МЕТОД КОНСТРУКТИВНОГО ПОСТРОЕНИЯ ФАКТОРИЗАЦИИ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА МАТРИЦ-ФУНКЦИЙ

А. Г. Камалян, В. А. Оганян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 28, №3, 1993

В работе предлагается метод эффективной факторизации Винера-Хопфа для матриц-функций вида FUF^{-1}, где F - рациональная матрица-функция, а факторизация матрицы-функции U известна. Построены явные формулы факторизации относительно замкнутого контура. Эти формулы приведены в терминах базисов ядер конечного числа операторов, действующих в конечномерных пространствах. Получены также формулы для частных индексов.

§0. ВВЕДЕНИЕ

Пусть Γ - положительно ориентированный, спрямляемый замкнутый жордановый контур в комплексной плоскости $\mathbf{C}$, ограничивающий область D_+ $(0 \in D_+)$. Дополнение $D_+ \cup \Gamma$ в плоскости $\mathbf{C} \cup \{\infty\}$ обозначим через D_-.

Пусть I - единичный оператор, а S - оператор сингулярного проектирования вдоль Γ, действующий в пространстве L_p $(L_p = L_p(\Gamma),\ 1 < p < \infty)$:

$$(S\varphi)(t) = \frac{1}{i\pi} v.p. \int_\Gamma \frac{1}{\tau - t} \varphi(\tau)\, d\tau, \quad \varphi \in L_p.$$

Относительно контура Γ дополнительно будем предполагать, что оператор S ограничен в пространствах L_p. Как известно, этому предположению удовлетворяют в частности гладкие и слабо липшицевы контуры. Полное описание таких контуров можно найти в [1].

Введем проекторы $P_\pm = 1/2(I \pm S)$ и классы функций $L_p^+ = P_+ L_p$, $L_p^- = P_- L_p + \mathrm{const}$. В дальнейшем, множество n-мерных векторов (матриц порядка $n \times n$) с элементами из класса L будем обозначать через $L^n (L^{n\times n})$. Пусть $\mathcal{R}$ - алгебра рациональных функций с полюсами вне Γ. Для любой алгебры A с единицей через GA будем обозначать группу обратимых элементов алгебры A.

Напомним, что *правой обобщенной факторизацией Винер-Хопфа* (или просто правой обобщенной факторизацией) относительно контура Γ матрицы-функции $W \in GL_\infty^{n\times n}$ в пространстве L_p является представление

$$W(t) = W_-(t)\Lambda_W W_+(t), \quad t \in \Gamma, \tag{1}$$

где

(i) $W_+ \in [L_q^+]^{n\times n}$ $(q = p/(p-1))$, $W_+^{-1} \in [L_p^+]^{n\times n}$, $W_- \in [L_p^-]^{n\times n}$, $W_-^{-1} \in \in [L_q^-]^{n\times n}$, $\Lambda_W(t) = \operatorname{diag}[t^{\kappa_1}, \ldots, t^{\kappa_n}]$, а числа $\kappa_1 \geq \cdots \geq \kappa_n$ называемые *правыми частными индексами* W являются целыми.

(ii) Оператор $W_- P_+ W_-^{-1}$ ограничен в L_p^n.

Если все частные индексы равны нулю, то факторизация называется *канонической*. Число $\kappa = \kappa_1 + \cdots + \kappa_n$ назовем *суммарным индексом* W. Для непрерывных матриц-функций W число κ равно индексу Коши $\det W$: $\kappa = \operatorname{ind}_\Gamma \det W$.

Левая обобщенная факторизация определяется аналогично. Все результаты, полученные в этой работе, могут быть перенесены на случай левой обобщенной факторизации как независимо (см. Замечание 6), так и с использованием обычных связей между правой и левой факторизацией [2, 3]. Так как в дальнейшем мы будем рассматривать только правую обобщенную факторизацию, то условимся опускать термины "правая" и "обобщенная".

Введем оператор $T(W) = P_+W + P_-$. В дальнейшем мы неоднократно будем пользоваться одним результатом И. Б. Симоненко (см. [2, 3]) :

Теорема S. *Оператор $T(W)$, действующий в L_p^n $(1 < p < \infty)$, является фредгольмовым тогда и только тогда, когда матрица-функция W допускает факторизацию в пространстве L_p. При выполнении этого условия*

$$\dim \operatorname{Ker} T(W) = -\sum_{\kappa_i<0} \kappa_i, \qquad \dim \operatorname{Coker} T(W) = \sum_{\kappa_i\geq 0} \kappa_i, \qquad \operatorname{Ind} T(W) = -\kappa.$$

Эффективные критерии существования факторизации известны для широкого класса матриц-функций [2, 3]. В скалярном случае факторы $W_\pm$ можно найти в явном виде с помощью проекторов $P_\pm$. Однако в матричном случае $(n > 1)$ эффективные методы факторизации известны лишь для некоторых специальных классов матриц-функций (в частности, треугольных [2, 3]) и функционально-коммутативных матриц-функций [3]).

Еще более узок класс матриц-функций, для которых в замкнутой форме построены факторизационные факторы и найдены формулы для частных индексов. Наиболее завершенные результаты были в этом направлении получены для матриц-функций, допускающих мероморфное продолжение в области Γ_+ [6 - 8].

В данной работе исследуется класс матриц-функций вида

$$W = FUF^{-1}, \quad F \in G\mathcal{R}^{n\times n}, \tag{2}$$

где факторизация матрицы-функции U предполагается известной. Возможность эффективной факторизации для таких матриц-функций, основанной на использовании метода "отщепления нулей" Ф. Д. Гахова [9], подчеркнута в работе [10]. Но в силу своего алгоритмического характера этот метод не позволяет в явном виде вычислить частные индексы и строить факторизацию.

Предложенный здесь метод позволяет вычислить частные индексы W в терминах размерностей ядер конечного семейства операторов, действующих в конечномерных пространствах, явный вид которых восстанавливается с помощью матриц-функций F и факторизационных факторов U (см. §3). Факторы W строятся с помощью базисов ядер этих операторов (см. §4). Получены также эффективные критерии канонической факторизации и устойчивости частных индексов W (см. §3). Метод основан на одном операторном тождестве (§1), выраженном в форме матричного сцепления (matrical coupling) [11]. Это тождество позволяет свести исследование фредгольмовых характеристик оператора $T(W)$ свести к изучению конечномерного оператора, действующего на конечномерном пространстве (см. §2). Ранее, подобный подход был использован в работе [12], где построена каноническая факторизация матрицы-функции, известная под названием Храпкова-Даниэля (см. §5). В §5 приведены также примеры матриц-функций W, допускающих представление (2), и интересных с точки зрения приложения.

§1. ПРИЛОЖЕНИЕ МЕТОДА МАТРИЧНОГО СЦЕПЛЕНИЯ

Пусть $A : X_1 \longmapsto Y_1$ и $B : Y_2 \longmapsto X_2$ - линейные ограниченные операторы, действующие в соответствующих банаховых пространствах. Операторы A и B называют ***матрично сцепленными***, если существует обратимый матричный оператор

$$\Phi = \begin{pmatrix} A & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} : \quad X_1 \times X_2 \longmapsto Y_1 \times Y_2,$$

обратный которого имеет вид

$$\Psi = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B \end{pmatrix} : \quad Y_1 \times Y_2 \longmapsto X_1 \times X_2,$$

Оператор B называют ***индикатором*** A, а равенство $\Phi^{-1} = \Psi$ - ***соотношением сцепления*** операторов A и B. Определение и свойства матричного сцепления даны в работе [11]. Там, в частности, доказывается, что образ, ядро и обратный оператор (и другие фредгольмовы характеристики) оператора A могут быть выражены в явном виде с помощью элементов соотношения сцепления и соответствующих объектов индикатора B. Здесь мы приведем одну частную реализацию этого метода, имеющую важное значение для дальнейшего.

Лемма 1. *Пусть X_1, X_2 - банаховы пространства, $T : X_1 \longmapsto X_2$, $K : X_1 \longmapsto X_2$ - линейные ограниченные операторы. Предположим, что оператор T обладает обобщенным обратным $T^{(-1)}$ (т.е. $T = TT^{(-1)}T$, $T^{(-1)} = T^{(-1)}TT^{(-1)}$), а оператор K нормально разрешим. Далее, пусть $Y_1 = Im\ K \times\ Ker\ T$ $Y_2 = Im\ K \times\ Ker\ T^{(-1)}$, $A : Y_1 \longmapsto Y_2$ - линейный оператор, действующий следующим образом :*

$$A = \begin{pmatrix} (I - KT^{(-1)})|_{\mathrm{Im}\ K} & -K|_{\mathrm{Ker}\ T} \\ (I - TT^{(-1)})|_{\mathrm{Im}\ K} & 0 \end{pmatrix}, \tag{3}$$

где I - тождественный оператор на X_2. Тогда операторы $T - K$ и A матрично сцеплены.

Доказательство. Введем следующие операторы :

$$B_1 = (\,-I|_{\mathrm{Im}\ K} \quad I|_{\mathrm{Ker}\ T^{(-1)}}\,) : \quad Y_2 \longmapsto X_2,$$

$$B_2 = \begin{pmatrix} K \\ I - T^{(-1)}T \end{pmatrix} : \quad X_1 \longmapsto Y_1,$$

$$B_3 = \begin{pmatrix} I_{\mathrm{Im}\,K} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : \quad Y_2 \longmapsto Y_1,$$

$$C_1 = T^{(-1)} : \quad X_2 \longmapsto X_1, \qquad C_2 = (\,T^{(-1)}|_{\mathrm{Im}\,K} \quad I|_{\mathrm{Ker}\,T}\,) : \quad Y_1 \longmapsto X_1,$$

$$C_3 = \begin{pmatrix} -KT^{(-1)} \\ I - TT^{(-1)} \end{pmatrix} : \quad X_2 \longmapsto Y_2.$$

Непосредственной проверкой нетрудно убедиться в равенстве

$$\begin{pmatrix} T-K & B_1 \\ B_2 & B_3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & A \end{pmatrix}.$$

Последнее равенство является соотношением сцепления. Лемма доказана.

Из Леммы 1 и Теорем 1.1 и 1.2 работы [11] следует

Теорема 1. *В условиях Леммы 1 оператор $T - K$ имеет обобщенный обратный (соответственно, левый, правый, двусторонний) тогда и только тогда, когда A имеет обобщенный обратный (соответственно, левый, правый, двусторонний). Если $A^{(-1)}$ - обобщенный обратный к A, то*

$$(T-K)^{(-1)} = C_1 - C_2 A^{(-1)} C_3$$

является обобщенным обратным к $T - K$. Далее, $T - K$ - (полу)фредгольмов тогда и только тогда, когда (полу)фредгольмов оператор A, в этом случае

$$\dim \mathrm{Ker}\,(T-K) = \dim \mathrm{Ker}\,A, \quad \dim \mathrm{Coker}\,(T-K) = \dim \mathrm{Coker}\,A,$$

$$Ker\,(T-K) = C_2(\,Ker\,A), \qquad \mathrm{Im}\,(T-K) = C_3^{-1}\ Im\,A.$$

Замечание 1. Теорема 1 представляет особый интерес в случае, когда K - конечномерный оператор. В этом случае индикатор A также является конечномерным. Если одновременно оператор T фредгольмов, то A действует из одного конечномерного пространства в другое. Таким образом, Теорема 1 позволяет восстанавливать обобщенный обратный, ядро и образ фредгольмова оператора при конечномерном возмущении с помощью решения одной конечной алгебраической системы. Следует отметить, что результаты такого рода встречаются у многих авторов (см. [12, 13]). В частности, в работе [12] при дополнительном предположении, что T - фредгольмов оператор с нулевым индексом, а K - конечномерный оператор, исследование оператора $T - K$ сводится к оператору, совпадающему с A, заданному в виде (3). Применение метода сцепления позволяет не только освободиться от дополнительных предположений, но и сильно упростить доказательство.

§2. ТЕОРЕМА ОБ ОБОБЩЕННОМ ОБРАТНОМ

Предположим, что матрица-функция $U \in GL_\infty^{n\times n}$ допускает факторизацию $U = U_-\Lambda_U U_+$ в пространстве L_p $(1 < p < \infty)$, $\Lambda_U = \operatorname{diag}[t^{\kappa_1}, ..., t^{\kappa_n}]$, $F \in G\mathcal{R}^{n\times n}$, а матрица-функция $W \in L_\infty^{n\times n}$ определена равенством (2). Обозначим матрицы-функции $t^{-j}U$, $t^{-j}W$ $(j \in \mathbb{Z})$ через U_j, W_j, соответственно (в частности, $U_0 \equiv U$, $W_0 \equiv W$). Из равенств

$$T(W_j) = F(P_+U_j + P_-)F^{-1} + (P_-F - FP_-)F^{-1} + (P_+F - FP_+)U_jF^{-1}, \quad j \in \mathbb{Z}$$

следует справедливость представлений

$$T(W_j) = FT(U_j)F^{-1} - K_j, \quad j \in \mathbb{Z}, \tag{4}$$

где операторы K_j определены равенством

$$K_j = \frac{1}{2}(FS - SF)(U_j - I)F^{-1}, \quad j \in \mathbb{Z}. \tag{5}$$

Так как $FS - SF$ является конечномерным, то конечномерными являются также операторы K_j $(j \in \mathbb{Z})$. Если представить матрицу-функцию F в виде

$$F(t) = \sum_{k=0}^{m_0} F_{0k}t^k + \sum_{i=1}^{s}\sum_{k=1}^{m_i} F_{ik}\frac{1}{(t-\lambda_i)^k}, \qquad F_{00}, F_{ik} \in \mathbf{C}^{n\times n},$$
$$i = 0, 1, ..., s; \quad k = 1, ..., m_i,$$

то

$$K_jy = \sum_{l=0}^{m_0-1} t^l\Phi_{0l}^{(j)}y + \sum_{i=1}^{s}\sum_{l=1}^{m_i}\frac{1}{(t-\lambda_i)^l}\Phi_{il}^{(j)}y, \quad y \in L_p^n, \quad j \in \mathbb{Z},$$

где $\Phi_{0l}^{(j)} : L_p^n \longmapsto \mathbf{C}^n$ $(l = 0, 1, ..., m_0 - 1)$ и $\Phi_{il}^{(j)} : L_p^n \longmapsto \mathbf{C}^n$ $(l = 0, 1, ..., m_i$; $i = 1, ..., s)$ гомоморфизмы определенные по формулам :

$$\Phi_{0l}^{(j)}y = -\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \sum_{k=l+1}^{m_0} F_{0k}\tau^{k-l-1}(U_j(\tau) - I)F^{-1}(\tau)y(\tau)\,d\tau,$$

$$\Phi_{il}^{(j)}y = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \sum_{k=l}^{m_i} \frac{1}{(\tau-\lambda_i)^{k-l+1}} F_{ik}(U_j(\tau)-I)F^{-1}(\tau)y(\tau)\,d\tau.$$

В силу Теоремы S, $FT(U_j)F^{-1}$ фредгольмов и, следовательно, обладает обобщенным обратным. Из представлений

$$FT(U_j)F^{-1} = F(P_+U_- + P_-U_+^{-1})(P_+t^{-j}\Lambda_U + P_-)U_+F^{-1} \tag{6}$$

следует, что $[FT(U_j)F^{-1}]^{(-1)}$ может быть найдена по формуле

$$C_1^{(j)} = [FT(U_j)F^{-1}]^{(-1)} = FU_+^{-1}(P_+t^j\Lambda_U^{-1} + P_-)(P_+U_-^{-1} + P_-U_+)F^{-1}, \quad j \in \mathbb{Z}. \tag{7}$$

Пусть Ω_j и Ξ_j - ядра операторов $FT(U_j)F^{-1}$ и $C_1^{(j)}$ ($j \in \mathbb{Z}$), соответственно. Как видно из равенства (6) пространство Ω_j ($j \in \mathbb{Z}$) совпадает с множеством вектор-функций вида $FU_+^{-1}q$, где $q = \mathrm{col}\,[q_1, ..., q_n]$, а q_i ($i = 1, ..., n$) - произвольный многочлен степени не более $j - \kappa_i - 1$ и тождественно равный нулю при $\kappa_i \geq j$. Аналогично, из равенств (7) следует, что пространство Ξ_j ($j \in \mathbb{Z}$) совпадает с множеством вектор-функций FP_+U_-q, где $q = \mathrm{col}\,[q_1, ..., q_n]$, а q_i ($i = 1, ..., n$) - многочлен степени не более $\kappa_i - j - 1$ и тождественно равный нулю при $\kappa_i \leq j$.

Как известно, оператор π_j, определенный равенством

$$\pi_j = I - FT(U_j)F^{-1}C_1^{(j)}, \quad j \in \mathbb{Z}, \tag{8}$$

является конечномерным проектором, см. [5]. Это утверждение легко следует из также конечномерности оператора $P_+t^{-j}\Lambda_U P_-$ и соотношения

$$\pi_j = FP_+U_-P_+t^{-j}\Lambda_U P_-(t^j\Lambda_U^{-1} - I)(P_+U_-^{-1} + P_-U_+)F^{-1}.$$

Введем операторы :

$$\begin{gathered} C_2^{(j)} = \begin{pmatrix} C_1^{(j)} & I \end{pmatrix} : \quad \mathrm{Im}\,K_j \times \Omega_j \longmapsto L_p^n, \\ C_3^{(j)} = \begin{pmatrix} -K_jC_1^{(j)} \\ \pi_j \end{pmatrix} : \quad L_p^n \longmapsto \mathrm{Im}\,K \times \Xi_j, \quad j \in \mathbb{Z}, \end{gathered} \tag{9}$$

$$\begin{gathered} A_1^{(j)} = (I - K_jC_1^{(j)}) : \quad \mathrm{Im}\,K_j \longmapsto \mathrm{Im}\,K_j, \\ A_2^{(j)} = -K_j : \quad \Omega_j \longmapsto \mathrm{Im}\,K_j, \\ A_3^{(j)} = \pi_j : \quad \mathrm{Im}\,K_j \longmapsto \Xi_j, \quad j \in \mathbb{Z}, \end{gathered} \tag{10}$$

$$A_j = \begin{pmatrix} A_1^{(j)} & A_2^{(j)} \\ A_3^{(j)} & 0 \end{pmatrix} : \quad \mathrm{Im}\,K_j \times \Omega_j \longmapsto \mathrm{Im}\,K_j \times \Xi_j, \quad j \in \mathbb{Z}. \tag{11}$$

Из представлений (4), Теоремы S и Теоремы 1 немедленно следует

Теорема 2. *Пусть* $F \in G\mathcal{R}^{n\times n}$, $U \in GL_\infty^{n\times n}$ *и* $W = FUF^{-1}$. *Матрицы-функции* W_j $(j \in \mathbb{Z})$ *допускают факторизацию в* L_p $(1 < p < \infty)$ *и операторы* $T(W_j)$ *фредгольмовы в* L_p *тогда и только тогда, когда матрица-функция* U *допускает факторизацию в пространстве* L_p. *Если представление* $U = U_-\Lambda_U U_+$ *является факторизацией* U *в пространстве* L_p, *то обобщенный обратный к* $T(W_j)$ *может быть построен по формуле*

$$T^{(-1)}(W_j) = C_1^{(j)} - C_2^{(j)} A_j^{(-1)} C_3^{(j)}, \quad j \in \mathbb{Z}, \tag{12}$$

где операторы $C_k^{(j)}$, A_j $(k = 1, 2, 3\,;\ j \in \mathbb{Z})$ *определяются соотношениями (5), (8) – (11). Более того, справедливы равенства*

$$\begin{gathered}\dim \operatorname{Ker} T(W_j) = \alpha_j, \qquad \dim \operatorname{Coker} T(W_j) = \beta_j, \\ \operatorname{Ker} T(W_j) = C_2^{(j)}(\operatorname{Ker} A_j), \quad \operatorname{Im} T(W_j) = (C_3^{(j)})^{-1}(\operatorname{Im} A_j),\end{gathered} \tag{13}$$

где $\alpha_j = \dim \operatorname{Ker} A_j$, $\beta_j = \dim \operatorname{Coker} A_j$, $j \in \mathbb{Z}$.

Замечание 2. Используя разложения типа (4), результаты подобного характера могут быть получены и для операторов $WP_+ + P_-$, $P_+ + WP_-$, $P_+ + P_-W$, $P_+W|_{[L_p^+]^n}$, $P_-W|_{[L_p^-]^n}$.

§3. ФОРМУЛА ДЛЯ ЧАСТНЫХ ИНДЕКСОВ И НЕКОТОРЫЕ СЛЕДСТВИЯ

Пусть матрица-функция U допускает факторизацию $U = U_-\Lambda_U U_+$, а W определена равенством (2). Тогда из Теоремы 2 следует, что матрица-функция W также допускает факторизацию вида (1) с суммарным индексом κ. Из представления (4) при $j = 0$, конечномерности K_0 и Теоремы S следует, что суммарный индекс U также равен κ (см. [5]). Очевидно, что частные индексы W_j $(j \in \mathbb{Z})$ равны числам $\kappa_1 - j, \ldots, \kappa_n - j$. Пользуясь Теоремами S и 2, получим

$$\alpha_j = \dim \operatorname{Ker} T(W_j) = \sum_{\kappa_i \le j} (j - \kappa_i), \quad j \in \mathbb{Z}. \tag{14}$$

Откуда, в частности, следует, что последовательность неотрицательных чисел $\{\alpha_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ монотонно возрастает. Записав (14) в виде

$$\alpha_j = nj - \kappa + \sum_{\kappa_i > j} (\kappa_i - j), \quad j \in \mathbb{Z},$$

легко заметить, что

$$\begin{cases} \alpha_j = 0, & \text{при } j \le \kappa_n, \\ \alpha_j > \max[0, nj - \kappa], & \text{при } \kappa_n < j < \kappa_1, \\ \alpha_j = nj - \kappa, & \text{при } j \ge \kappa_1. \end{cases} \tag{15}$$

Теорема 3. *Пусть представление $U = U_- \Lambda_U U_+$ является факторизацией матрицы-функции U в пространстве L_p $(1 < p < \infty)$, операторы A_j $(j \in \mathbb{Z})$ определены равенством (11), $\alpha_j = \dim \operatorname{Ker} A_j$ и матрица-функция W определена равенством (2). Тогда $\nu(j)$ - количество частных индексов матрицы-функции W, равных j, определяется по формуле*

$$\nu(j) = \alpha_{j+1} - 2\alpha_j + \alpha_{j-1}, \quad j \in \mathbb{Z}. \tag{16}$$

Доказательство. Записав формулу (14) в виде

$$\alpha_j = \sum_{m=-\infty}^{j} (j - m)\nu(m), \quad j \in \mathbb{Z}, \tag{17}$$

получим

$$\alpha_{j+1} - \alpha_j = \sum_{m \le j} \nu(m), \quad j \in \mathbb{Z}, \tag{18}$$

откуда следует равенство (16). Теорема доказана.

Как известно (теорема Гохберга-Крейна-Боярского), частные индексы матрицы-функции W устойчивы при малых возмущениях тогда и только тогда, когда $\kappa_1 - \kappa_n \le 1$. Этот факт позволяет получить следующий эффективный критерий устойчивости частных индексов.

Теорема 4. *Пусть выполнены условия Теоремы 3, κ - суммарный индекс матрицы-функции U, а целые числа q и r $(0 \le r < n)$ определяются из соотношения $\kappa = qn + r$. Тогда для устойчивости частных индексов W необходимо и достаточно, чтобы*

$$\alpha_q = 0, \qquad \alpha_{q+1} = n - r. \tag{19}$$

Доказательство. Пусть выполнены условия (19). Поскольку $n - r = n(q+1) - \kappa$, то из соотношения (15) следует, что $\kappa_1 \le q + 1$ и $\kappa_n \ge q$. Для доказательства достаточности остается применить теорему Гохберга-Крейна-Боярского.

Докажем необходимость. Из теоремы Гохберга-Крейна-Боярского следует существование таких $j \in \mathbb{Z}$, что

$$\nu(j) + \nu(j+1) = n, \qquad j\nu(j) + (j+1)\nu(j+1) = \kappa.$$

Отсюда имеем $jn + \nu(j+1) = \kappa$. Учитывая, что $\kappa = qn + r$, получим $\nu(q) = n - r$ и $\nu(q+1) = r$, т.е.

$$\kappa_1 = \cdots = \kappa_r = q+1, \qquad \kappa_{r+1} = \cdots = \kappa_n = q.$$

Равенства (19) следуют теперь из соотношений (17). Теорема доказана.

Заметим, что матрица-функция W допускает каноническую факторизацию тогда и только тогда, когда $\alpha_0 = 0$ и $\kappa = 0$. Следующая теорема дает критерий канонической факторизации только посредством чисел α_j.

Теорема 5. *Пусть выполнены условия Теоремы 3. Тогда, для того чтобы все частные индексы матрицы-функции W равнялись числу q, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\alpha_q = 0, \qquad \alpha_{q+1} = n.$$

В частности, чтобы матрица-функция W допускала каноническую факторизацию в пространстве L_p, необходимо и достаточно, чтобы $\alpha_0 = 0$ и $\alpha_1 = n$.

Доказательство. Необходимость следует из Теоремы 4. Докажем достаточность. В силу (18) имеем $\alpha_{j+1} - \alpha_j \leq n$ $(j \in \mathbb{Z})$, причем равенство выполняется только при условии $j \geq \kappa_1$. Следовательно, $q \geq \kappa_1$. Осталось заметить, что из соотношений (15) следует, что $q \leq \kappa_n$. Теорема доказана.

Замечание 3. Для $j \notin [\kappa_n, \kappa_1]$ имеем $\nu(j) = 0$. Поскольку, $\kappa_n \geq -\alpha$ и $\kappa_1 \leq \beta_0$, то из соотношений (15) следует, что для определения частных индексов W достаточно определить размерности ядер $\alpha_0 + \beta_0 - 1$ конечномерных операторов $A_{-\alpha_0+1}, \ldots, A_{\beta_0-1}$. Лучше всего начать вычисление α_j с $j = q$, где q определяется из соотношения $\kappa = qn + r$ $(q, r \in \mathbb{Z}, 0 \leq r < n)$. Далее следует уменьшать j до тех пор, пока α_j станет равным нулю и увеличивать j, пока α_j станет равным $nj - \kappa$.

Замечание 4. Зафиксировав некоторые базисы пространств Im K_j, Ω_j, Ξ_j $(j \in \mathbb{Z})$ и записав матричные представления операторов A_j в этих базисах, Теоремы 3 - 5 можно сформулировать посредством рангов соответствующих матриц.

§4. ФАКТОРИЗАЦИЯ

Введем подпространства $N_j \subset L_p^n$ $(j \in \mathbb{Z})$ равенствами $N_j = C_2^{(j)}$ (Ker A_j), где операторы $C_2^{(j)}$, A_j определены формулами (9) - (11).

Лемма 2. *Пусть матрица-функция* $U \in GL_\infty^{n\times n}$ *допускает факторизацию в пространстве* L_p : $U = U_- \Lambda_U U_+$. *Пусть частные индексы матрицы-функции* W, *определенной равенством (2) , принимают значения* $\mu_1 > \mu_2 > \cdots > \mu_s$, *т.е.*

$$\kappa_1 = \cdots = \kappa_{i_1} = \mu_1 > \kappa_{i_1+1} = \cdots = \kappa_{i_2} = \mu_2 > \cdots = \mu_{s-1}$$
$$> \kappa_{i_{s-1}+1} = \cdots = \kappa_n = \mu_s,$$

а $\mu_{s+1} \in \mathbb{Z}$ *- произвольное число, удовлетворяющее неравенству* $\mu_{s+1} < \mu_s$. *Тогда*

$$t^j N_{\mu_{i+1}+1} \subset N_{\mu_i+1}, \quad j = 0, 1, ..., \mu_i - \mu_{i+1}; \quad i = 1, 2, ..., s.$$

Более того, подпространство

$$N_{\mu_{i+1}+1} + tN_{\mu_{i+1}+1} + \cdots + t^{\mu_i - \mu_{i+1}} N_{\mu_{i+1}+1}, \quad i = 1, 2, ..., s$$

обладает прямым дополнением в пространстве N_{μ_i+1} *с размерностью равной* $\nu(\mu_i)$.

Доказательство. Из Теоремы 2 следует, что $N_j = \operatorname{Ker} T(W_j)$. Пусть представление $W = \tilde{W}_- \Lambda_W \tilde{W}_+$ является некоторой факторизацией матрицы-функции W в пространстве L_p. Как уже указывалось в §2, пространство N_j $(j \in \mathbb{Z})$ совпадает с множеством вектор-функций $\tilde{W}_+^{-1} q$, где $q = \operatorname{col}[q_1, ..., q_n]$, а q_i - многочлен степени не более чем $j - \kappa_i - 1$ и тождественно равный нулю при $\kappa_i > j$.

Пусть $Y_{11}, ..., Y_{1\nu(\mu_1)}, ..., Y_{s1}, ..., Y_{s\nu(\mu_s)}$ столбцы матрицы-функции $\tilde{W}_+^{-1}$, а $\mu_0 \in \mathbb{Z}$ - произвольное число, удовлетворяющее неравенству $\mu_0 > \mu_1$. Легко видеть, что если $j \le \mu_s$, то $N_j = \{0\}$, а при $j \in (\mu_i, \mu_{i-1}]$ $(i = 1, ..., s)$ в качестве базиса N_j можно выбрать систему вектор-функций

$$\{t^l Y_{k,m} : k = i, ..., s;\ m = 1, ..., \nu(\mu_k);\ l = 0, 1, ..., j - \mu_k - 1\}.$$

В частности

$$N_{\mu_i+1} = (N_{\mu_{i+1}+1} + \cdots + t^{\mu_i - \mu_{i+1}} N_{\mu_{i+1}+1}) + \{Y_{i1}, Y_{i2}, ..., Y_{i\nu(\mu_i)}\}, \quad i = 1, ..., s, \tag{20}$$

откуда следуют все утверждения леммы. Лемма доказана.

Теперь докажем, что факторизационные факторы W могут быть восстановлены с помощью базисных элементов пространств N_j $(j \in \mathbb{Z})$.

Теорема 6. *Пусть выполнены условия Леммы 2, H_i $(i = 1, ..., s)$ - некоторое прямое дополнение к пространству $N_{\mu_{i+1}+1} + \cdots + t^{\mu_i - \mu_{i+1}} N_{\mu_{i+1}+1}$ в пространстве N_{μ_i+1}, система вектор-функций $X_{i1}, ..., X_{i\nu(\mu_i)}$ есть произвольный базис в H_i $(i = 1, ..., s)$, а матрицы-функции X, W_+, Λ_W, W_- определены следующим образом :*

$$X = [X_{11}, ..., X_{1\nu(\mu_1)}, X_{21}, ..., X_{s\nu(\mu_s)}], \quad W_+ = X^{-1},$$

$$\Lambda_W = \operatorname{diag}[t^{\varkappa_1}, ..., t^{\varkappa_n}], \quad W_- = W W_+^{-1} \Lambda_W^{-1}.$$

Тогда представление (1) является факторизацией W в пространстве L_p.

Доказательство. Используя обозначения Леммы 2, из (20) получим, что

$$X_{mi} = \sum_{k=m}^{s} \sum_{l=1}^{\nu(\mu_k)} q_{mi}^{kl} Y_{kl}, \quad m = 1, ..., s; \quad i = 1, ..., \nu(\mu_m), \tag{21}$$

где q_{mi}^{kl} - многочлен со степенью не выше, чем $\mu_m - \mu_k$. Рассмотрим матричные полиномы Q_m^k $(k = 1, ..., s;\ m = 1, ..., s)$ порядка $\nu(\mu_k) \times \nu(\mu_m)$:

$$Q_m^k = \begin{pmatrix} q_{m1}^{k1} & \cdots & q_{m\nu(\mu_m)}^{k1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{m1}^{k\nu(\mu_k)} & \cdots & q_{m\nu(\mu_m)}^{k\nu(\mu_k)} \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что равенства (21) эквивалентны матричному равенству $X = \tilde{W}^{-1} Q$, где Q - блочная матрица-функция вида

$$Q = \begin{pmatrix} Q_1^1 & 0 & \cdots & 0 \\ Q_1^2 & Q_2^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Q_1^s & Q_2^s & \cdots & Q_s^s \end{pmatrix}.$$

Из построения системы вектор-функций X_{ki} $(k = 1, ..., s;\ i = 1, ..., \nu(\mu_k))$ следует их линейная независимость, а поскольку диагональные блоки Q - постоянные матрицы, то $\det Q \equiv \mathrm{const} \neq 0$. Следовательно, $W_+ = X^{-1} = Q^{-1}\tilde{W}_+$. Исходя из предположений, сделанных относительно $\tilde{W}_+$ и структуры матрицы-функции Q^{-1}, мы теперь можем применить теорему об общем виде факторов (см. [2], гл. VII, Теорема 1.2). Теорема 6 доказана.

Замечание 5. В случае канонической факторизации факторы могут быть построены иначе. В этом случае W_+^{-1} можно взять равным $T^{(-1)}(W)E_n$, где E_n - единичная матрица-функция порядка $n \times n$ (более подробно, см. [2], гл. VII, §3).

Замечание 6. Левая факторизация W строится аналогичным образом. Для этого вместо операторов $T(U)$ и $T(W)$ надо взять $P_+ + P_-U$, $P_+ + P_-W$, а построение факторов начать с W^{-1}.

§5. НЕКОТОРЫЕ ПРИМЕРЫ

1. Пусть $f \in G\mathcal{R}$, $w_{11}, w_{12}, w_{22} \in L_\infty$. Рассмотрим матрицы функции порядка (2×2) вида

$$W = \begin{pmatrix} w_{11} & w_{12} \\ f^2 w_{12} + f(w_{11} - w_{22}) & w_{22} \end{pmatrix}. \tag{22}$$

Легко видеть, что $W = FUF^{-1}$, где

$$F = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ f & -f \end{pmatrix}, \qquad U = \begin{pmatrix} w_{11} + f w_{12} & w_{11} - w_{22} \\ 0 & w_{22} - f w_{12} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, факторизация матрицы-функции (22) сводится к факторизации треугольной матрицы-функции U. Проблема эффективной факторизации треугольной матрицы-функции второго порядка достаточно хорошо исследована и ее подробное изложение можно найти в [2], гл. IV и в [3], гл. IV. Явная факторизация построена в работе [14].

Наиболее простым является случай $w_{11} = w_{22}$. Действительно, в этом случае U - диагональная матрица, и ее явная факторизация сводится к факторизации двух скалярных функций $W_{11} \pm f W_{12}$. Матрица-функция такого вида, с более слабым требованием относительно f (а именно с заменой $f \in \mathcal{R}$ на $f^2 \in \mathcal{R}$), известна в литературе под названием функции Храпкова-Даниэля. В связи с приложениями в теории дифракции, акустики и упругости, она исследована многими авторами (см. [12], [15] - [21]). В работе [12] построена каноническая факторизация (22) при $W_{11} = W_{22} = 1$.

Заметим, что матрицы-функции вида (22) с точностью до подобия постоянной матрицы описывают класс матриц-функций вида FUF^{-1} с матрицей-функцией U, имеющей верхне-треугольный вид и $F \in G\mathcal{R}^{2\times 2}$. Действительно, если

$$W = \begin{pmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{21} & w_{22} \end{pmatrix}, \qquad F = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{pmatrix},$$

то требуя, чтобы левый нижний элемент матрицы-функции $F^{-1}WF$ был равен нулю получим

$$w_{21} = \left(\frac{f_{21}}{f_{11}}\right)^2 w_{12} + \frac{f_{21}}{f_{11}}(w_{11} - w_{22}).$$

Требование $f_{11} \neq 0$ можно удовлетворить, переходя от W к матрице-функции

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} W \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Рассмотрим матрицы-функции вида

$$W = \sum_{k=0}^{n-1} a_k Q^k, \quad a_k \in L_\infty, \quad Q \in \mathcal{R}^{n\times n}. \tag{23}$$

Без потери общности можно считать, что Q - полиномиальная матрица.

Пусть $\varphi_j(\lambda, t)$ ($j = 1, 2, ..., m$; $m \le n$, $\lambda \in \mathbf{C}$, $t \in \Gamma$) - элементарные делители матрицы-функции Q над полем рациональных функций, ϕ_j - сопровождающие матрицы $\varphi_j(\lambda, t)$, $\phi = \operatorname{diag}[\phi_1, ..., \phi_m]$ - вторая нормальная форма Q, F - преобразующая матрица-функция (см. [22]). Так как

$$W = F\left\{\sum_{k=0}^{n-1} a_k \phi^k\right\} F^{-1},$$

то факторизация W редуцируется к факторизации матрицы-функции

$$V_j = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \phi_j^k.$$

В работе [23] указан способ сведения факторизации матриц-функций такого типа (а также общего вида (23)) к последовательному решению нескольких скалярных задач Римана нас римановой поверхности, заданной неприводимыми алгебраическими уравнениями $\psi_j = 0$, где ψ_j определяются из равенств $\varphi_j = \psi_j^s$. Алгоритм для конструктивного решения последней задачи можно найти в [24].

В частном случае, когда элементарный делитель имеет вид $\lambda^s - f(t)$, матрица-функция V_j является f-циркулянтной и ее факторизация может быть сведена к факторизации рациональной матрицы-функции [25]. Указанному условию удовлетворяют матрицы-функции вида (23) с дополнительным условием $\operatorname{tr} Q = \operatorname{tr} Q^2 = \cdots = \operatorname{tr} Q^{n-1} = 0$ [26].

Подход, предлагаемый в данной работе, наиболее эффективен в том случае, когда все элементарные делители представляются в виде $\varphi_j = (\lambda - g_j)^{s_j}$ $(j = 1, ..., m)$. Действительно, тогда рациональным преобразованием матрицу-функцию Q можно привести к третьей нормальной форме. Следовательно, матрица-функция вида (23) представима в виде (2), где U имеет треугольную форму. Если $s_j = 1$ $(j = 1, ..., n)$, то матрица-функция U диагональна. Очевидно, что при непрерывности (либо кусочно-непрерывности) W, Теоремы 3 и 6 дают явные формулы для вычисления частных индексов и факторизационных факторов W (ср. с [27]). В качестве примера матрицы-функции, обладающей указанным свойством, можно рассмотреть матрицу

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & f_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & f_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & f_{n-1} \\ f_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

где $f_1 f_2 \cdots f_n = g^n$ и $g \in \mathcal{R}$.

ABSTRACT. The paper presents an effective method of Wiener-Hopf factorization for the matrix functions of the form FUF^{-1}, where F is a rational matrix function and the factorization of the matrix function U is known. Explicit formulas for factorization, relative to a closed contour are constructed. These formulas are given in terms of basises of kernels of finite number of operators acting in finite dimensional spaces. Also formulas for the partial indices are given.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. М. Дынькин, Б. П. Осиленкер, "Весовые оценки сингулярных интегралов и их приложения", Итоги науки и техники, ВИНИТИ. Мат. анализ, том. 21,

стр. 42 – 192, 1983.

2. K. Clancey, I. Gohberg, "Factorization of matrix functions and singular integral operators", Operator Theory : Advances and Appl., vol. 3, Birkhäuser, Basel, 1981.
3. G. S. Litvinchuk, I. M. Spitkovski, Factorization of Matrix Functions, Akademie-Verlag, Berlin, 1987.
4. И. Б. Симоненко, "Некоторые общие вопросы теории краевой задачи Римана", Изв. АН СССР, сер. мат., том 32, №5, стр. 567 – 587, 1968.
5. И. Ц. Гохберг, Н. Я. Крупник, Введение в Теорию Одномерных Сингулярных Операторов, Кишинев, Штиинца, 1973.
6. I. Gohberg, L. Lerer, L. Rodman, "Factorization indices for matrix polynomials", Bull. AMS, vol. 84, pp. 275 – 277, 1978.
7. В. М. Адуков, "Факторизация Винера-Хопфа мероморфных матриц-функций", Алгебра и анализ, том 4, №1, стр. 54 – 74, 1992.
8. I. A. Ball, K. F. Clancey, "An elementary description of partial indices of rational matrix functions", Integral Equations and Operator Theory, vol. 13, pp. 316 – 322, 1990.
9. Ф. Д. Гахов, "Краевая задача Римана для системы n пар функций", Успехи мат. наук, том 7, №4, стр. 3 – 54, 1952.
10. В. Н. Гавдзинский, И. М. Спитковский, "Об одном способе эффективного построения факторизации", Укр. мат. журнал, том 34, №1, стр. 15 – 20, 1982.
11. H. Bart, I. Gohberg, M. A. Kaashoek "The coupling method for solving integral equations", Operator Theory : Advances and Appl., vol. 12, pp. 39 – 73, Birkhäuser, Basel, 1984.
12. A. B. Lebre, "Factorization in the Wiener algebra of a class of 2 × 2 matrix functions", Integral Equations and Operator Theory, vol. 12, pp. 408 – 423, 1989.
13. A. Pietsch, "Zur Theorie der σ-Transformation in lokalkonvexen Vectorraumen", Mathematische Nachrichten, vol. 21, no. 6, pp. 347 – 369, 1960.
14. В. М. Адуков, "Факторизация треугольных матриц-функций второго порядка", деп. в ВИНИТИ 01.12.82, №5930-82, стр. 1 – 14, 1982.
15. А. А. Храпков, "Некоторые случаи упругого равновесия бесконечного клина с несимметрическим надрезом в вершине под действием сосредоточенных сил", Прикл. мат. мех., том 35, стр. 677 – 689, 1971.
16. V. G. Daniele, "On the solution of two coupled Wiener-Hopf equations", SIAM J. Appl. Math., vol. 44, pp. 667 – 679, 1984.
17. A. D. Rawlins, "A note on the factorization of matrices occuring in Wiener–Hopf problems", IEEE Trans. Antennes Propag., vol. AP-28, pp. 933 – 934, 1980.
18. E. Meister, F.- O. Speck, "Wiener–Hopf factorization of certain non-rational matrix functions in mathematical physics", The Gohberg Anniversery Collection, vol. 11, pp. 385 – 394, Birkhäuser, Basel, 1989.
19. S. Prössdorf, F.- O. Speck, "A factorization procedure for two by two matrix functions on the circle with two rationally independent entries", Proc. Roy. Soc., Edinburgh, vol. 115, pp. 119 – 138, 1990.
20. Ю. А. Антипов, Н. Г. Моисеев, "Точное решение плоской задачи для составной плоскости с разрезом, пересекающим линию раздела сред", Прикл. мат. мех., том 55, №4, стр. 662 – 671, 1991.
21. A. B. Lebre, A. F. des Santos, "Generalized factorization for a class of non-rational 2 × 2 matrix functions", Integral Equations and Operator Theory, vol. 13, no. 5, pp. 671 – 700, 1990.
22. Б. Л. Ван - дер - Варден, Алгебра, М., Наука, 1976.
23. Н. Г. Моисеев, "О факторизации матриц-функций специального вида", ДАН СССР, том. 305, №1, стр. 44 – 47, 1989.

24. Э. И. Зверович, "Краевые задачи теории аналитических функций в гельдеровских классах на римановых поверхностях", Успехи мат. наук, том 26, №1, стр. 113 - 179, 1971.
25. А. Г. Камалян, В. А. Оганян, "О факторизации f-циркулянтных матриц-функций", Изв. АН Армении, том 28, №1, стр. 38 - 54, 1993.
26. D. S. Jones, "Commutative Wiener-Hopf factorization of a matrix", Proc. Roy. Soc., London, Ser. A393, pp. 185 - 192, 1984.
27. А. Г. Камалян, "Эффективная факторизация некоторых классов матриц-функций", ДАН Армении, том. 93, №3, стр. 99 - 104, 1992.

13 Апреля 1992

Институт математики
НАН Армении