S_{\Delta_{n,j}}, \quad j = 1, ..., k. \tag{4}$$

Наша цель – проверить справедливость условий теоремы 1 для (4). Имеем

$$\left|\sum_{j=1}^{k} \sigma_{n,j}^2 - 1\right| = \left|(\sigma^2 n^\nu)^{-1} \sum_{j=1}^{k} E(S_{\Delta_{n,j}}^2 | F_{n,j}) - 1\right| =$$

$$= \sigma^{-2} \left| n^{-\nu} \sum_{j=1}^{k} E\left(\sum_{t \in \Delta_{n,j}} \xi_t^2 | F_{n,j}\right) - \sigma^2 \right| \le$$

$$\le C_1 n^{-\nu} \sum_{j=1}^{k} |\Delta_{n,j}| E\left(\left| |\Delta_{n,j}|^{-1} \sum_{t \in \Delta_{n,j}} \xi_t^2 - \sigma^2 \right| |F_{n,j}\right).$$

Согласно многомерной эргодической теореме

$$E\left|\sum_{j=1}^{k} \sigma_{n,j}^2 - 1\right| \le C_2 E\left(\left| |\Delta_{n,j}|^{-1} \sum_{t \in \Delta_{n,j}} \xi_t^2 - \sigma^2 \right|\right) \to 0, \quad \text{при } n \to \infty.$$

Для проверки справедливости второго условия нам понадобятся следующие две леммы.

Лемма 2. *Пусть $X_1, ..., X_n$ – последовательность с.в и $f(x)$, $x \in R^1$, – некоторая функция, для которой $|f(X_j)| < C$, $j = 1, ..., n$. Тогда*

$$E\left(\sum_{j=1}^{n} (f(X_j) - E(f(X_j) | X_{j-1}, ..., X_1))\right)^4 \le 96 C^4 n^2.$$

Доказательство стандартно (см., например, [2], [30]).

Лемма 3. *Пусть ξ_t, $t \in Z^\nu$ – однородное мартингал–разностное с.п. и $E\xi_t^2 < \infty$. Тогда для любого множества $V \in \mathcal{W}$ и любых констант $A, N > 0$*

$$ES_V^2 I(|S_V| > A) \le 384 N^4 A^{-2} |V|^2 + |V| E\xi_0^2 I(|\xi_0| > N).$$

Доказательство. Представим с.в. ξ_t, $t \in V$ как $\xi_1, ..., \xi_{|V|}$. Поскольку ξ_t, $t \in Z^\nu$ – мартингал–разностное с.п., то для любого $i \in \{2, ..., |V|\}$ имеем

$$E(\xi_i | \xi_{i-1}, ..., \xi_1) = 0 \quad \text{п.н.}$$

Рассмотрим следующие с.в. :

$$\alpha_i^{(N)} = \xi_i^{(N)} - E(\xi_i^{(N)} | \xi_{i-1}, ..., \xi_1),$$

$$\beta_i^{(N)} = \xi_i^{(N)} - E(\bar{\xi}_i^{(N)} | \xi_{i-1}, ..., \xi_1), \quad i = 1, ..., |V|,$$

где

$$\xi_i^{(N)} = f_N(\xi_i), \quad \bar{\xi}_i^{(N)} = \xi_i - \xi_i^N, \quad f_N(x) = \begin{cases} x, & |x| \le N, \\ 0, & |x| > N. \end{cases}$$

Можем написать

$$\alpha_i^{(N)} + \beta_i^{(N)} = \xi_i^{(N)} + \bar{\xi}_i^{(N)} - E(\xi_i^{(N)} + \bar{\xi}_i^{(N)} | \xi_{i-1}, ..., \xi_1) =$$

$$= \xi_i - E(\xi_i | \xi_{i-1}, ..., \xi_1) = \xi_i, \quad i = 1, ..., |V|.$$

Следовательно

$$S_V = \sum_{t \in V} \xi_t = \sum_{i=1}^{|V|} \xi_i = \sum_{i=1}^{|V|} \alpha_i^{(N)} + \sum_{i=1}^{|V|} \beta_i^{(N)}.$$

Применяя неравенство

$$E(u+v)^2 I(|u+v| > A) \le 4 \left[Eu^2 I\left(|u| > \frac{A}{2}\right) + Ev^2 I\left(|v| > \frac{A}{2}\right)\right],$$

получим

$$ES_V^2 I(|S_V| > A) \le 4E\left(\sum_{i=1}^{|V|} \alpha_i^{(N)}\right)^2 I\left(\left|\sum_{i=1}^{|V|} \alpha_i^{(N)}\right| > \frac{A}{2}\right) +$$

$$+4E\left(\sum_{i=1}^{|V|} \beta_i^{(N)}\right)^2 I\left(\left|\sum_{i=1}^{|V|} \beta_i^{(N)}\right| > \frac{A}{2}\right).$$

Далее

$$E\left(\sum_{i=1}^{|V|}\alpha_i^{(N)}\right)^2 I\left(\left|\sum_{i=1}^{|V|}\alpha_i^{(N)}\right|>\frac{A}{2}\right)\leq 4A^{-2}E\left(\sum_{i=1}^{|V|}\alpha_i^{(N)}\right)^4.$$

Поскольку $|\xi_i^{(N)}|\leq N$, то согласно лемме 2

$$E\left(\sum_{i=1}^{|V|}\alpha_i^{(N)}\right)^2 I\left(\left|\sum_{i=1}^{|V|}\alpha_i^{(N)}\right|>\frac{A}{2}\right)\leq 384A^{-2}N^4|V|^2.$$

Для второго слагаемого имеем

$$E\left(\sum_{i=1}^{|V|}\beta_i^{(N)}\right)^2 I\left(\left|\sum_{i=1}^{|V|}\beta_i^{(N)}\right|>\frac{A}{2}\right)\leq E\left(\sum_{i=1}^{|V|}\beta_i^{(N)}\right)^2=\sum_{i=1}^{|V|}E(\beta_i^{(N)})^2\leq$$

$$\leq\sum_{i=1}^{|V|}E(\bar{\xi}_i^{(N)})^2=|V|E\xi_0^2I(|\xi_o|>N).$$

Лемма доказана.

Проверим теперь условие 2) теоремы 1. Имеем

$$\sum_{j=1}^{k}EX_{n,j}^2I(|X_{n,j}|>\varepsilon)\leq 384\sigma^{-2}n^{-\nu}\times$$

$$\times\sum_{j=1}^{k}[N^4\varepsilon^{-2}n^{-\nu}|\Delta_{n,j}|^2+|\Delta_{n,j}|E\xi_0^2I(|\xi_0^2|>N)]\leq$$

$$\leq C_2[p^\nu n^{-\nu}N^4+E\xi_0^2I(|\xi_0|>N)].$$

Получаем 2), так как $p=o(n)$ при $n\to\infty$. Теорема 2 доказана.

Далее рассмотрим неоднородные с.п.

Теорема 3. *Пусть мартингал–разностное с.п. ξ_t, $t\in Z^\nu$ таково, что $E|\xi_t|^\gamma<$ $<C<\infty$, $\gamma>2$ и $\inf_t\ Var\ \xi_t=\sigma^2>0$. Если, кроме того, ξ_t, $t\in Z^\nu$ удовлетворяет условию сильного перемешивания и $\alpha_{m,n}(r)<f(m)\alpha(r)$, где $\alpha(r)\to 0$ при $r\to\infty$ и $f(m)$, $m\in N$, – произвольная функция, то для ξ_t справедлива ЦПТ.*

Прежде всего докажем следующую лемму, пользуясь обозначением

$$I_{n,j}=E(S_{\Delta_{n,j}}^2|S_{\Delta_{n,k}},\ k=1,...,j-1)-ES_{\Delta_{n,j}}^2,\quad j=1,...k_n.$$

Лемма 4. *Пусть V_n, $n = 1, 2, ...$ – последовательность ν-мерных кубов. Пусть для каждого n $V_n = \bigcup_{j=1}^{k_n} \Delta_{n,j}$, $\Delta_{n,j} \cap \Delta_{n,k} = \emptyset$, $k \neq j$ и $n^{-\nu} \max_{1 \le j \le k_n} |\Delta_{n,j}| \to 0$ при $n \to \infty$. В условиях теоремы 3 и дополнительных условиях*

$$1) \qquad E|S_{\Delta_{n,j}}|^\gamma \le C|\Delta_{n,j}|^{\gamma/2}, \quad 0 < C < \infty,$$

$$2) \qquad \lim_{n\to\infty} n^{-\nu} \sum_{j=1}^{k_n} Cov\,(S^2_{\Delta_{n,j}},\ sgn\ I_{n,j}) = 0$$

для любого $u \in R^1$ имеем

$$\lim_{n\to\infty} P((Var\ S_{V_n})^{-1/2} S_{V_n} < u) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{u} e^{-u^2/2}\, du.$$

Доказательство. Для двойной серии с.в.

$$X_{n,k} = (Var\ S_{V_n})^{-1/2} S_{\Delta_{n,k}}, \quad k = 1, ..., k_n$$

проверим выполнение условий теоремы 1. Имеем

$$\left|\sum_{j=1}^{k_n} \sigma^2_{n,j} - 1\right| \le C_1 n^{-\nu} \sum_{j=1}^{k_n} \left| E(S^2_{\Delta_{n,j}} | S_{\Delta_{n,k}},\ k = 1, ..., j-1) - ES^2_{\Delta_{n,j}} \right|.$$

Далее

$$E\left|\sum_{j=1}^{k_n} \sigma^2_{n,j} - 1\right| \le C_1 n^{-\nu} \sum_{j=1}^{k_n} E\left| E(S^2_{\Delta_{n,j}} | S_{\Delta_{n,k}},\ k = 1, ..., j-1) - ES^2_{\Delta_{n,k}} \right| =$$

$$= C_1 n^{-\nu} \sum_{j=1}^{k_n} Cov(S^2_{\Delta_{n,j}},\ \mathrm{sgn}\ I_{n,j}) = 0.$$

Для проверки второго условия применим условие 1) леммы. В результате получим

$$\sum_{j=1}^{k_n} EX^2_{n,j} I(|X_{n,j}| > \varepsilon) = (Var\ S_{V_n})^{-1} \sum_{j=1}^{k_n} ES^2_{\Delta_{n,j}} I(|S_{\Delta_{n,j}}| > \varepsilon (Var\ S_{V_n})^{1/2}) \le$$

$$\le C_2 (Var\ S_{V_n})^{-1} (Var S_{V_n})^{(2-\gamma)/2} \sum_{j=1}^{k_n} E|S_{\Delta_{n,j}}|^\gamma \le C_3 n^{-\nu\gamma/2} \sum_{j=1}^{k_n} |\Delta_{n,j}|^{\gamma/2} \le$$

$$\le C_3 n^{-\nu\gamma/2} \left(\max_{1 \le j \le k_n} |\Delta_{n,j}|^{\gamma/2 - 1} \right) \sum_{j=1}^{k_n} |\Delta_{n,j}| \le C_3 n^{-\nu(\gamma/2-1)} \times$$

$$\times\left(\max_{1\le j\le k_n}|\Delta_{n,j}|\right)^{\gamma/2-1}\le C_3\left(n^{-\nu}\max_{1\le j\le k_n}|\Delta_{n,j}|\right)^{\gamma/2-1}\to 0\quad\text{при } n\to\infty.$$

Лемма доказана.

Доказательство теоремы 3. Рассмотрим функции $p=p(n)$ и $q=q(n)$, $n\in N$, принимающие натуральные значения, причем $p(n)=o(n)$, $q(n)=o(p)$ при $n\to\infty$. Обозначим $k_n=\left[\frac{n}{p+q}\right]$, $n=1,2,\ldots$ и

$$U_{n,j}=\{t\in V_n: pj+qj<t^{(1)}\le p(j+1)+qj\};$$

$$Q_{n,j}=\{t\in V_n: p(j+1)+qj<t^{(1)}\le p(j+1)+q(j+1)\},$$

$$j=-(k-1),\ldots,-1,0,1,\ldots,k-1;$$

$$Q_{n,k}=\{t\in V_n: pk+qk<t^{(1)}\le n\};$$

$$Q_{n,-k}=\{t\in V_n: -n<t^{(1)}\le -pk-qk\}.$$

Таким образом

$$V_n=\bigcup_{j=-(k-1)}^{k-1}U_{n,j}+\bigcup_{j=-(k-1)}^{k-1}Q_{n,j}+Q_{n,k}+Q_{n,-k}.$$

Введем обозначения

$$Y_{n,j}=\sum_{t\in U_{n,j}}\xi_t,\quad Z_{n,j}=\sum_{t\in Q_{n,j}}\xi_t,\quad j=-(k-1),\ldots,0,\ldots,k-1;$$

$$S_n^U=\sum_{j=-(k-1)}^{k-1}Y_{n,j},\quad S_n^Q=\sum_{j=-(k-1)}^{k-1}Z_{n,j}.$$

Отсюда имеем $S_{V_n}=S_n^U+S_n^Q$. Поскольку последовательность $(Var\,S_{V_n})^{-1/2}S_n^Q$, $n=1,2,\ldots$ по вероятности стремится к нулю, то остается доказать асимптотическую нормальность последовательности $(VarS_{V_n})^{-1/2}S_n^U$, $n=1,2,\ldots$. Для мартингал–разностной двойной серии

$$X_{n,j}=(Var\,S_{V_n})^{-1/2}Y_{n,j},\quad j=1,\ldots,k_n$$

проверим выполнение условий леммы 4. Согласно лемме

$$E|Y_{n,j}|^\gamma\le C|U_{n,j}|^{\gamma/2},\quad j=1,\ldots,k_n,\quad \gamma>2.$$

Далее, пользуясь леммой 1, имеем

$$n^{-\nu}\sum_{j=-(k-1)}^{k-1} Cov(Y_{n,j}^2,\ \mathrm{sgn}\ I_{n,j}) \le n^{-\nu}\sum_{j=-k-1}^{k-1} |EY_{n,j}^2\ \mathrm{sgn}\ I_{n,j} - EY_{n,j}^2 E\ \mathrm{sgn}\ I_{n,j}| \le$$

$$\le n^{-\nu}\sum_{j=-(k-1)}^{k-1}\sum_{t\in U_{n,j}} |E\xi_t^2\ \mathrm{sgn}\ I_{n,j} - E\xi_t^2 E\ \mathrm{sgn}\ I_{n,j}| \le$$

$$\le n^{-\nu}C_1 f(1)\alpha^{1-\gamma/2}(q(n))\sum_{-(k-1)}^{k-1} |U_{n,j}|E^{2/\gamma}|\xi_t|^\gamma \le C_2\alpha^{1-2/\gamma}(q) \to 0 \quad \text{при} \quad n\to\infty.$$

Теорема 3 доказана.

Для с.п., удовлетворяющих условию равномерно сильного перемешивания, требования на моменты можно ослабить.

Теорема 4. *Пусть ξ_t, $t\in Z^\nu$ – мартингал-разностное с.п. такое, что семейство с.в. ξ_t^2, $t\in Z^\nu$ равномерно интегрируемо и $\inf_{t\in Z^\nu} E\xi_t^2=\sigma^2>0$. Если ξ_t, $t\in Z^\nu$ обладает свойством равномерно сильного перемешивания и $\phi_V(d)\le f(|V|)\phi(d)$, где $\phi(d)\to 0$ при $d\to\infty$, а $f(x)$, $x\in R_+^1$ – произвольная функция, то для ξ_t, $t\in Z^\nu$ справедлива ЦПТ.*

Доказательство этой теоремы мы приводить не будем, оно вполне аналогично доказательству предыдущей теоремы.

Применим теперь полученные результаты к гиббсовским с.п.

Теорема 5. *Для любого трансляционно-инвариантного эргодического гиббсовского с.п. ξ_t, $t\in Z^\nu$ с четным потенциалом и $0<E\xi_0^2<C<\infty$ справедлива ЦПТ.*

Теорема 6. *Пусть гиббсовское с.п. ξ_t, $t\in Z^\nu$ соответствует четному потенциалу с достаточно малой нормой (2) и $0<\sigma<E\xi_t^2<\infty$. Тогда для ξ_t, $t\in Z^\nu$ справедлива ЦПТ.*

ABSTRACT. The paper studies random fields on the lattice Z^ν, $\nu>1$ that have martingale-difference property and proves several limit theorems. The results may have useful applications in the theory of Gibbs random fields.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. А. Аверинцев, "Описание марковских случайных полей с помощью гиббсовских условных вероятностей", Теор. вер. и ее прим., т. 17, стр. 20 – 33, 1972.
2. P. Billigsley, Convergence of Probability Measures, Wiley, NY, 1968.
3. P. Billingsley, "The Lindeberg-Levy theorem for martingales", Proc. Amer. Math. Soc., vol. 12, pp. 788 – 792, 1961.
4. E. Bolthausen, "On the central limit theorem for stationary mixing random fields", Ann. Prob., vol. 10, pp. 1047 – 1050, 1982.
5. B. Brown, "Martingale central limit theorem", Ann. Math. Statist., vol. 42, pp. 59 – 66, 1971.
6. А. В. Булинский, И. Г. Журбенко, "Центральная предельная теорема для аддитивных случайных функций", Теор. вер. и ее прим., т. 20, стр. 707 – 717, 1986.
7. R. Cairoly, J. Walsh, "Stochastic integrals in the plane", Acta Math., vol. 134, pp. 111 – 183, 1975.
8. Y. S. Chow, "Martingales in a σ-finite measure space indexed by directed sets", Trans. Amer. Math. Soc., vol. 97, pp. 254 – 286, 1960.
9. Р. Л. Добрушин, "Гиббсовские случайные поля для решетчатых систем с попарным взаимодействием", Функц. анализ и его прилож., т. 2, вып. 4, стр. 31 – 43, 1968.
10. Р. Л. Добрушин, "Задача единственности гиббсовского случайного поля и проблема фазовых переходов", Функц. анализ и его прилож., т. 2, вып. 4, стр. 44 – 57, 1968.
11. R. L. Dobrushin, "The description of a random field by means of conditional probabilities and conditions of its regularity", Th. Prob. Appl., vol. 13, pp. 197 – 224, 1968.
12. R. L. Dobrushin, "Gaussian random fields-Gibbsian point of view", In : R. L. Dobrushin, Ya. G. Sinai (eds.) : Multicomponent Random Systems (Adv. in Prob. and Related Topics, vol. 6), Dekker, NY, 1980.
13. A. Dvoretsky, "Asymptotic normality for sums of dependent random variables", In : Proc. 6th Berkeley Symp. on Math. Stat. and Probab., vol. 2, pp. 513 – 535, Univ. California Press, 1972.
14. H.–O. Georgii, Gibbs Measures and Phase Transitions, de Gruyter, Berlin, New York, 1988.
15. I. A. Ibragimov, "Central limit theorem for a class of dependent random variables", Th. Prob. Appl., vol. 8, pp. 83 – 89, 1963.
16. I. A. Ibragimov, Yu. A. Linnik, Independent and Stationary Sequences of Random Variables, Walters–Noordoff, Groningen, 1977.
17. J. Jacod, A. N. Shiryaev, Limit Theorems for Stochastic Processes, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1987.
18. K. Krikeberg, "Convergence of martingales with directed index set", Trans. Amer. Math. Soc., vol. 83, pp. 313 – 337, 1956.
19. H. Künsch, "Gaussian Markov random fields", J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sec. 1A Math., vol. 26, pp. 53 – 73, 1979.
20. Р. Ш. Липцер, А. Н. Ширяев, Теория Мартингалов, Москва, Наука, 1986.
21. Д. Г. Мартиросян, "Фазовые переходы для мартингал–разностных гиббсовских решетчатых моделей", Изв. НАН Армении, Математика, т. 29, № 3, стр. 76 – 80, 1994.
22. R. A. Minlos, "Limiting Gibbs distribution", Funct. Anal. Appl., vol. 1, pp. 140 – 150 & 206 – 217, 1967.

23. B. S. Nahapetian, "The central limit theorem for random fields with mixing property", In : R. L. Dobrushin, Ya. G. Sinai (eds.) : Multicomponent Random Systems (Adv. in Prob. and Related Topics, vol. 6), Dekker, NY, 1980.
24. Б. С. Нахапетян, "Об одном подходе к доказательству предельных теорем для зависимых случайных величин", Теор. вер. и ее примен., т. 32, стр. 535 – 539, 1987.
25. B. S. Nahapetian, Limit Theorems and Some Applications in Statistical Physics, Teubner-Texte zur Math., vol. 123, Stuttgart–Leipzig, 1991.
26. B. S. Nahapetian, A. N. Petrosian, "Martingale-difference Gibbs random fields and central limit theorem", Ann. Acad. Sci. Fennicae, Ser.A.I. Math., vol. 17, pp. 105 – 110, 1992.
27. B. S. Nahapetian, "Billingsley-Ibragimov theorem for martingale-difference random fields and its applications to some models of classical statistical physics", C. R. Acad. Sci. Paris, vol. 320, ser.I, pp. 1539 – 1544, 1995.
28. C. J. Preston, "Generalized Gibbs states and Markov random fields", Adv. Appl. Prob., vol. 5, pp. 242 – 261, 1973.
29. S. Sherman, "Markov random fields and Gibbs random fields", Israel J. Math., vol. 14, pp. 92 – 103, 1973.
30. A. N. Shiryaev, Probability. Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1984.
31. Ya. G. Sinai, Theory of Phase Transitions : Rigorous Results. Pergamon Press, Oxford ; Akademiai Kiado, Budapest, 1982.
32. F. Spitzer, "Markov random fields and Gibbs ensembles", Am. Math. Monthly, vol. 78, pp. 142 – 154, 1971.
33. W. G. Sullivan, "Potentials for almost Markovian random fields", CMP, vol. 33, pp. 61 – 74, 1973.
34. H. Takahata, "On the central limit theorem for weakly dependent random fields", Yokohama Math. J., vol. 31, pp. 67 – 77, 1983.

19 сентября 1995

Институт математики
НАН Армении