ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XXI, № 4, 1986 Математика

УДК 517.946

С. Г. ХАЧАТРЯН

ГРАНИЧНЫЕ ЗАДАЧИ С РАЗРЫВНЫМИ ГРАНИЧНЫМИ ДАННЫМИ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА НА ПЛОСКОСТИ

Для формулировки рассматриваемых ниже задач введем следующие обозначения.

Пусть T — односвязная область плоскости $z = x + iy$ с гладкой границей Γ, t_0 — точка границы Γ, t_1 — точка области T, l_0, l_1 — положительные числа.

Обозначим через $M_T(t_0, t_1, l_0, l_1)$ класс действительных функций $f(z) \equiv f(x, y)$, удовлетворяющих условию Гёльдера в окрестности любой точки области $T+\Gamma$, кроме точек t_0, t_1, в окрестности которых имеют место неравенства

$$|f(z)| \leqslant \text{const}\,|z - t_k|^{-l_k - \varepsilon_k}, \quad k = 0, 1. \tag{1}$$

Через $\overline{M}_T(t_0, t_1, l_0, l_1)$ обозначим класс действительных функций $u(z) = u(x, y)$, удовлетворяющих условию Гёльдера в окрестности любой точки области $T+\Gamma$, кроме точек t_0, t_1, в окрестности которых имеют место неравенства

$$|u(z)| \leqslant \text{const}\,|z - t_k|^{-l_k - \varepsilon_k}, \quad k = 0, 1, \tag{2}$$

$$\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|, \left|\frac{\partial u}{\partial y}\right| < \text{const}\,|z - t_k|^{-l_k - 1 - \varepsilon_k}, \quad k = 0, 1, \tag{3}$$

где $\varepsilon_k = 0$, если l_k — нецелое число и ε_k — произвольное положительное число, если l_k — целое число.

Обозначим через $N_\Gamma(t_0, l_0)$ класс действительных функций $g(z) = g(x, y)$, определенных на кривой Γ, удовлетворяющих условию Гёльдера вместе со своей производной $g'(t)$ (по кривой) первого порядка в окрестности любой точки $t \in \Gamma$, кроме точки t_0, в окрестности которой имеют место неравенства

$$|g(t)| \leqslant \text{const}\,|t - t_0|^{-l_0 - \varepsilon_0}, \tag{4}$$

$$|g'(t)| \leqslant \text{const}\,|t - t_0|^{-l_0 - 1 - \varepsilon_0}, \tag{5}$$

где ε_0 — то же, что и в предыдущем обозначении.

В настоящей работе рассматриваются задача Дирихле и общая граничная задача для уравнения

$$E(u) = \Delta u + a(x, y)\frac{\partial u}{\partial x} + b(x, y)\frac{\partial u}{\partial y} + c(x, y)\,u = f(x, y) \tag{6}$$

в классе разрывных функций, где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$, $a(x, y)$, $b(x, y)$, $c(x, y)$ — заданные действительные функции, удовлетворяющие условию Гёльдера в области $T + \Gamma$, $f(x, y)$ — заданная функция из класса $M_T(t_0, t_1, l_0, l_1)$. Предполагается также, что $a(x, y)$, $b(x, y)$, $c(x, y)$ аналитична в некоторой окрестности точек t_0, t_1, а кривая Γ аналитична в окрестности точки t_0.

В случае, когда $a(x, y)$, $b(x, y)$, $c(x, y)$ — аналитические функции, задача Дирихле и общая граничная задача для уравнения (6) в классах Гёльдера полностью исследованы в монографии И. Н. Векуа [1]. В этой монографии получено общее решение уравнения (6), которым мы существенно будем пользоваться при исследовании упомянутых выше задач в классе разрывных функций.

В монографии А. В. Бицадзе [2] исследованы эти задачи в классах Гёльдера в случае, когда функции $a(x, y)$, $b(x, y)$ удовлетворяют условию Гёльдера, а $c(x, y)$ непрерывна.

Краевые задачи с разрывными граничными данными для уравнения Лапласа исследованы в работе [3], а для однородных эллиптических систем второго порядка с постоянными коэффициентами — в работах [4], [5]. В них используется явное решение исследуемых задач в классах Гёльдера.

Сформулируем теперь задачи, исследованием которых будем заниматься.

З а д а ч а $D_g(f)$ (Дирихле). Требуется найти регулярное в области $T \setminus \{t_1\}$ решение $u(x, y)$ уравнения (6), принадлежащее классу $\tilde{M}_T(t_0, t_1, l_0, l_1)$ и удовлетворяющее граничному условию

$$u(t) = g(t), \quad t \in \Gamma, \quad t \neq t_0, \tag{7}$$

где $f(x, y)$ — функция классе $M_T(t_0, t_1, l_0 + 2, l_1 + 2)$, а $g(t)$ принадлежит клессу $N_\Gamma(t_0, l_0)$.

З а д а ч а $\Pi_h(f)$ (Пуанкаре). Требуется найти регулярное в области $T \setminus \{t_1\}$ решение уравнения (6), принадлежащее классу $\tilde{M}_T(t_0\ t_1\ l_0, l_1)$ и удовлетворяющее граничному условию

$$L(u) \equiv a_0(t) \frac{\partial u}{\partial x} + b_0(t) \frac{\partial u}{\partial y} + c_0(t)\, u = h(t), \quad t \neq t_0, \tag{8}$$

где $f(x, y)$ — то же, что и в задаче $D_g(f)$, $h(t)$ — функция класса $N_\Gamma(t_0, l_0 + 1)$; $a_0(t)$, $b_0(t)$, $c_0(t)$ — заданные на Γ действительные функции, удовлетворяющие условию Гёльдера иа Γ и аналитические в некоторой окрестности точки t_0, причем $[a_0(t)]^2 + [b_0(t)]^2 \neq 0$ всюду на Γ.

В работе доказано, что однородные задачи $D_g(f)$ и $\Pi_h(f)$ имеют конечное число линейно независимых решений, а для разрешимости неоднородных задач необходимо и достаточно выполнение конечного числа условий типа ортогональности. Получен индекс рассматриваемых задач и указан метод приведения этих задач к аналогичным задачам в классах Гёльдера.

В случае, когда рассматриваемые задачи в классах Гёльдера имеют единственное решение, доказано существование решения этих задач в указанной постановке и получена явная формула числа линейно независимых решений соответствующих однородных задач через l_0, l_1.

§ 1. Некоторые вспомогательные предложения

Без ограничения общности можно предполагать, что область T лежит в верхней полуплоскости и что часть границы Γ области T, содержащая точку t_0, совпадает с интервалом $(-\delta, \delta)$ действительной оси. Этого можно добиться при помощи конформного отображения.

Для простоты изложения будем рассматривать случай, когда $t_0=0$. Общий случай исследуется аналогично.

Рассмотрим сначала уравнение (6) в окрестности особых точек.

Обозначим через $O_{t_j}(r_0)$ $(j=0, 1)$ круг радиуса r_0 с центром в точке t_j, где r_0 — достаточно малое положительное число, и пусть $T_1=O_{t_1}(r_0)$, $T_0=O_{t_0}(r_0)\cap T$.

Пусть $G_k(t, \tau, z, \zeta)$ $(t, z\in O_{t_k}(r_1)$, $\tau, \zeta\in \overline{O}_{t_k}(r_1))$ — функция Римана, $\omega_k(x, y, \xi, \eta)$ — нормированное элементарное решение уравнения

$$E(u)=0 \tag{9}$$

в окрестности точки t_k $(k=0, 1)$ [1], где $O_{t_k}(r_1)$ — круг радиуса $r_1>r_0$ с центром в точка t_k, лежащий целиком в той окрестности точки t_k, в которой аналитичны функции $a(x, y)$, $b(x, y)$, $c(x, y)$; $\overline{O}_{t_k}(r_1)$ — зеркальное отображение области $O_{t_k}(r_1)$ относительно оси Ox.

Известно [1], что $G_k(t, \tau, z, \zeta)$ аналитичны по переменным t, τ, z, ζ в окрестности $(t_k, \overline{t}_k, t_k, \overline{t}_k)$ и $G_k(t_k, \overline{t}_k, t_k, \overline{t}_k)=1$ $(k=0, 1)$. Имеет место следующая

Лемма 1. *В области $T_k\setminus\{t_k\}$ $(k=0, 1)$ уравнение (6) имеет решение, принадлежащее классу $\overline{M}_{T_k}(t_k, l_k)$.*

Доказательство. Известно, что внутри круга $O_{t_k}(r_0)$ $(k==0, 1)$ $\omega_k(x, y, \xi, \eta)$ разлагается в абсолютно и равномерно сходящийся ряд вида

$$\omega_k(x, y, \xi, \eta)=\sum_{j=0}^{\infty} h^{*}_{k,j}(\xi, \eta)\,\omega_{k,j}(x, y), \tag{10}$$

при $|t-t_k|<|z-t_k|$, где $t=\xi+i\eta$, $z=x+iy$, $t_0=x_0+iy_0$, $t_1=x_1+iy_1$,

$$h^{*}_{k,j}(\xi, \eta)=H^{*}_{k,j}(t, \overline{t}, t_k, \overline{t}_k),\quad k=0, 1,\ j=0, 1,\cdots,$$

$$H^{*}_{k,2j}(t, \tau, t_k, \overline{t}_k)=G_k(t, \tau, t, \overline{t}_k)(t-t_k)^j-$$

$$-\int_{t_k}^{t}(\sigma-t_k)^j\left[\frac{\partial}{\partial\sigma}G_k(t, \tau, t_k, \sigma)+A(t_k, \sigma)\,G_k(t, \tau, t_k, \sigma)\right]d\sigma,$$

$$\overset{\bullet}{H}_{k,2j+1}(t,\tau,t_k,\bar{t}_k)=G_k(t,\tau,t_k,\tau)(\tau-t_k)^j-$$

$$-\int_{t_k}^{\tau}(\sigma-\bar{t}_k)^j\left[\frac{\partial}{\partial\sigma}G_k(t,\tau,t_k,\sigma)+A(t_k,\sigma)G_k(t,\tau,\bar{t}_k,\tau)\right]d\sigma,$$

$$\omega_{k,2j}(x,y)=\frac{1}{j!}\frac{\partial^j}{\partial t^j}\Big|\omega_k(x,y,\xi,\eta)-\frac{1}{2}\omega_k(x,y,x_k,y_k)\times$$

$$\times G_k(t,\bar{t}_k,t_k,\bar{t}_k)\Big]_{\substack{\xi=x_k,\\ \eta=y_k}}$$

$$\omega_{k,2j+1}(x,y)=\frac{1}{j!}\frac{\partial^j}{\partial t^j}\Big|\omega_k(x,y,\xi,\eta)-\frac{1}{2}\omega_k(x,y,x_k,y_k)\times$$

$$\times G_k(t_k,\bar{t}_k,t_k,\bar{t}_k)\Big|_{\substack{\xi=x_k,\\ \eta=y_k}}.$$

$A(z,\xi)$, $B(z,\xi)$ — вполне определенные аналитические функции двух комплексных переменных z, ξ в цилиндрической области

$$(O_{t_k}(r_1),\ \bar{O}_{t_k}(r_1)),\ \text{т. е. при}\ z\in O_{t_k}(r_1),\ \zeta\in\bar{O}_{t_k}(r_1),$$

$$\frac{\partial}{\partial t}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial\xi}-i\frac{\partial}{\partial\eta}\right),\ \frac{\partial}{\partial\bar{t}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial\xi}+i\frac{\partial}{\partial\eta}\right).$$

Обозначим

$$\overset{\bullet}{u}_k(x,y)=\iint_{T_k}\left[\omega_k(x,y,\xi,\eta)-\sum_{k=0}^{2[l_k]+1}\overset{\bullet}{h}_{x,j}(\xi,\eta)\,\omega_{k,j}(x,y)\right]f(\xi,\eta)\,d\xi d\eta,\tag{11}$$

где $[l_k]$ — целая часть числа l_k.

Ясно, что функция $\overset{\bullet}{u}_k(x,y)$ $(k=0,1)$ будет решением уравнения (6) в области $T_k\setminus\{t_k\}$.

Подставим $\overset{\bullet}{u}_k(x,y)$ в виде $\overset{\bullet}{u}_k(x,y)=\overset{\bullet}{u}_{k,1}(x,y)+\overset{\bullet}{u}_{k,2}(x,y)+$ $+\overset{\bullet}{u}_{k,3}(x,y)$, где

$$\overset{\bullet}{u}_{k,1}(x,y)=\iint_{\overset{\bullet}{T}_k}\left[\omega_k(x,y,\xi,\eta)-\sum_{j=0}^{2[l_k]+1}\overset{\bullet}{h}_{k,j}(\xi,\eta)\,\omega_{k,j}(x,y)f(\xi,\eta)\right]d\xi d\eta,$$

$$\overset{\bullet}{u}_{k,2}(x,y)=\iint_{T_k\setminus\overset{\bullet}{T}_k}\omega_k(x,y,\xi,\eta)f(\xi,\eta)\,d\xi d\eta,$$

$$\overset{\bullet}{u}_{k,3}(x,y)=\iint_{T_k\setminus T_k}f(\xi,\eta)\sum_{j=0}^{2[l_k]+1}\overset{\bullet}{h}_{k,j}(\xi,\eta)\,\omega_{k,j}(x,y)\,d\xi d\eta,$$

$$\overset{\bullet}{T}_k=\{t\in t_k,\ |t-t_k|<\frac{1}{2}|z-t_k|\}.$$

Нетрудно теперь доказать, что $\overset{\bullet}{u}_{k,j}\in\widetilde{M}_{T_k}(t_k,l_k)$, $k=0,1$, $j=1$, 2, 3. Лемма доказана.

Лемма 2. *Общее решение однородного уравнения* (9) *в классе* $\widetilde{M}_{T_1}(t_1, l_1)$ *определяется формулой*

$$u^*(x, y) = \tilde{u}(x, y) + \sum_{k=1}^{2[l_1]+1} c_k \omega_k^*(x, y), \tag{12}$$

где $\bar{u}$ — *регулярное в* T_1 *решение уравнения* (9).

$$\omega_{2k}^*(x, y) = \operatorname{Re}\omega_{1, 2k}(x, y), \quad \omega_{2k+1}^*(x, y) = \operatorname{Im}\omega_{1, 2k+1}(x, y), \tag{13}$$

c_k $(k = 1, 2, \cdots, 2[l_1]+1)$ — *произвольные действительные постоянные.*

Доказательство. Известно [1], что произвольное решение уравнения (9), регулярное в области $T_1 \setminus \{t_1\}$, представляется в виде

$$u^*(x, y) = \bar{u}(x, y) + \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k \omega_{1, k}(x, y), \tag{14}$$

где $\bar{u}(x, y)$ — регулярное в T_1 решение уравнения (9); ряд, входящий в представление (14), сходится абсолютно и равномерно в любой замкнутой области, лежащей в $T_1 \setminus \{t_1\}$,

$$\beta_k = -\int_{L_1} \left[u \frac{d}{d\nu} h_{1, k}^*(\xi, \eta) - h_{1, k}^*(\xi, \eta) Nu \right] ds, \tag{15}$$

L_1 — произвольная окружность с центром в точке t_1, лежащая в T_1, ν — внутренняя нормаль к L_1 в точке (ξ, η),

$$Nu = \frac{du}{d\nu} + [a\cos(\nu, x) + b\cos(\nu, y)]\, u.$$

Из равенства (15) непосредственно следует, что $\beta_k = 0$, при $k > 2[l_1]+1$ для любой функции из класса $\widetilde{M}_{T_1}(t_1, l_1)$. Лемма доказана.

Лемма 3. *В классе* $\widetilde{M}_{T_1}(0, l_0)$ *существует решение однородного уравнения* (9), *удовлетворяющее граничному условию*

$$u(x, 0) = g(x, 0), \quad -r_0 \leqslant x \leqslant r_0. \tag{16}$$

Доказательство. В работе [1] доказано, что всякое решение уравнения (9), регулярное в односвязной области T_0, представляется в виде

$$u(x, y) = \operatorname{Re}\left[G_0(z, \bar{z}_0, z, \bar{z})\varphi(z) - \int_{z_0}^{z} \varphi(t) \frac{\partial}{\partial t} G_0(t, \bar{z}_0, z, \bar{z})\, dt \right], \tag{17}$$

где $z = x + iy$, $z_0 \in T_0$, $\varphi(z)$ — аналитическая функция переменной z в области T_0. Переходя к пределу в представлении (17), получим

$$\operatorname{Re}\left[G_0(x, \bar{z}_0, x, x)\varphi(x) - \int_{z_0}^{x} \varphi(t) \frac{\partial}{\partial t} G_0(t, \bar{z}_0, x, x)\, dt \right] =$$

$$= g(x, 0); \quad x \in (-r_0, r_0), \ x \neq 0. \tag{18}$$

Рассмотрим уравнение

$$G_0(z, \bar{z}_0, z, z)\varphi(z) - \int_{z_0}^{z} \varphi(t)\frac{\partial}{\partial t} G_0(t, \bar{z}_0, z, z)\,dt = \psi_0(z), \tag{19}$$

где $\varphi(z)$ — искомая аналитическая функция в области T_0,

$$\psi_0(z) = \frac{1}{z^{[l_0]+1}\pi i}\int_{-r_0}^{r_0} \frac{t^{[l_0]+1} g(t, 0)}{t-z}\,dt. \tag{20}$$

Функция $\psi_0(z)$ аналитична в области T_0 и ее действительная часть принимает на интервале $(-r_0, r_0)$ значения $g(x, 0)$.

Уравнение (19) есть уравнение типа Вольтерра в области T_0. Следовательно, оно имеет единственное решение $\varphi_0(z)$, аналитическое в этой области. Подставляя $\varphi_0(z)$ в формулу (17), получим решение уравнения (9), принимающее значения $g_0(x, 0)$ на интервале $(-r_0, r_0)$. Обозначим это решение через $u^*_{T_0}(x, y)$. Заметим, что функция (20) принадлежит классу $\widetilde{M}_{T_0}(0, l_0)$. Поэтому найденное нами решение $u^*_{T_0}(x, y)$ также принадлежит классу $\widetilde{M}_{T_0}(0, l_0)$. Лемма 3 доказана.

Следствие 1. В классе $\widetilde{M}_{T_0}(0, l_0)$ существует решение $u^*_{T_0}(x, y)$ неоднородного уравнения (6), удовлетворяющее граничному условию (16) при $-r_2 \leqslant x \leqslant r_2$, где r_2 — достаточно малое положительное число $(r_2 < r_0)$.

Найдем теперь класс аналитических в области T_0 функций, подставляя которые в формулу (17), получим все решения уравнения (9), принадлежащие классу $\widetilde{M}_{T_0}(0, l_0)$.

Пусть $u(x, y)$ — решение уравнения (9) из класса $\widetilde{M}_{T_0}(0, l_0)$. Тогда его можно представить в виде (см. [1])

$$u(x, y) = \alpha_0 G_0(z_0, \bar{z}_0, z, \bar{z}) + \int_{z_0}^{z} G_0(t, \bar{z}_0, z, \bar{z})\varphi'(t)\,dt +$$

$$+ \int_{\bar{z}_0}^{\bar{z}} G_0(z_0, \tau, z, \bar{z})\varphi^{*\prime}(\tau)\,d\tau, \tag{17'}$$

где $\alpha_0 = \bar{\alpha}_0 = \text{const}$, $\varphi^*(\bar{z}) = \overline{\varphi(z)}$, $z_0 = ir_0$, $\varphi(z)$ — аналитическая функция в области T_0.

Вычислим

$$\frac{\partial u}{\partial z} \text{ и } \frac{\partial u}{\partial \bar{z}}, \text{ где } \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right),$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \alpha_0\frac{\partial G_0(z_0, \bar{z}_0, z, \bar{z})}{\partial z} + G_0(z, \bar{z}_0, z, \bar{z})\varphi'(z) +$$

$$+\int_{z_0}^{z}\varphi'(t)\frac{\partial}{\partial z}G_0(t,\bar z_0,z,\bar z)\,dt+\int_{\bar z_0}^{\bar z}\varphi^{*\prime}(\tau)\frac{\partial G_0(z_0,\tau,z,\bar z)}{\partial z}\,d\tau, \tag{21}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \bar z}=a_0\frac{\partial G_0(z_0,\bar z_0,z,\bar z)}{\partial \bar z}+G_0(z,\bar z_0,z,\bar z)\varphi^{*\prime}(\bar z)+$$

$$+\int_{z_0}^{z}\varphi'(t)\frac{\partial}{\partial \bar z}G_0(t,\bar z_0,z,\bar z)\,dt+\int_{\bar z_0}^{\bar z}\frac{\partial G_0(z_0,\tau,z,\bar z)}{\partial \bar z}\varphi^{*\prime}(\tau)\,d\tau. \tag{22}$$

Из (21) и (22) имеем

$$|\varphi'(z)|\leqslant c_1+c_2\left|\left|\int_{z_0}^{z}|\varphi'(t)|\,|dt|\right|+c_2\left|\int_{\bar z_0}^{\bar z}|\varphi^{*\prime}(\tau)|\,|d\tau|\right|+\left|\frac{\partial u}{\partial z}\right|\right|, \tag{23}$$

$$|\varphi^{*\prime}(z)|\leqslant c_1+c_2\left|\left|\int_{z_0}^{z}|\varphi'(t)|\,|dt|\right|+c_2\left|\int_{\bar z_0}^{\bar z}|\varphi^{*\prime}(\tau)|\,|d\tau|\right|+\left|\frac{\partial u}{\partial \bar z}\right|\right|, \tag{24}$$

где c_1, c_2 — положительные постоянные.

Обозначим

$$\chi_1(r)=\max_{\substack{|z|>r\\ z\in T_0}}|\varphi'(z)|,\quad \chi_2(r)=\max_{\substack{|z|>r\\ z\in T_0}}|\varphi^{*\prime}(\bar z)|,\quad \chi_3(r)=\max_{\substack{|z|>r\\ z\in T_0}}\left\{\left|\frac{\partial u}{\partial z}\right|,\ \left|\frac{\partial u}{\partial \bar z}\right|\right\}.$$

Используя эти обозначения из (23) и (24) получим

$$\chi_j(r)\leqslant c_1+3c_2r_0\chi_1(r)+3c_2r_0\chi_2(r)+\chi_3(r),\quad j=1,2. \tag{25}$$

Решая систему неравенств (25) относительно $\chi_1(r)$ и $\chi_2(r)$, имеем

$$\chi_j(r)\leqslant c_4(1+\chi_3(r)),\quad j=1,\ 2,\quad c_4=\mathrm{const}. \tag{26}$$

Из неравенств (26) следует, что всякое решение уравнения (9), регулярное в области T_0 и принадлежащее классу $\tilde M_{T_0}(0, l_0)$, представляется формулой (17), где $\varphi(z)$ — аналитическая функция переменной z, принадлежащая классу $\tilde M_{T_0}(0, l_0)$. С другой стороны очевидно, что подставляя в формулу (17) аналитическую функцию $\varphi(z)$, принадлежащую классу $\tilde M_{T_0}(0, l_0)$, получим решение уравнения (9), принадлежащее классу $\tilde M_{T_0}(0, l_0)$.

Найдем теперь общее решение уравнения (9), регулярное в области T_0, принимающее значения $g(x, 0)$ на интервале $(-r_0, r_0)$ и принадлежащее классу $\tilde M_{T_0}(0, l_0)$. Будем искать его в виде

$$\tilde u_{T_0}(x, y)=u^*_{T_0}(x, y)+v_0(x, y), \tag{27}$$

где $u^*_{T_0}(x, y)$ — найденное нами частное решение задачи (9), (16), принадлежащее классу $\tilde M_{T_0}(0, l_0)$.

Подставляя (27) в уравнение (9) и в граничное условие (16), относительно $v_0(x, y)$ получим следующую задачу.

Задача D_{T_0}. Требуется найти регулярное в T_0 решение уравнения (9), принадлежащее классу $\tilde{M}_{T_0}(0, l_0)$, принимающее нулевые граничные значения всюду на интервале $(-r_0, r_0)$ за исключением точки t_0.

Как было указано выше, если решение $v_0(x, y)$ уравнения (9) принадлежит классу $\tilde{M}_{T_0}(0, l_0)$, то оно определяется формулой (17), где $\varphi(z)$ — аналитическая функция из того же класса. Так как это решение принимает на интервале $(-r_0, r_0)$ нулевые значения, за исключением точки $t_0 = 0$, то

$$\operatorname{Re}\psi(z) = 0, \text{ при } z \in (-r_0, r_0), \tag{28}$$

где $\psi(z)$ — правая часть уравнения (19). Ясно, что $\psi(z) \in \tilde{M}_{T_0}(0, l_0)$.

Обозначим

$$\Psi(z) = \begin{cases} \psi(z), & z \in T_0, \\ -\overline{\psi(\bar{z})}, & \bar{z} \in \overline{T}_0, \end{cases}$$

где $\overline{T}_0$ — зеркальное отображение области T_0 относительно оси Ox.

Ясно, что $\Psi(z)$ — однозначная аналитическая функция в области $\{T_0 \cup \overline{T}_0\} \setminus \{0\}$. Так как $\psi(z) \in \tilde{M}_{T_0}(0, l_0)$, то $\Psi(z)$ имеет в точке $z = 0$ полюс порядка $[l_0]$. Следовательно, $\Psi(z)$ можно представить в виде

$$\Psi(z) = \sum_{k=1}^{[l_0]} d_k \frac{i}{z^k} + \Psi^*(z), \tag{29}$$

где $\Psi^*(z)$ — аналитическая в области $\overline{T_0 \cup \overline{T}_0}$ функция переменной z. Из (28) следует, что d_k — действительные постоянные.

Обозначим через $\varphi_k(z)$ решение уравнения (19) относительно $\varphi(z)$, при $\psi_0(z) = \frac{i}{z^k}$ $(k = 1, 2, \cdots, [l_0])$, а через $\varphi_{[l_0]+1}(z)$ — решение уравнения (19) при $\psi_0(z) = \Psi^*(z)$, $z \in T_0$.

Пусть

$$v_{0,k}(x, y) = \operatorname{Re}\left[G_0(z, \bar{z}_0, z, \bar{z})\,\varphi_k(z) - \int_{z_0}^{z} \varphi(t)\frac{\partial}{\partial t} G_0(t, z_0, z, \bar{z})\,dt\right],$$

$$k = 1, 2, \cdots, [l_0] + 1. \tag{30}$$

Из вышеприведенных рассуждений следует

Лемма 4. *Общее решение задачи D_{T_0} представляется в виде*

$$v_0(x, y) = \sum_{k=1}^{[l_0]} d_k v_{0,k}(x, y) + v_{0,[l_0]+1}(x, y), \tag{31}$$

где d_k $(k = 1, 2, \cdots, [l_0])$ — произвольные действительные постоянные $v_{0,[l_0]+1}(x, y)$ — регулярное в области T_0 решение уравнения (9), принимающее на интервале $(-r_0, r_0)$ нулевые значения.

Рассмотрим теперь общую задачу в окрестности точки $t_0 = 0$.

Лемма 5. *В классе $\tilde{M}_{T_0}(0, l_0)$ существует решение $\tilde{w}_0(x, y)$ неоднородного уравнения* (6), *удовлетворяющее граничному условию*

$$L(w_0(t)) = h(t), \quad t \in (-r_0, r_0), \ t \neq 0. \tag{32}$$

Доказательство. Пусть $A_0(z)$, $B_0(z)$, $C_0(z)$ — аналитические в круге $O_{l_0}(r_0)$ функции переменной $z = x + iy$, принимающие на интервале $(-r_0, r_0)$ значения $a_0(x, 0)$, $b_0(x, 0)$, $c_0(x, 0)$, соответственно. Тогда граничное условие (32) можно записать в виде

$$L(w_0(t)) = \lim_{\substack{z \to x \\ x \neq 0}} \left[A_0(z) \frac{\partial w_0}{\partial x} + B_0(z) \frac{\partial w_0}{\partial y} + c_0(z) w_0 \right] =$$

$$= h(x, 0), \quad x \in (-r_0, r_0). \tag{32'}$$

Сделаем замену

$$\tilde{w}_0(x, y) = u^{*}(x, y) + \overset{*}{w}_0(x, y), \tag{33}$$

где $u_0^{*}(x, y)$ — решение уравнения (6), построенное в (11). Подставляя (33) в уравнение (6) и граничное условие (32), для определения $w_0^{*}(x, y)$ получим уравнение (9) с граничным условием

$$L(w_0^{*}(t)) = h_1(x, 0), \quad x \in (-r_0, r_0), \tag{34}$$

где $h_1(x, 0) = h(x, 0) - L(u^{*}_0(x, y))|_{y=0}$.

Известно ([1]), что всякое решение уравнения (9), регулярное в области T_0, представляется в виде

$$\overset{*}{w}_0(x, y) = \alpha_0 G_0(z_0, \bar{z}_0, z, \bar{z}) + \operatorname{Re} \int_{z_0}^{z} \Phi(t) G_0(t, \bar{z}_0, z, \bar{z})\, dt, \tag{35}$$

где $\Phi(z)$—аналитическая в области T_0 функция переменной z.

Имеем

$$\frac{\partial w_0^{*}}{\partial x} = \left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right) w_0^{*}(x, y) = \alpha_0 \left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right) G_0(z_0, \bar{z}_0, z, \bar{z}) +$$

$$+ \operatorname{Re} \left[\Phi(z) G_0(z, \bar{z}_0, z, \bar{z}) + \int_{z_0}^{z} \Phi(t) \left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right) G_0(t, \bar{z}_0, z, \bar{z})\, dt \right], \tag{36}$$

$$\frac{\partial \overset{*}{w}_0}{\partial y} = i\left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right) w_0^{*}(x, y) = i\alpha_0 \left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right) G_0(z_0, \bar{z}_0, z, \bar{z}) +$$

$$+ \operatorname{Re} \left[i\Phi(z) G_0(z, \bar{z}_0, z, \bar{z}) + i \int_{z_0}^{z} \Phi(t) \left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right) G_0(t, \bar{z}_0, z, \bar{z})\, dt. \right. \tag{37}$$

Рассмотрим уравнение

$$A_1(z)\Phi(z)+\int_{z^0}^{z}\Phi(t)\,G_0^*(t,z)\,dt+G_1^*(z)=F(z), \tag{38}$$

где

$$A_1(z)=[A_0(z)+iB_0(z)]\,G_0(z,\bar z_0,z,z),$$

$$G_0^*(t,z)=G_2^*(t,z,z),\quad G_1^*(z)=G_3^*(z,z),$$

$$G_2^*(t,z,\bar z)=\left[A_0(z)\left(\frac{\partial}{\partial z}+\frac{\partial}{\partial \bar z}\right)+iB_0(z)\left(\frac{\partial}{\partial z}-\frac{\partial}{\partial \bar z}\right)+C_0(z)\,G_0(t,\bar z_0,z,\bar z),\right.$$

$$G_3^*(z,\bar z)=\alpha_0\left[A_0(z)\left(\frac{\partial}{\partial z}+\frac{\partial}{\partial \bar z}\right)+iB_0(z)\left(\frac{\partial}{\partial z}-\frac{\partial}{\partial \bar z}\right)+C_0(z)\right]G_0(z_0,\bar z_0,z,\bar z).$$

Обозначим через $\Phi_0(z)$ решение уравнения (38), если

$$F(z)=\frac{1}{z^{[l_0]+1}\pi i}\int_{-r_0}^{r_0}\frac{x^{[l_0]+1}h_1(x,0)}{x-z}\,dx.$$

Ясно, что функция $w_0^*(x, y)$, определенная формулой (35), при $\Phi(t)=\Phi_0(t)$ будет решением задачи (9), (34) в классе $\bar M_{T_0}(0, l_0)$, а $\tilde w_0(x, y)$, определенная формулой (33), будет решением задачи (6), (32) в том же классе. Лемма доказана.

Обозначим через $\Phi_k(z)$ решение уравнения (38), при $F(z)=F_k(z)$, где $F_k(z)=\frac{i}{z^k}$ $(k=1, 2,\cdots, [l_0]+1)$.

Аналогично лемме 4 доказывается следующая

Лемма 6. *Общее решение задачи* (6), (28), *принадлежащее классу* $\bar M_{T_0}(0, l_0)$, *представляется в виде*

$$w_0(x,y)=\tilde w_0(x,y)+\sum_{k=1}^{[l_0]+1}d_k w_k^*(x,y)+\tilde w(x,y), \tag{39}$$

где $\tilde w_0(x, y)$ — *решение задачи* (6), (32), *построенное при доказательстве леммы* 5, $w_k^*(x, y)$ *определяются формулой* (29), *при замене* $\Phi(z)$ *на* $\Phi_k(z)$; $\tilde w(x, y)$ — *регулярное решение уравнения* (9) *в области* T_0, *удовлетворяющее граничному условию* $L(\tilde w(x, y))=0$ *всюду на интервале* $(-r_0, r_0)$; $d_1, d_2,\cdots, d_{[l_0]+1}$ — *произвольные действительные постоянные.*

§ 2. Исследование задач $D_g(f)$ и $\Pi_h(f)$

Пусть r_2 — достаточно малое положительное число ($r_2<r_0$), $\alpha_i(t)=\alpha_i(x, y)$ $(i=0, 1)$ — бесконечно дифференцируемая действительная функция, равная единице при $|t-t_i|<r_2$ и равная нулю при $|t-t_i|>r_0$.

Из лемм 1—4 следует, что любое решение задачи $D_g(f)$, принадлежащее классу $\tilde{M}^T(0,\ t_1,\ l_0,\ l_1)$, можно представить в виде

$$u(x, y) = v(x, y) + \alpha_0(x, y)\, u_{T_0}(x, y) + \tilde{v}_0(x, y) + \alpha_1(x, y)\, \overset{*}{u_1}(x, y) +$$
$$+ \tilde{v}_1(x, y), \tag{40}$$

где

$$\tilde{v}_0(x, y) = \alpha_0(x, y) \sum_{k=1}^{[l_0]} d_k v_{0,k}(x, y),\quad \tilde{v}_1(x, y) = \alpha_1(x, y) \sum_{k=1}^{2[l_1]+1} c_k \omega_k^*(x, y), \tag{41}$$

$u_{T_0}(x, y)$ — решение уравнения (6), принадлежащее классу $\tilde{M}_{T_0}(0, l_0)$ и упомянутое в следствии 1, $v_{0,k}(x, y)$ $(k = 1, 2, \cdots, [l_0])$ определяются формулой (30), $u_1^*(x, y)$ определяется формулой (11), $\omega_k^*(x, y)$ $(k = 1, 2, \cdots, 2[l_1] + 1)$ — функции, определенные формулой (13), $c_1, c_2, \cdots, c_{2[l_1]+1}$, $d_1, d_2, \cdots, d_{[l_0]}$ — действительные постоянные, $v(x, y)$ — неопределенная пока функция, непрерывная в замкнутой области $T+\Gamma$ и дважды непрерывно дифференцируемая в области T.

Подставляя (40) в уравнение (6) и граничное условие (7), относительно $v(x, y)$ получим следующую задачу:

Найти регулярное в области T и непрерывное в замкнутой области $T + \Gamma$ решение уравнения

$$E(v(x, y)) = f_1(x, y), \tag{42}$$

удовлетворяющее граничному условию

$$v(t) = g_1(t),\ t \in \Gamma, \tag{43}$$

где

$$f_1(x, y) = f(x, y) - E(\alpha_0(x, y)\, u_{T_0}(x, y) + \tilde{v}_0(x, y) +$$
$$+ \alpha_1(x, y)\, \overset{*}{u_1}(x, y) + \tilde{v}_1(x, y)), \tag{44}$$

$$g_1(t) = g(t) - \alpha_0(t)\, u_{T_0}(t) - \tilde{v}_0(t),\ t \in \Gamma. \tag{45}$$

Заметим что функции $f_1(x, y)$ и $g_1\ (x, y)$ нерерывны на $T+\Gamma$ и Γ соответственно, причем $f_1(x, y)$ удовлетворяет условию Гёльдера внутри любой замкнутой области $T_0 \subset T$.

Задача (42), (43) в классах Гёльдера полностью исследована в работе [2]. В этой работе доказана фредгольмовость этой задачи в принятых нами условиях.

Предположим, что однородная задача $D_g\ (f)$ $(g = 0,\ f = 0)$ имеет ровно m линейно независимых, регулярных в области T, решений, непрерывных в замкнутой области $T+\Gamma$. Известно ([2]), что в этом случае для разрешимости задачи (42), (43) необходимо и достаточно выполнение условий

$$\int_T f_1(x, y)\, \mu_j(x, y)\, dxdy + \int_\Gamma g_1(x, y)\, \nu_j(x, y)\, ds = 0,\ j = 1, 2, \cdots, m, \tag{46}$$

где $\mu_j(x, y)$ и $\nu_j(x, y)$ -- вполне определенные непрерывные функции, заданные на T и Г, соответственно, причем система $\{\mu_j(t), \nu_j(t)\}_{j=1}^m$ линейно независима.

Подставляя $f_1(x, y)$ и $g_1(x, y)$ из (44) и (45) в условия (46), получим

$$q_j \equiv \int_T f_2(x, y)\mu_j(x, y)\,dxdy + \int_\Gamma g_2(x, y)\nu_j(x, y)\,ds +$$

$$+\sum_{k=1}^{[l_0]} \alpha_{j,k} d_k + \sum_{k=1}^{2[l_1]+1} \beta_{j,k} c_k = 0,\ j=1, 2, \cdots, m, \tag{47}$$

где

$$f_2(x, y) = f(x, y) - E(a_0(x, y)u_{T_0}(x, y) + u_1^*(x, y)),$$

$$g_2(t) = g(t) - a_0(t)u_{T_0}(t),\quad t \in \Gamma,$$

$$\alpha_{j,k} = -\int_T \mu_j(x, y)E(a_0(x, y)v_{0,k}(x, y))\,dxdy, \tag{48}$$

$$\beta_{j,k} = -\int_T \mu_j(x, y)E(a_1(x, y)\omega_k^*(x, y))\,dxdy. \tag{49}$$

Ясно, что интегралы (48), (49) сходятся.

Обозначим

$$\alpha = \{\alpha_{j,k}\}_{j=1,\ k=1}^{m,\ [l_0]},\quad \beta = \{\beta_{j,k}\}_{j=1,\ k=1}^{m,\ 2[l_1]+1},\quad \gamma = (\alpha, \beta),$$

и пусть ранг матрицы γ равен r. Ясно, что $0 \leqslant r \leqslant m$.

Не ограничивая общности можно предполагать, что r последних строк матрицы γ линейно независимы.

В случае, когда $r = m$, условия (47) можно обеспечить при помощи соответствующего выбора постоянных c_k и d_k, т. е. в этом случае неоднородная задача $D_2(f)$ всегда разрешима в классе $\overline{M}_T(0, t_1, l_0, l_1)$.

В случае, когда $r < m$ условия (47) эквивалентны условиям

$$q_j - \sum_{k=m-r+1}^{m} \delta_{j,k} q_k = 0,\ j = 1, 2, \cdots, m-r, \tag{50}$$

$$q_j = 0,\ j = m-r+1,\ m-r+2, \cdots, m, \tag{51}$$

где $\delta_{j,k}$ — произвольные действительные постоянные.

Так как первые $m-r$ строк матрицы γ линейно зависят от остальных r строк, то $\delta_{j,k}$ можно выбрать так, чтобы условия (50) не содержали постоянных c_k и d_j $(k=1, 2, \cdots, 2[l_1]+1,\ j=1, 2, \cdots, [l_0])$. При таком выборе $\delta_{j,k}$ условия (50) примут вид

$$\int_T f_2(x, y)\mu_j^*(x, y)\,dxdy + \int_\Gamma g_2(x, y)\nu_j^*(x, y)\,ds = 0,\ j = 1, 2, \cdots, m-r, \tag{52}$$

где $\mu_j^*(x, y)$ и $\nu_j^*(x, y)$ $(j=1, 2, \cdots, m-r)$ — непрерывные функции, заданные на $T+\Gamma$ и Г, соответственно, причем система $\{\mu_j^*(x, y), \nu_j^*(x, y)\}_{j=1}^{m-r}$ линейно независима.

Условиям (51) всегда можно удовлетворить при помощи выбора c_k и d_j. Следовательно, для разрешимости неоднородной задачи $D_g(f)$ в классе $\bar{M}_T(0, t_1, l_0, l_1)$ необходимо и достаточно выполнение условий (52).

Правые части в равенствах (52) являются линейными функционалами относительно функций $f(x, y) \in \bar{M}_T(0, t_1, l_0+2, l_1+2)$, $g(x, y) \in N_\Gamma(0, l_0)$. Докажем, что они линейно независимы. Для этого достаточно показать линейную независимость этих функционалов в случае, когда $f(x, y)$ и $g(x, y)$ удовлетворяют условию Гёльдера в T и Γ, соответственно, причем $f(x, y)$ непрерывна в $T+\Gamma$. В этом случае

$$f_2(x, y) = f(x, y), \quad g_2(x, y) = g(x, y)$$

и условия имеют вид

$$\int_T f(x, y)\mu_j^*(x, y)\,dxdy + \int_\Gamma g(x, y)\nu_j^*(x, y)\,ds = 0, \quad j = 1, 2, \cdots, m-r. \tag{52'}$$

Отсюда непосредственно следует наше утверждение. Следовательно, число линейно независимых условий разрешимости задачи $D_g(f)$ в классе $\bar{M}_T(0, t_1, l_0, l_1)$ равно $k' = m - r$.

Теперь найдем число линейно независимых решений однородной задачи $D_g(f)$ в классе $\tilde{M}_T(0, t_0, l_0, l_1)$. В случае однородной задачи условия (52) превращаются в тождества, а условия (51) представляют собой систему r алгебраических уравнений относительно c_k и d_j ранг основной матрицы которой равен r. Поэтому система линейных алгебраических уравнений (51), (52) имеет $k_0 = [l_0] + 2[l_1] + 1 - r$ линейно независимых решений. Каждому решению системы (51), 52) соответствует вполне определенное решение однородного уравнения $D_g(f)$, имеющее особенность и принадлежащее классу $\tilde{M}_T(0, t_1, l_0, l_1)$, причем линейно независимым решениям системы (51), (52) соответствуют линейно независимые решения однородной задачи $D_g(f)$. Обозначим их через $u_1(x, y), u_2(x, y), \cdots, u_{k_0}(x, y)$ $(k_0 = [l_0] + 2[l_1] - r + 1$.

С другой стороны, по предположению, однородная задача $D_g(f)$ имеет ровно m линейно независимых, регулярных в T решений, непрерывных в области $T+\Gamma$. Пусть $u_{k_0+1}(x, y) u_{k_0+2}(x, y), \cdots, u_{k_0+m}(x, y)$ — эти решения. Легко убедиться, что любая нетривиальная линейная комбинация решений $u_1(x, y), u_2(x, y), \cdots, u_{k_0}(x, y)$ также имеет особенность в одной из точек t_0 или t_1. Поэтому система функций $\{u_k(x, y)\}_{k=1}^{k_0+m}$ линейно независима и представляет собой полную систему линейно независимых решений однородной задачи $D_g(f)$ в классе $\tilde{M}_T(0, t_1, l_0, l_1)$.

Определение. Индексом задачи $D_g(f)$ называется разность между числом линейно независимых решений однородной задачи $D_g(f)$ и числом условий разрешимости неоднородной задачи.

Итак, при сделанных выше предположениях, мы доказали следующие теоремы.

Теорема 1. *В классе* $\widetilde{M}_T(0, t_1, l_0, l_1)$ *однородная задача* $D_g(f)$ *имеет конечное число* $(k = m + [l_0] + 2[l_1] - r + 1)$ *линейно независимых решений, а для разрешимости неоднородной задачи в том же классе необходимо и достаточно выполнения конечного числа* $(k' = m - r)$ *условий ортогональности* (52′).

Теорема 2. *Индекс задачи* $D_g(f)$ *в классе* $\widetilde{M}_T(0, t_1, l_0, l_1)$ *определяется формулой*

$$\varkappa = k - k' = [l_0] + 2[l_1] + 1.$$

Известно, что при $c(x, y) \leqslant 0$ однородная задача $D_g(f)$ в классах Гёльдера имеет только тривиальное решение. В этом случае из теоремы 1 следует

Теорема 3. *Если* $c(x, y) \leqslant 0$, *то в классе* $\widetilde{M}_T(0, t_1, l_0, l_1)$ *однородная задача* $D_g(f)$ *имеет* $[l_0] + 2[l_1] + 1$ *линейно независимых решений, а неоднородная задача всегда разрешима.*

Рассмотрим теперь задачу $\Pi_h(f)$. Из лемм 1, 5, 6 следует, что любое решение задачи $\Pi_h(f)$, принадлежащее классу $\widetilde{M}_T(0, t_1, l_0, l_1)$, можно представить в виде

$$u(x, y) = w(x, y) + \alpha_0(x, y)\widetilde{w}_0(x, y) + \widetilde{w}^*(x, y) + \alpha_1(x, y)\overset{*}{u_1}(x, y) + \\ + \widetilde{v}_1(x, y), \tag{53}$$

де $\alpha_j(x, y)$ $(j = 0, 1)$ $\overset{*}{u_1}(x, y)$, $\widetilde{v}_1(x, y)$ те же, что и при исследовании задачи $D_g(f)$,

$$\widetilde{w}^*(x, y) = \alpha_0(x, y) \sum_{k=1}^{[l_0]+1} d_k \overset{*}{w}_k(x, y), \tag{54}$$

$\widetilde{w}_0(x, y)$ — функция, определенная формулой (33), $\overset{*}{w}_k(x, y)$ $(k = 1, 2, \cdots, [l_0] + 1)$ — функции, входящие в представление (39), $d_1, d_2, \cdots, d_{[l_0]+1}$ — действительные постоянные числа, $w(x, y)$ — пока неопределенная функция, дважды непрерывно дифференцируемая в области T, граничные значения первых производных которой непрерывны на кривой Γ.

Подставляя (53) в уравнение (6) и граничное условие (8), относительно $w(x, y)$ получим следующую задачу.

Требуется найти регулярное в области T решение уравнения

$$E(w(x, y)) = f_0(x, y), \tag{55}$$

удовлетворяющее граничному условию

$$L(w(t)) = h_0(t), \quad t \in \Gamma, \tag{56}$$

где

$$f_0(x, y) = f(x, y) - E\{\alpha_0(x, y)\widetilde{w}_0(x, y) + \widetilde{w}^*(x, y) + \\ + \alpha_1(x, y)\overset{*}{u_1}(x, y) + v_1(x, y)\},$$

$$h_0(t) = h(t) - L\{\alpha_0(t)\widetilde{v}_0(t) + \widetilde{w}^*(t)\}.$$

Заметим, что функции $f_0(x, y)$ и $h_0(x, y)$ непрерывны в $T+\Gamma$ и Γ соответственно, причем $f_0(x, y)$ удовлетворяет условию Гёльдера внутри любой замкнутой области $T'\subset T$.

Задача (55), (56) полностью исследована в работе [2]. Доказано. что в принятых нами условиях, эта задача является нетеровой, причем ее индекс равен $\varkappa_0=2+2p$, где $p=\frac{1}{2\pi}[\arg a_0^*(t)]_\Gamma$, $a_0^*(t)=a_0(t)+ib_0(t)$, $[\arg a_0^*(t)]_\Gamma$ — приращение функции $\arg a_0^*(t)$, когда t один раз обходит контур Γ в положительном направлении.

Совершенно аналогично, как и в случае задачи $D_g(f)$, доказываются следующие теоремы.

Теорема 4. *Однородная задача* $\Pi_h(f)$ *имеет конечное число линейно независимых решений в классе* $\bar{M}_T(0, t_1, l_0, l_1)$, *а для разрешимости неоднородной задачи (в том же классе) необходимо и достаточно выполнения конечного числа условий (аналогичных условиям (52)).*

Теорема 5. *Индекс задачи* $\Pi_h(f)$ *в классе* $\tilde{M}_T(0, t_1, l_0, l_1)$ *определяется формулой*

$$\varkappa_1=\varkappa_0+[l_0]+2[l_1]+2.$$

Рассмотрим теперь задачу с наклонной производной для уравнения (6) в классе $\bar{M}_T(0, t_1, l_0, l_1)$. Граничное условие в этом случае запишется в виде

$$\frac{\partial u}{\partial l}+\alpha(x, y)u=h(x, y), (x, y)\in\Gamma, \tag{57}$$

где l — направление, которое меняется непрерывно и в каждой точке образует острый угол с внутренней нормалью $\mathbf{N}$ к кривой Γ, $\alpha(x, y)\leqslant 0$ — функция, удовлетворяющая условию Гёльдера на Γ, $h(x, y)$ — та же, что и в задаче $\Pi_h(f)$. Предполагается также, что функции $\alpha(x, 0)$ и $\cos(\mathbf{N}, y)$ аналитичны в окрестности точки $t_0=0$.

В работе [2] доказана фредгольмовость этой задачи в классах Гёльдера, т. е. $\varkappa_0=0$. Там же доказана однозначная разрешимость задачи в классах Гёльдера в случае, когда $c(x, y)\leqslant 0$, $\alpha(x, y)\leqslant 0$ и одна из функций $c(x, y)$ или $\alpha(x, y)$ тождественно не равна нулю.

Применяя метод доказательства теоремы 3, в этом случае получим следующий результат.

Теорема 6. *Если* $c(x, y)\leqslant 0$, $\alpha(x, y)\leqslant 0$ *и одна из функций* $c(x, y)$ *или* $\alpha(x, y)$ *тождественно не равна нулю, то однородная задача* (9), (57) *имеет ровно* $[l_0]+2[l_1]+2$ *линейно независимых решений в классе* $\tilde{M}_T(0, t_1, l_0, l_1)$, *а неоднородная задача всегда разрешима в этом классе.*

В заключение выражаю благодарность профессору Н. Е. Товмасяну, под руководством которого выполнена работа.

Ереванский политехнический
институт им. К. Маркса

Поступила 29. IV. 1985

Ս. Հ. ԽԱՉԱՏՐՅԱՆ. Խզվող եզրային տվյալներով եզրային խնդիրներ երկրորդ կարգի էլիպտիկ հավասարումների համար հարթության վրա *(ամփոփում)*

Աշխատանքում դիտարկվում են Դիրիխլեի և ընդհանուր եզրային խնդիրները

$$E(u) \equiv \Delta u + a(x, y)\frac{\partial u}{\partial x} + b(x, y)\frac{\partial u}{\partial y} + c(x, y)\, u = f(x, y)$$

հավասարման համար խզվող ֆունկցիաների դասերում, երբ $f(x, y)$-ը և եզրային ֆունկցիաները վերջավոր թվով կետերում ունեն եզակիություններ, որտեղ

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \ a(x, y)\text{-ը}, \ b(x, y)\text{-ը}, \ c(x, y)\text{-ը} \ z = x + iy$$

հարթության ինչ որ փակ տիրույթում Գյոլդերի պայմանին բավարարող տրված իրական ֆունկցիաներ են։

Աշխատանքում ապացուցված է, որ համասեռ խնդիրներն ունեն վերջավոր թվով գծորեն անկախ լուծումներ, իսկ անհամասեռ խնդիրների լուծելիության համար անհրաժեշտ է և բավարար, որպեսզի տեղի ունենան վերջավոր թվով օրթոգոնալության տիպի պայմաններ։ Հաշվված է դիտարկվող խնդիրների ինդեքսը և նշված է այդ խնդիրները Գյոլդերի դասերում նույնանման խնդիրների բերման մեթոդ։

Այն դեպքում, երբ $c(x, y) \leqslant 0$ ապացուցված է անհամասեռ խնդիրների լուծման գոյությունը և ստացված է բանաձև համասեռ խնդիրների գծորեն անկախ լուծումների թիվը հաշվելու համար։

S. H. KHATCHATRIAN. *Boundary value problems with discontinuous boundary conditions for the second order elliptic equations on the plane* (summary)

Dirichlet's problem and the general boundary value problem for the equation

$$E(u) = \Delta u + a(x, y)\frac{\partial u}{\partial x} + b(x, y)\frac{\partial u}{\partial y} + c(x, y)\, u = f(x, y)$$

in some classes of breaking functions are investigated. Here

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \text{ and } a(x, y), \ b(x, y), \ c(x, y)$$

satisfy Holder's condition in any closed domain of complex plane $f(x, y)$ and the boundary conditions may have singularities in a finite number of points.

It is proved that the homogeneous problems have a finite number of linear independent solutions. The non-homogeneous problems have a solution if and only if there a finite number of orthogonality conditions are satisfied. The index of the problem is calculated. A method of reduction to the analogous problem in Holder's classes is mentioned.

In the case where $c(x, y) < 0$ the existence of the solutions of non-homogeneous problems is proved and a formulae for the number of linearly independent solutions is found.

ЛИТЕРАТУРА

1. *И. Н. Векуа.* Новые методы решения эллиптических уравнений, Гостехиздат, 1948.
2. *А. В. Бицадзе.* Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка, М., «Наука», 1966.
3. *Н. Е. Товмасян.* О существовании и единственности решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа в классах функций, имеющих особенности на границе области, Сибирский матем. журн., том II, № 2, 1961, 290—312.

4. *В. А. Оганян.* Задача Дирихле для эллиптических систем дифференциальных уравнений с разрывными граничными условиями, Изв. АН Арм.ССР, «Математика», XVI, № 6, 1981, 465—477.
5. *В. А. Оганян.* Задача Пуанкаре для эллиптических систем дифференциальных уравнений второго порядка с разрывными граничными условиями, Изв. АН Арм.ССР, «Математика», XIX, № 5, 1984, 477—489.