

КРАТКОЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.986.6

С. А. ГРИГОРЯН

О МЕРАХ, ОРТОГОНАЛЬНЫХ К АЛГЕБРЕ
ОБОБЩЕННЫХ АНАЛИТИЧЕСКИХ
ПО АРЕНСУ-ЗИНГЕРУ ФУНКЦИЙ

Пусть Γ — некоторая подгруппа аддитивной группы вещественных чисел $\mathbb{R}$, наделенная дискретной топологией. Каждый элемент $a \in \Gamma$ порождает непрерывный характер χ^a группы G , определяемый соотношением $\chi^a(a) = a$, $a \in G$. В данной заметке описывается структура мер, ортогональных к алгебре A — равномерной алгебре на G , порожденной характерами χ^a , $a \in \Gamma_+ = \{a \in \Gamma; a \geq 0\}$.

1°. Напомним (см. [1], [2]), характеры χ^a , $a \in \Gamma$, образуют ортонормированный базис в $L^2(d\sigma)$, где σ — нормированная мера Хаара группы G . Для каждой функции $f \in L^2(d\sigma)$ существует формальный ряд $f \sim \sum_{a \in \Gamma} c(a) \chi^a$. Множество тех $a \in \Gamma$, для которых $c(a) \neq 0$, называется спектром функции f и обозначается через $S(f)$.

Пусть $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ — система окрестностей единичного элемента группы G , и $\{\psi_{\delta, \lambda}\}_{\substack{\delta > 0 \\ \lambda \in \Lambda}}$ — такая система положительных непрерывных функций на G , что для любых $\delta > 0$, $\lambda \in \Lambda$

I) множество $S(\psi_{\delta, \lambda})$ конечно;

II) $\psi_{\delta, \lambda}(a) < \delta$, если $a \notin U_\lambda$;

III) $\int_G \psi_{\delta, \lambda} d\sigma = 1$.

С помощью этой системы функций определим операторы Бохнера-Фейера $\{K_{\delta, \lambda}\}_{\substack{\delta > 0 \\ \lambda \in \Lambda}}$ для $f \in C(G)$

$$K_{\delta, \lambda}(f)(a) = \int_G f(a\beta^{-1}) \psi_{\delta, \lambda}(\beta) d\sigma(\beta).$$

Очевидно

IV) $\|K_{\delta, \lambda}\| = 1$, $\inf_{\delta, \lambda} \sup_{a \in G} |K_{\delta, \lambda}(f)(a) - f(a)| = 0$ и $S(K_{\delta, \lambda}(f))$ конечен и содержится в $S(f)$.

Для каждой регулярной борелевской меры μ на G можно определить формальный ряд Фурье-Стилтьеса

$$\mu \sim \sum_{a \in \Gamma} c(a) \chi^a.$$

Как и для функций, множество тех a , $a \in \Gamma$, для которых $c(a) = 0$, называется спектром меры μ . Если $S(\mu)$ конечно, то μ абсолютно непрерывна относительно σ . И поскольку $M(G)$ —пространство всех регулярных борелевских мер на G —является дуальным к $C(G)$, то операторы $K_{\delta, \lambda}$, $\delta > 0$, $\lambda \in \Lambda$, порождают сопряженные операторы $K_{\delta, \lambda}^*$, $\delta > 0$, $\lambda \in \Lambda$, действующие на $M(G)$.

На семействе пар $\{(\delta, \lambda)\}_{\substack{\delta > 0 \\ \lambda \in \Lambda}}$ можно ввести порядок $(\delta_1, \lambda_1) < (\delta_2, \lambda_2)$, если $\delta_2 < \delta_1$ и $U_2 \subset U_1$. При таком упорядочении семейство операторов $\{K_{\delta, \lambda}\}_{\substack{\delta > 0 \\ \lambda \in \Lambda}}$ превращается в сеть.

Из условий I), II), III) непосредственно следует: для любого $\mu \in M(G)$

V) $S(K_{\delta, \lambda}^*(\mu))$ состоит из конечного числа элементов и содержится в $S(\mu)$;

VI) $\|K_{\delta, \lambda}^*(\mu)\| < \|\mu\|$, и сеть мер $K_{\delta, \lambda}^*(\mu)$, $\delta > 0$, $\lambda \in \Lambda$, слабо* сходится к мере μ .

Для каждого числа $x \in \mathbb{R}$ определим элемент $a_x \in G: \chi^a(x) = e^{iax}$, $a \in \Gamma$. Если Γ не изоморфна $\mathbb{Z}$, что и предполагается всюду в дальнейшем, отображение $x \rightarrow a_x$ осуществляет изоморфизм вещественной оси на некоторую плотную подгруппу группы G , которую также будем обозначать через R . Поскольку сужение конечного ряда $f = \sum_{n=1}^m c(a_n) \chi^{a_n}$, $a_n \geq 0$, на любой класс смежности aR группы G по R

имеет вид $f(a \cdot a_x) = \sum_{n=1}^m c(a_n) \chi^{a_n}(a) e^{ia_n x}$, то функцию f можно продолжить до аналитической почти периодической в верхней полуплоскости над aR функции.

Зафиксируем $a \in \Gamma_+$. Пусть $G_a = \{a \in G; a(a) = 1\}$. Рассмотрим гомоморфизм $h: G_a \times \mathbb{R} \rightarrow G$, $h(a, x) = a \cdot a_x$. Множество $F_k = G_a \times \left[-\frac{\pi}{a} + \frac{2\pi}{a}k, \frac{\pi}{a} + \frac{2\pi}{a}k\right)$, для любого $k \in \mathbb{Z}$, является фундаментальной областью для отображения h , т. е. h взаимно однозначно отображает F_k на G .

Пусть γ_a — мера Хаара группы G_a . Тогда мера σ на F_k , $\sigma = \sigma \circ h|_{F_k}$, равна

$$d\sigma = \frac{a}{2\pi} d\gamma_a \times dx. \quad (1.1)$$

На локально компактной группе $G_a \times \mathbb{R}$ рассмотрим меру $d\gamma = d\gamma_a \times \frac{dx}{1+x^2}$ и с её помощью определим меру γ на G , полагая $\gamma = \hat{\gamma} \circ h^{-1}$. Так как сужение $\hat{\gamma}$ на F_k абсолютно непрерывно относительно меры σ , то мера γ абсолютно непрерывна относительно меры σ .

Для нахождения производной Радона-Никодима этих двух мер определим на $G_a \times \mathbb{R}$ функцию

$$K_a(z, x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + \left(x + \frac{2\pi n}{a}\right)^2}.$$

Так как $K_a(z, x)$ — периодическая по x функция с периодом $\frac{2\pi}{a}$, то $\tilde{K}_a + K_a \circ h^{-1}$ — непрерывная на G функция. Покажем, что

$$\gamma = \frac{2\pi}{a} \tilde{K}_a \cdot \gamma. \quad (1.2)$$

Действительно, из (1.1) имеем:

$$\begin{aligned} d(\gamma \circ h)|_{F_a} &= K_a(z, x) d\gamma_a \times dx = \frac{2\pi}{a} K_a(z, x) \left(\frac{a}{2\pi} d\gamma_a \times dx \right) = \\ &= \frac{2\pi}{a} K_a(z, x) d(\gamma \circ h)|_{F_a}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\gamma = \frac{2\pi}{a} \tilde{K}_a \cdot \gamma.$$

2°. На компакте $X = G_a \times T$, где T — единичная окружность, рассмотрим алгебру $A(X)$ всех непрерывных функций на X , которые при каждом фиксированном $a \in G_a$ продолжаются до аналитической в единичном круге функции, т. е. до функции из диск-алгебры. Зная свойства диск-алгебры, можно исследовать алгебру $A(X)$. Например:

а) поскольку для любого $g \in C(G_a)$ функция $f(a, e^{i\theta}) = g(a)$ принадлежит $A(X)$, каждое подмножество в X вида $\{a\} \times T$, $a \in G_a$ является максимальным множеством антисимметрии, т. е. каждая вещественная функция из $A(X)$ постоянна на множествах вида $\{a\} \times T$.

Следующее утверждение менее тривиально:

в) каждая мера $\nu \in A(X)^\perp$ имеет вид $d\nu = d\nu_a \times f(a, e^{i\theta}) d\theta$, где ν_a — некоторая положительная мера на G_a , $f(a, e^{i\theta})$ — функция на X , измеримая по мере ν и такая, что при каждом фиксированном $a \in G_a$, почти для всех α по мере ν_a , функция $f(\alpha, e^{i\theta})$ принадлежит H_0^1 — пространству тех функций из пространства Харди H^1 на T , аналитическое продолжение которых в единичный круг обращается в нуль в центре круга.

Для доказательства этого факта достаточно заметить, воспользовавшись а), что каждая крайняя мера из единичного шара мер, ортогональных к $A(X)$, сосредоточена на множествах вида $\{a\} \times T$, $a \in G_a$. А так как сужение $A(X)$ на $\{a\} \times T$ есть диск-алгебра, то по теореме М. и Ф. Риссов эти меры имеют вид $g d\theta$, где $g \in H_0^1$. Применив теперь теорему Крейна-Мильмана, получим требуемое утверждение.

с). Пусть $I = \{f \in A(X); f(a, e^{i\theta}) = g(a, e^{i\theta}) a^{i\theta}, g \in A(X), \text{ — гдзгал в } A(X)\}$. Тогда каждая мера $\nu \in I^\perp$ имеет вид $d\nu = d\nu_a \times f(a, e^{i\theta}) d\theta$,

где ν_a — некоторая положительная мера на G_a , а $f(z, e^{i\theta})$ — функция на X , измеримая по мере ν и такая, что при каждом фиксированном a , почти для всех a по мере ν_a , функция $f(a, e^{i\theta})$ принадлежит H^1 .

Утверждение с) непосредственно следует из в).

Для дальнейшего заметим, что конформное отображение $w = \Phi(z) = \frac{i-z}{i+z}$ верхней полуплоскости в единичный круг порождает отображение пространства Харди H^1 в $H^1\left(\frac{dx}{1+x^2}\right)$ тех функций на R , которые представимы в виде $g \circ \Phi$, где $g \in H^1$. В частности, это отображение переводит каждую меру $\nu \in I^1$, $d\nu = d\nu_a \times f(a, e^{i\theta}) d\theta$ в меру τ на $G_a \times R$, $d\tau = d\nu_a \times f(a, \Phi(x)) \frac{dx}{1+x^2}$. Пространство таких мер на $G_a \times R$ обозначим через M_a .

Теорема. Для каждой меры $\nu \in A^1$ найдется такая мера $\hat{\nu} \in M_a$, что $\hat{\nu} \circ h^{-1} = \frac{2\pi}{a} K_a \circ \nu$.

◀ Из построения алгебры A видно, что мера ν принадлежит A^1 тогда и только тогда, когда $S(\nu)$ — спектр меры ν — содержится в $\Gamma_a \setminus \{0\}$. Поэтому, если $\nu \in A^1$, в силу свойства V), мера $\nu_{\delta, \lambda} = K_{\delta, \lambda}(\nu)$ также принадлежит A^1 . Так как $S(\nu_{\delta, \lambda})$ состоит из конечного числа элементов (см. V), то мера $\nu_{\delta, \lambda}$ абсолютно непрерывна относительно меры σ . Более того, $\nu_{\delta, \lambda} = f\sigma$, где $f = \sum_{k=1}^m c(a_k) \chi^{a_k}$ — некоторая функция из A .

Функция $f \circ h(a, x) = \sum_{k=1}^m c(a_k) \chi^{a_k}(a) e^{i a_k x}$ на $G_a \times R$ при каждом фиксированном $a \in G_a$ продолжается до аналитической почти периодической функции в верхней полуплоскости. Поэтому $f \circ h(a, \cdot) \in H^1\left(\frac{dx}{1+x^2}\right)$.

Следовательно, мера $\hat{\nu}_{\delta, \lambda}$, $d\hat{\nu}_{\delta, \lambda} = f \circ h(a, x) d\tau_a \times \frac{dx}{1+x^2}$, принадлежит M_a , и в силу (1.2)

$$\frac{2\pi}{a} K_a \cdot \nu_{\delta, \lambda} = \hat{\nu}_{\delta, \lambda} \circ h^{-1}. \quad (2.1)$$

Покажем, что сеть мер $\{\hat{\nu}_{\delta, \lambda}\}_{\substack{\delta > 0 \\ \lambda \in \mathbb{Z}}}$ сходится к некоторой мере $\nu \in M_a$.

Действительно, так как $F_k = G_a \times \left[-\frac{\pi}{a} + \frac{2\pi}{a}k, \frac{\pi}{a} + \frac{2\pi}{a}k\right)$ фундаментальная область (при любом $k \in \mathbb{Z}$) для отображения h и $d(\sigma \circ h)|_{F_k} = \frac{a}{2\pi} d\tau_a \times dx$, то $d(\nu_{\delta, \lambda} \circ h)|_{F_k} = \frac{a}{2\pi} f \circ h(a, x) d\tau_a \times dx$, $(a, x) \in F_k$, и

$$\hat{\nu}_{\delta, \lambda}|_{F_k} = \frac{2\pi}{a(1+x^2)} \cdot \nu_{\delta, \lambda} \circ h|_{F_k}. \quad (2.2)$$

Следовательно, (см. VI)),

$$|\widehat{\nu_{k,1}}|_{F_k} \leq \frac{2\pi a}{a^2 + (|k| - 1)^2} |\nu_{k,1}| \leq \frac{2\pi a}{a^2 + (|k| - 1)^2} \cdot M. \quad (2.3)$$

Поэтому из слабой сходимости сети мер $|\nu_{k,1}|$ и (2.2) следует слабо* сходимость сети мер $|\widehat{\nu_{k,1}}|_{F_k}$, $k \in \mathbb{Z}$, в пространстве, дуальном к $\bar{C}(R) = \{f \circ \Phi(x), f \in C(T)\}$. Применяя теперь (2.3), получим, что сеть мер $\{\nu_{k,1}\}$ слабо* сходится в дуальном к $\bar{C}(R)$ пространстве к некоторой мере ν . Так как $\nu_{\lambda,1} \in M_a$, $\delta > 0$, $\lambda \in \Lambda$, то и $\nu \in M_a$. Из (2.1) имеем $\frac{2\pi}{a} \bar{K}_a \nu = \widehat{\nu \circ h^{-1}}$. ►

Для каждого $E \subset G_a \times R$ и $x \in R$ под $E + x$ подразумеваем множество $\{(a, y) \in G_a \times R; (a, y - x) \in E\}$.

Следствие (теорема де Лю-Гликсберга [1]). Пусть $\nu \in A^\perp$ и E — такое борелевское подмножество в G , что для некоторого $x \in R$, $|\nu|(E \cdot a_x) = 0$. Тогда $|\nu|(E) = 0$.

◄ Пусть $\widehat{\nu} \in M_a$ — такая мера, что $\frac{2\pi}{a} \bar{K}_a \nu = \widehat{\nu \circ h^{-1}}$. Так как $\widehat{\nu}|_{F_k} = \frac{2\pi}{a(1+x^2)} \nu \circ h|_{F_k}$ (см. (2.2)), то из $|\nu|(E \cdot a_x) = 0$ следует $|\widehat{\nu}|_{F_k} \cap h^{-1}(E \cdot a_x) = 0$. Поэтому $|\widehat{\nu}|_{h^{-1}(E \cdot a_x)} = 0$. Поскольку $d\widehat{\nu} = d\nu_a \times f(a, x) \times \frac{dx}{1+x^2}$, $f(a, \cdot) \in H^1\left(\frac{dx}{1+x^2}\right)$, то почти для всех $a \in \text{supp } \nu_a$, по мере ν_a , для которых $f(a, \cdot) \neq 0$, лебегова мера множества $(a, R) \cap h^{-1}(E \cdot a_x)$ равна нулю. А так как $h^{-1}(E \cdot a_x) = h^{-1}(E) + x$ и мера Лебега инвариантна относительно сдвигов, получим $|\widehat{\nu}|(h^{-1}(E)) = 0$. Следовательно, $|\nu|(h^{-1}(E) \cap F_k) = 0$. Таким образом $\nu(E) = 0$. ►

Институт математики
АН Армении

Поступила 15. XII. 1989

ЛИТЕРАТУРА

1. Т. Гамелин. Равномерные алгебры, М., Мир, 1973.
2. А. А. Пинков. Ограниченные и почти периодические решения нелинейных дифференциально-операторных уравнений, Киев, Наукова Думка, 1985.