ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XX, № 2, 1985 Математика

УДК 517.9

С. Я. ХАВИНСОН

О ПОЛНЫХ СИСТЕМАХ В БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Введение

Настоящая работа связана с изучением вопросов аппроксимации с учетом величин коэффициентов приближающих агрегатов. Разработка общих вопросов такой аппроксимации началась с работы Дейвиса и Фань-Цзы [1] (см. также [2]) и была продолжена в работах автора [3]—[5]. Учет величин коэффициентов аппроксимирующих линейных агрегатов («полиномов») осуществляется с помощью некоторой преднормы p, действующей в пространстве коэффициентов. В работах [1], [2] рассматривались лишь два специальных вида p: один, соответствующий норме в пространстве l^1 с весами, и другой — норме в пространстве l^δ, $\delta > 1$ без весов (см. далее формулы (32), (56) и (69)). Общий случай произвольной преднормы p изучался в [3]—[5]. В работах [1]—[5] рассматривались два типа усиленной полноты систем: $O(p)$ полнота — когда всякий элемент пространства приближается полиномами по данной системе с ограниченными в преднорме p коэффициентами и $o(p)$ полнота—когда аппроксимирующие произвольный элемент полиномы можно выбрать со сколь угодно малыми в преднорме p коэффициентами (терминология из работы [5]).

В настоящее время известно также много конкретных результатов подобного рода для различных систем в функциональных пространствах и с различными конкретными преднормами p. В частности, имеются результаты, дополняющие и определенным образом усиливающие в направлении учета коэффициентов классические аппроксимационные теоремы Вейрштрасса, Мюнца, Лаврентьева и др. В некоторых из упомянутых работ (Стафни [6], Рульер [7]—[8], фон Голичек [9], фон Голичек и Левиатан [10], Бак, фон Голичек и Левиатан [11], Левиатан [12], Гурарий и Мелитиди [13], Самокиш [14], Тригуб [15] результаты были получены специальными приемами без привлечения общей теории работ [1]—[5]. Другие конкретные результаты получены различными авторами либо опираясь на эту теорию, либо с прямым привлечением соображений двойственности экстремальных задач, на которых эта теория основана (Дейвис и Фань-Цзы [1], [2], Хавинсон [3]—[5], [16]—[19], Хавин [20], [21], Мурадян [22], [23], Мурадян и Хавинсон [24], Мартиросян [25], Вагаршакян [26], Напалков [27], Чацкая [28]—[30], Шрётер [31].

Хорошо известно, что установление факта полноты (обычной) какой-либо системы $\{x_j\}$ часто связано с теоремами единственности аналитических функций: на основе теорем о представлении линейных функционалов (в том или ином пространстве) с рассматриваемым линейным функционалом f связывается аналитическая функция $F(z)$ и обращение функционала f в нуль на элементах системы $\{x_j\}$ означает обращение в нуль функции $F(z)$ в определенных точках. С помощью соответствующей теоремы единственности отсюда стараются заключить, что $F(z) \equiv 0$ и вывести затем, что и функционал $f \equiv 0$.

Однако в теории аналитических функций имеются более сильные теоремы единственности, когда заключение $F(z) \equiv 0$ делается из того лишь, что $F(z)$ достаточно мала на определенном множестве точек. Вопрос о том, какие аппроксимационные процессы отвечают таким «сильным» теоремам единственности и привел к созданию теории работ [1]—[5]. На таких теоремах единственности, естественно, основано и получение конкретных результатов, отправляясь от общей теории полноты с учетом величин коэффициентов.

Основным предметом настоящей статьи является впервые исследуемая в общем виде связь между обычным понятием полноты и полнотой в усиленном смысле, когда в расчет принимается рост коэффициентов в процессах аппроксимации (§§ 2—4). В связи с этим получен ряд новых результатов об обычной полноте систем. Другой вопрос, обсуждаемый в §§ 6—7, — сохранение для новых понятий полноты свойств устойчивости, известных для базисов минимальных систем, систем полных в обычном смысле и некоторых других классов систем (см., например, обзор [32]). В § 5 уточняется один способ конструирования усиленно полных систем из полных, рассматривавшийся в [1] и [31]. В § 1 мы даем новое изложение основных критериев аппроксимации с учетом величин коэффициентов значительно более короткое, единообразное и полное, чем в работах [3]—[5]. Основная теорема I этого параграфа дает критерий, когда тот или иной элемент пространства можно аппроксимировать полиномами по данной системе, имеющими оцениваемые определенным образом коэффициенты. Таким образом, эта теорема является локализацией критериев полноты из [3]—[5]; ранее такая локальная теорема рассматривалась ([3]) лишь для $o(p)$ полноты.

Приводимые доказательства в значительной части как будто бы существенно связаны со счетностью рассматриваемых систем. Между тем для целого ряда конкретных приложений было бы интересно рассматривать и несчетные системы. Возникает задача для дальнейшего исследования; интересно также было бы выяснить, в каком виде рассматриваемая теория может быть распространена на пространства, не являющиеся нормированными.

§ 1. Общие теоремы об аппроксимации с учетом величин коэффициентов приближающих полиномов

Пусть X— банахово пространство, X^*—сопряженное к X. Рассмотрим еще последовательность пространств E^n, $n=1, 2, \cdots$, где E^n—n-мерное пространство. Для элементов $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in E^n$ определена преднорма $p(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$, причем выполняется условие согласования:

$$p(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) = p(\lambda_1, \cdots, \lambda_n, 0, \cdots, 0) \quad \forall m > n. \tag{1}$$

Пространства X и все E^n, $n=1, 2, \cdots$ предполагаем одновременно комплексными или вещественными.

Для линейных функционалов над E^n, задаваемых векторами $(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$, определим сопряженную с p норму

$$p^*(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)=\sup_{p(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)<1}\left|\sum_1^n \alpha_k \lambda_k\right|. \qquad (2)$$

Ясно, что $p^*(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)<+\infty$ только для функционалов $(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$, которые обращаются в нуль на всех тех элементах $(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$, для которых $p(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)=0$. Для остальных $(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$ полагаем $p^*(\alpha_1,\cdots\cdots,\alpha_n)=\infty$. (Если мы рассмотрим фактор пространство E_n/E_0^n, где E_0^n состоит из тех $(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)\in E^n$, для которых $p(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)=0$, то $p(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$ может быть истолковано как норма в E^n/E_0^n. Тогда векторы $(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$ такие, что $\sum\limits_1^n \alpha_j\lambda_j=0$, если $(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)\in E_0^n$, определяют пространство $(E^n/E_0^n)^*$, сопряженное к E^n/E_0^n и $p^*(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$ — норма в этом пространстве).

Пусть $\{x_j\}$ — некоторая система элементов из X. Для $\forall\omega\in X$ положим

$$\bar{p}(\omega)=\inf\varliminf_{k\to\infty} p(\lambda_1^k,\cdots,\lambda_{n_k}^k), \qquad (3)$$

где inf взята по всевозможным числовым наборам $\{(\lambda_1^k,\cdots,\lambda_{n_k}^k)\}$ таким, что

$$\left\|\omega-\sum_1^{n_k}\lambda_j^k x_j\right\|\to 0 \text{ при } k\to\infty. \qquad (4)$$

Если для данного ω вообще нет последовательности линейных комбинаций $\sum\lambda_j^k x_j$ („полиномов“), сходящейся к ω, то полагаем $\bar{p}(\omega)=\infty$.

Определение. Элемент ω называется $O(p)$ аппроксимируемым системой $\{x_j\}$, если $\bar{p}(\omega)<+\infty$. Элемент ω называется $o(p)$ аппроксимируемым системой $\{x_j\}$, если $\bar{p}(\omega)=0$.

Таким образом, $O(p)$ аппроксимируемость элемента ω системой $\{x_j\}$ означает существование такого числа $C=C(\omega)$, что для $\forall\varepsilon>0$ найдутся коэффициенты $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$, $n=n(\varepsilon)$, такие, что

$$\left\|\omega-\sum_1^n\lambda_j x_j\right\|<\varepsilon,\ p(\lambda_1,\cdots\lambda_n)\leqslant C. \qquad (5)$$

В свою очередь, $o(p)$ аппроксимируемость элемента ω системой $\{x_j\}$ означает, что для $\forall\varepsilon>0$ найдутся коэффициенты $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$, $n=n(\varepsilon)$ такие, что

$$\left\|\omega-\sum_1^n\lambda_j x_j\right\|<\varepsilon,\ p(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)<\varepsilon. \qquad (6)$$

Теорема 1. *Имеет место соотношение двойственности:*

$$\sup_{\substack{f\in X^*,\ p^*(f(x_1),\cdots,f(x_n))<1,\\ n=1,2,\cdots}}|f(\omega)|=\bar{p}(\omega). \qquad (7)$$

Доказательство. Возьмем произвольное число $K>0$ и зафиксируем n. Имеет место равенство (ср. [3], теорема 5):

$$\sup_{\substack{f\in X^*,\ \|f\|\leqslant K,\\ p^*(f(x_1),\cdots,f(x_n))\leqslant 1}} |f(\omega)| = \inf_{\lambda_1,\cdots,\lambda_n}\left[K\left\|\omega-\sum_1^n \lambda_j x_j\right\|+p(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)\right]. \tag{8}$$

Это равенство следует из соотношения (26) работы [33]; предполагаемая там линейная независимость элементов $x_1,\cdots,x_n$ для справедливости (8) не нужна. Для полноты изложения наметим доказательство (8). Рассмотрим прямое произведение Y пространств X и E^n: $Y=X\times E^n$, снабдив его преднормой $P(x;\lambda_1,\cdots,\lambda_n)=K\|x\|+p(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$. В пространстве Y^* определится сопряженная с P норма $P^*(f,\alpha_1,\cdots,\alpha_n)=$ $=\max\left(\frac{\|f\|}{K},\ p^*(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\right)$. Здесь $f\in X^*$, $(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$ — такой набор, что $p^*(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)<+\infty$. Функционал $F=(f,\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$ действует на элемент $(x,\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$ по формуле

$$f(x)-\sum_1^n \alpha_j\lambda_j. \tag{9}$$

В пространстве Y с преднормой P рассмотрим аппроксимацию элемента $\Omega=(\omega,0)$ элементами вида

$$y=\left(\sum_1^n \lambda_j x_j,\ (\lambda_1,\cdots,\lambda_n)\right),\ \forall(\lambda_1,\cdots,\lambda_n).$$

Элементы указанного вида образуют подпространство E в Y.

Согласно обычному соотношению двойственности М. Г. Крейна—С. М. Никольского ([34], [35]; см. также [36], [37], [38]) для задачи наилучшего приближения слегка обобщенному на случай рассмотрения преднорм вместо норм

$$\sup_{\substack{F\in Y^*,\ P^*(F)\leqslant 1,\\ F\in E^{\perp}}} |F(\Omega)|=\inf_{y\in E} P(\Omega-y). \tag{10}$$

Здесь $E^{\perp}$ — аннулятор E, т. е. совокупность таких линейных функционалов над Y, для которых $y\in E\Rightarrow F(y)=0$. Поскольку $F=(f,\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$ условие $F\in E^{\perp}$ означает в силу (9), что

$$f(x_j)=\alpha_j,\ j=1,\cdots,n. \tag{11}$$

Учитывая (11) и все сказанное про Y, Y^*, P, P* и Ω, видим, что (10) совпадает с (8).

Выведем теперь из (8) равенство (7). Допустим сперва, что $\bar p(\omega)<\infty$. Возьмем $\forall f\in X^*$, для которого $p^*(f(x_1),\cdots,f(x_n))\leqslant 1$, $n=1,\cdots$. Для $\forall\varepsilon>0$ найдется такой полином $\sum\limits_1^n \lambda_j x_j$, что

$$\left\|\omega-\sum_1^n \lambda_j x_j\right\|<\frac{\varepsilon}{\|f\|},\ p(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)\leqslant\bar p(\omega)+\varepsilon. \tag{12}$$

Имеем в силу (12)

$$|f(\omega)| = \left|f(\omega) - \sum_1^n \lambda_j x_j) + f\left(\sum_1^n \lambda_j x_j\right)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \|f\| \left\|\omega - \sum_1^n \lambda_j x_j\right\| + p(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)\, p^*(f(x_1), \cdots, f(x_n)) \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon + \tilde{p}(\omega) + \varepsilon = \tilde{p}(\omega) + 2\varepsilon. \tag{13}$$

Из (13) получается, что левая часть в (7) не более правой. Если $\tilde{p}(\omega) = 0$, то (7) уже доказано. Пусть $\tilde{p}(\omega) > 0$. Если бы для некоторого $\varepsilon_0 > 0$

$$\sup_{\substack{f \in X^*,\, p^*(f(x_1), \cdots, f(x_n)) < 1 \\ n=1, 2, \cdots}} |f(\omega)| < \tilde{p}(\omega) - \varepsilon_0 = A, \tag{14}$$

то в силу (8) тем более при любом $K > 0$

$$\inf_{n, \lambda_1, \cdots, \lambda_n} \left[K \left\|\omega - \sum_1^n \lambda_j x_j\right\| + p(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \right] = \sup_{\substack{f \in X^*,\, \|f\| \leq K, \\ p^*(f_1, (f(x_1), \cdots, f(x_n)) < 1, \\ n=1, 2, \cdots}} |f(\omega)| \leqslant$$

$$\sup_{\substack{f \in X^*,\, p^*(f(x_1), \cdots, f(x_n)) \leq 1 \\ n=1, 2, \cdots}} |f(\omega)| \leqslant \tilde{p}(\omega) - \varepsilon_0 = A. \tag{15}$$

Зададимся числом ε, $0 < \varepsilon < \varepsilon_0/2$. В силу (15) для $\forall K > 0$ найдется полином $\sum_1^n \lambda_j x_j$ (n и $\{\lambda_j\}$ зависят от K) такой, что

$$\left\|\omega - \sum_1^n \lambda_j x_j\right\| \leqslant \frac{A}{K},\; p(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \leqslant A + \varepsilon \leqslant \tilde{p}(\omega) - \frac{\varepsilon_0}{2}. \tag{16}$$

Так как

$$\left\|\omega - \sum_1^n \lambda_j x_j\right\| \to 0 \text{ при } K \to \infty, \tag{17}$$

то получается, что $\tilde{p}(\omega) \leqslant \tilde{p}(\omega) - \frac{\varepsilon_0}{2}$. Противоречие.

Итак, в случае $\tilde{p}(\omega) < \infty$ равенство (7) доказано. Допустим теперь, что $\tilde{p}(\omega) = \infty$, а в левой части (7) стоит число $A < +\infty$. Снова имеем соотношения (15), из которых вытекают неравенства (16) с произвольным $\varepsilon > 0$. Из (17) и (16) получается тогда, что $\tilde{p}(\omega) \leqslant A$ вопреки предположению $\tilde{p}(\omega) = \infty$.

Следствие 1. Для того, чтобы элемент ω был $O(p)$ аппроксимируем системой $\{x_j\}$ необходимо и достаточно, чтобы существовало число $C = C(\omega)$ такое, что для $\forall f \in X^*$

$$p^*(f(x_1), \cdots, f(x_n)) \leqslant 1,\; n = 1, 2, \cdots \Rightarrow |f(\omega)| \leqslant C. \tag{18}$$

Следствие 2. Для того, чтобы элемент ω был $o(p)$ аппроксимируем системой $\{x_j\}$ необходимо и достаточно, чтобы для $\forall f \in X^*$

$$p^*\ (f(x_1),\cdots,f(x_n))\leqslant 1,\ n=1,2,\cdots \Rightarrow f(\omega)=0. \qquad (19)$$

Следствие 3. Пусть E — замкнутое подпространство в X. Для того, чтобы каждый элемент E был $O(p)$ аппроксимируем системой $\{x_j\}$ необходимо и достаточно, чтобы существовала такая константа D, что для $\forall f\in X^*$

$$p^*\ (f(x_1),\ \cdots,f(x_n))\leqslant 1,\ n=1,2,\cdots \Rightarrow \|f\|_E\leqslant D. \qquad (20)$$

Здесь $\|f\|_E$ — норма сужения функционала f на подпространство E.

Доказательство. Достаточность. Пусть выполнено условие (20). Для $\forall\omega\in E$ и f удовлетворяющего неравенствам $p^*(f(x_1),\cdots,f(x_n))\leqslant 1$, $n=1,\cdots$ тогда имеем:

$$|f(\omega)|\leqslant\|f\|_E\,\|\omega\|\leqslant D\|\omega\|=C(\omega). \qquad (21)$$

Согласно следствию 1 неравенство (21) означает, что ω является $O(p)$ аппроксимируемым системой $\{x_j\}$.

Необходимость. Обозначим через X_N совокупность всех элементов $\omega\in X$, для которых $\tilde{p}(\omega)\leqslant N$, $N=1,2,\cdots$. Легко видеть, что X_N — замкнутое множество. Поэтому множество $E_N=E\cap X_N$ также замкнуто. Поскольку все элементы E по предположению являются $O(p)$ аппроксимируемыми, $E=\bigcup\limits_{N=1}^{\infty}E_N$. Согласно принципу Бэра какое-то из множеств E_N будет всюду плотным в некотором замкнутом шаре пространства E; пусть множество E_{N_0} всюду плотно в шаре $\bar{S}(x_0,r)$ с центром в x_0 и радиуса r и значит (по замкнутости E_{N_0}) содержит этот шар. Тогда, как обычно делается при доказательстве теоремы Банаха—Штейнгауза (см., например, [39]), получаем, что $\exists D>0$ такое, что

$$\tilde{p}(\omega)\leqslant D\|\omega\| \qquad (22)$$

для $\omega\in E$.

Пусть теперь для $f\in X^*$ выполняются условия $p^*(f(x_1),\cdots,f(x_n))\leqslant 1$, $n=1,2,\cdots$. Тогда для $\forall\omega\in E$, $\|\omega\|\leqslant 1$, получаем из (7):

$$|f(\omega)|\leqslant\tilde{p}(\omega)\leqslant D\|\omega\|\leqslant D. \qquad (23)$$

В силу (23) имеем $\|f\|_E\leqslant D$ и доказательство завершено.

Следствие 4. Пусть E — подпространство в X. Для того, чтобы каждый элемент $\omega\in E$ был $o(p)$ аппроксимируем системой $\{x_j\}$ необходимо и достаточно, чтобы для $\forall f\in X^*$

$$p^*\ (f(x_1),\cdots,f(x_n))\leqslant 1,\ n=1,2,\cdots \Rightarrow f\in E^{\perp}. \qquad (24)$$

Множество всех $o(p)$ аппроксимируемых элементов X — замкнутое подпространство X.

Первое утверждение немедленно вытекает из следствия 2, второе легко усматривается прямо из определения $o(p)$ аппроксимируемости.

Определение. Система $\{x_j\}$ называется $O(p)$ (соответственно $o(p)$) полной в X, если каждый элемент $\omega\in X$ является $O(p)$ (соответственно $o(p)$) аппроксимируемым этой системой.

Таким образом, $O(p)$ полнота $\{x_j\}$ означает, что $\bar{p}(\omega) < +\infty$ для всех $\omega \in X$. Иными словами, для каждого $\omega \in X$ возможна аппроксимация (5). Далее $o(p)$ полнота $\{x_j\}$ означает, что $\tilde{p}(\omega) = 0$ для всех $\omega \in x$; иными словами, для каждого $\omega \in X$ возможна аппроксимация (6).

Следствие 5. Для того, чтобы система $\{x_j\}$ была $O(p)$ полна в X необходимо и достаточно существование такой константы D, что для $\forall f \in X^*$

$$p^*(f_1(x_1), \cdots, f(x_n)) \leqslant 1, \ n=1, 2, \cdots \Rightarrow \|f\| \leqslant D. \tag{25}$$

Следствие 6. Для того, чтобы система $\{x_j\}$ была $o(p)$ полна в X необходимо и достаточно, чтобы для $\forall f \in X^*$

$$p^*(f(x_1), \cdots, f(x_n)) \leqslant 1, \ n=1, 2, \cdots \Rightarrow f \equiv 0. \tag{26}$$

Следствие 5—специальный случай следствия 3, а следствие 6 — специальный случай следствия 4.

В работе Дэйвиса и Фань—Цзы [1], см. также [2], были введены и изучались понятия эквивалентные $o(p)$ полноте для двух специальных видов p: для p, являющегося нормой в пространстве l^1 числовых последовательностей (весовом) или в пространстве l^δ, $\delta > 1$ (см. далее формулы (35) или, что то же, (59) и (72) соответственно), а также понятие, эквивалентное $O(p)$ полноте для p вида (35).

Следствие 2 и следствие 6 были получены в работах [3]—[5]. Следствие 5—в работах [4] и [5]. Эти результаты являлись основными для указанных работ. Теорема 1 в полном объеме в работах [3]—[5] установлена не была. Теорема 1 может рассматриваться как обобщение на рассматриваемую ситуацию аппроксимации с учетом величин коэффициентов классической двойственности Крейна—Никольского, на которую мы существенно опирались в ходе доказательства.

§ 2. Связь между $O(p)$ полнотой и обычным понятием полноты

Из определения $O(p)$ и $o(p)$ полноты ясно, что каждая $O(p)$ или $o(p)$ полная система обязана быть полной в обычном смысле. Возникают, естественно, обратные вопросы: 1. Всякая ли полная система является $O(p)$ полной для некоторой преднормы (соответственно—нормы) p? 2. Всякая ли полная система является $o(p)$ полной для некоторой преднормы (соответственно—нормы) p и если нет, то какие именно системы можно сделать $o(p)$ полными? Ответ на первый вопрос на самом деле очевиден.

Теорема 2. *Всякая полная система $\{x_j\}$ является $O(p)$ полной для некоторой преднормы p.*

Доказательство. Достаточно положить

$$p(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) = \|\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n\|, \ n=1, 2, \cdots. \tag{27}$$

Тогда для $\forall \omega \in X$ будет $\bar{p}(\omega) = \|\omega\|$ и система $\{x_j\}$ оказалась $O(p)$ полной. В случае линейной независимости системы $\{x_j\}$ p— норма.

В работе Гурария и Мелитиди [40] был получен результат, который может рассматриваться как более содержательный ответ на вопрос 1. Речь идет об $O(p)$ полноте с p специального и притом весьма важного для применений вида. Мы сформулируем их результат в наших терминах. Пусть задана последовательность положительных чисел $\{C_j\}_1^\infty$. Положим

$$p(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) = \max_{1 \leq j \leq n} \left|\frac{\lambda_j}{C_j}\right|, \quad n = 1, 2, \cdots. \tag{28}$$

Теорема 3 [40]. *Для произвольной полной системы $\{x_j\}$ можно найти такие положительные числа $\{C_j\}$, что $\{x_j\}$ будет $O(p)$ полна относительно нормы p, определяемой равенством* (28).

Таким образом, для произвольной полной системы $\{x_j\}$ можно так подобрать положительные числа $\{C_j\}$, что для $\forall \omega \in X$, $\|\omega\| \leq 1$, и $\forall \varepsilon > 0$ возможна аппроксимация: (n_k, $\{\lambda_j\}$ зависят от ε)

$$\left\|\omega - \sum_1^{n_k} \lambda_j x_j\right\| < \varepsilon, \quad |\lambda_j| \leq C_j, \quad j = 1, \cdots, n_k; \quad k = 1, 2, \cdots. \tag{29}$$

(Чтобы в этом убедиться, надо увеличить C_j из теоремы 3 так, чтобы $\|\omega\| \leq 1 \Rightarrow \bar{p}(\omega) \leq 1$. Легко видеть, что этого всегда можно добиться).

Приведем двойственные результаты к теореме 3, дающие новые характеристики полных систем.

Теорема 4. *Для того, чтобы система $\{x_j\}$ была полной необходимо и достаточно, чтобы существовала последовательность положительных чисел $\{C_j\}$ такая, что для $\forall f \in X^*$*

$$\sum_1^\infty C_k |f(x_k)| \leq 1 \Rightarrow \|f\| \leq 1. \tag{30}$$

Доказательство. Достаточность. Условие (30) согласно следствию из теоремы 1 означает $O(p)$ полноту системы $\{x_j\}$ относительно нормы p, определяемой формулами (28). Действительно, для p из (28) сопряженная норма p^* определяется равенством

$$p^*(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) = \sum_1^n C_k |\alpha_k|, \quad n = 1, 2, \cdots. \tag{31}$$

Однако $O(p)$ полнота системы $\{x_j\}$ тем более означает обычную полноту этой системы.

Можно рассуждать и следующим образом. Пусть f—функционал, обращающийся в нуль на всех элементах системы $\{x_j\}$. Тогда при любом $R > 0$ функционал Rf удовлетворяет условиям (30) и поэтому $\|Rf\| \leq 1$ и $\|f\| \leq R^{-1}$. Следовательно, $f \equiv 0$ и по обычному признаку полноты система $\{x_j\}$ полна.

Необходимость. Если $\{x_j\}$ полна, то по теореме 3 она $O(p)$ полна относительно p из (28) с некоторыми $\{C_j > 0\}$. Так как p^* имеет вид (31), то согласно следствию 5 найдется D такое, что для $\forall f \in X^*$

$$\sum_{1}^{n} C_k |f(x_k)| \leqslant 1, \; n = 1, 2, \cdots \Rightarrow \|f\| < D. \tag{32}$$

Положим $C'_k = C_k \cdot D$. Тогда для $f \in X^*$

$$\sum_{1}^{\infty} C'_k |f(x_k)| \leqslant 1 \Rightarrow \|f\| \leqslant 1. \tag{33}$$

Таким образом, имеет место (30) с заменой C_k на C'_k.

Теорема 4'. *Для того, чтобы система $\{x_j\}$ была полной необходимо и достаточно, чтобы существовали положительные числа $\{\varepsilon_j\}$ такие, что для $\forall f \in X^*$*

$$|f(x_j)| \leqslant \varepsilon_j, \; j = 1, \cdots, \Rightarrow \|f\| \leqslant 1, \tag{33'}$$

Доказательство. Пусть $\{x_j\}$ полна и $\{C_j\}$ такая последовательность, что имеет место (30). Достаточно теперь взять ε_j такими, чтобы

$$\sum_{1}^{\infty} C_j \varepsilon_j \leqslant 1. \tag{34}$$

Пусть имеет место (33). Если мы положим

$$p(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) = \sum_{1}^{n} \varepsilon_j |\lambda_j|, \tag{35}$$

то сопряженная норма p^* будет иметь вид:

$$p^*(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) = \max_{1 \leqslant j \leqslant n} \left| \frac{\alpha_j}{\varepsilon_j} \right| \tag{36}$$

и (33) означает, что для $\forall f \in X^*$

$$p^*(f(x_1), \cdots, f(x_n)) \leqslant 1 \Rightarrow \|f\| \leqslant 1.$$

Следовательно, по следствию 5 из § 1 $\{x_j\}$ является $O(p)$ полной и тем более полной системой. Можно было бы, конечно, рассуждать и отправляясь от обычного признака полноты, как в предыдущей теореме.

В части необходимости теоремы 4 и 4' содержат новую информацию о полных системах. Было бы интересно установить эти результаты непосредственно, не обращаясь к теоремам 1 и 3.

§ 3. $o(p)$ полные системы и свойство переполненности

Рассмотрим поставленный в начале § 2 вопрос 2 об условиях на систему, гарантирующих ее $o(p)$ полноту при некоторой норме p. Назовем систему элементов $\{x_j\}$ переполненной (ср. [32]), если при исключении из $\{x_j\}$ любой конечной совокупности ее элементов оставшаяся система будет полна.

Теорема 5. *Для того, чтобы система $\{x_j\}$ была $o(p)$ полной при некоторой норме p необходимо и достаточно, чтобы $\{x_j\}$ была переполненной системой.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $\{x_j\}$ является $o(p)$ полной при некоторой норме p, но не является переполненной. Это означает, что существуют элементы $x_{k_1}, \cdots, x_{k_m}$ такие, что если их все исключить из системы $\{x_j\}$, то замкнутая линейная оболочка E оставшихся элементов отлична от X. Пусть, для определенности, $x_{k_1} \overline{\in} E$. Тогда существует линейный функционал $f \in X^*$ такой, что $f(x_{k_1})=1$, $f(x_j)=0$ для $j=k_1, \cdots, k_m$. При достаточно малом $\varepsilon>0$ будем иметь

$$p^*(\varepsilon f(x_1), \varepsilon f(x_2), \cdots)=p^*(0, \cdots, \varepsilon, 0, \cdots, \varepsilon f(x_{k_2}), 0, \cdots, \varepsilon f(x_{k_m}), 0, \cdots)\leqslant 1$$

какими бы ни были значения f на $x_{k_2}, \cdots, x_{k_m}$. Таким образом, из неравенств

$$p^*(f(x_1), \cdots, f(x_n))\leqslant 1, \quad n=1, 2, \cdots$$

не вытекает, что $f\equiv 0$ и значит по следствию 6 к теореме 1 система $\{x_j\}$ не $o(p)$ полна.

Достаточность. Пусть $\{x_j\}$—переполненная система. Используя ее переполненность, легко построить всюду плотную в X последовательность элементов

$$y_n=\sum_{j=q_{n-1}+1}^{q_n} \lambda_j^n x_j, \tag{37}$$

где $\{q_n\}$— возрастающая к ∞ последовательность натуральных чисел $(q_0=0)$. Определим последовательность положительных чисел $\{C_j\}$, положив в промежутках $q_{n-1}<j\leqslant q_n$

$$\begin{gathered} C_j=|\lambda_j^n|, \quad \text{если} \quad \lambda_j^n\neq 0 \\ C_j>0 \text{ — произвольное, если } \lambda_j^n=0. \end{gathered} \tag{38}$$

С помощью чисел C_j определим нормы p равенством

$$p(\lambda_1, \cdots, \lambda_m)=\sum_1^m \frac{1}{2^j}\left|\frac{\lambda_j}{C_j}\right|, \quad m=1, 2, \cdots. \tag{39}$$

Для $\forall \omega \in X$ и $\forall \varepsilon>0$ найдется полином y_n со сколь угодно большим номером n, для которого

$$\|\omega-y_n\|<\varepsilon, \quad p(0, \cdots, \lambda_{q_{n-1}+1}, \cdots, \lambda_{q_n}^n)<\frac{1}{2^{q_{n-1}+1}}.$$

Так как $2^{-(q_{n-1}+1)}$ сколь угодно мало, то $\bar{p}(\omega)=0$.

Таким образом, всякий элемент ω $o(p)$ аппроксимируем системой $\{x_j\}$ и система $\{x_j\}$ $o(p)$ полна в X.

В силу следствия 6 к теореме 1 получаем двойственный результат.

Теорема 6. *Для того, чтобы система $\{x_j\}$ была переполненной необходимо и достаточно, чтобы существовали такие положительные числа $\{\varepsilon_j\}$, что для $\forall f \in X^*$*

$$|f(x_j)| \leqslant \varepsilon_j, \; j=1, 2, \cdots \Rightarrow f \equiv 0. \qquad (40)$$

Теорема 6 может рассматриваться как абстрактный вариант „сильных" теорем единственности теории аналитических функций, упоминавшихся во введении, когда заключение $F(z) \equiv 0$ делается из того, что $F(z)$ достаточно мала в точках некоторой последовательности.

Следствие. Пусть $\{x_j\}$—переполненная система. Для того, чтобы последовательность линейных функционалов $\{f_n\} \subset X^*$ была слабо сходящейся необходимо и достаточно, чтобы $\|f_n\|$ были равномерно ограничены и для каждого номера j нашелся бы номер N_j такой, что при $n > N_j$ и $m \geqslant N_j$ выполняется условие

$$|f_n(x_j) - f_m(x_j)| < \varepsilon_j, \qquad (41)$$

где ε_j — числа, определенные в теореме 6.

Доказательство. Необходимость тривиальна. Установим достаточность. В силу равномерной ограниченности норм последовательность $\{f_n\}$ секвенциально компактна в слабой (*) топологии X^* (наличие полной счетной системы $\{x_j\}$ в X гарантирует секвенциальную компактность шара в X^* в слабой (*) топологии X^*). Если бы $\{f_n\}$ имела две предельные точки f и φ, то в силу (41) выполнялись бы условия

$$|\varphi(x_j) - f(x_j)| < \varepsilon, \; j=1, \cdots$$

и по теореме 6 $f(x) \equiv \varphi(x)$. Таким образом, $\{f_n\}$ слабо (*) сходится в X^*.

Доказанное следствие может рассматриваться как конечный (неинфинитезимальный) вариант критерия Коши для слабой сходимости функционалов.

Приведем два конкретных примера, иллюстрирующих данное следствие.

1. Пусть $X = C_A(\Gamma)$—пространство, состоящее из функций $x(\zeta)$ на единичной окружности Γ, являющихся граничными значениями на Γ функций $x(z)$ аналитических при $|z| < 1$ и непрерывных при $|z| \leqslant 1$ (с равномерной метрикой). Пусть система $\{x_j\}$ образована функциями $x_j(\zeta) = (\zeta - \alpha_j)^{-1}$, где

$$|\alpha_j| > 1, \; \sum_1^\infty (|\alpha_j| - 1) = \infty, \; \frac{|\alpha_j| - |\alpha_{j+1}|}{(1-|\alpha_j|)(1-|\alpha_{j+1}|)} \geqslant d > 0 \qquad (42)$$

(d от j не зависит). Возьмем произвольную последовательность чисел $\{r_j\}$, $r_j > 0$, $r_j \to +\infty$ и положим

$$\varepsilon_j = \exp\left[\frac{r_j}{1-\alpha_j}\right]. \qquad (43)$$

Числа (43) для системы $\{x_j(\zeta)\}$ в пространстве $C_A(\Gamma)$ обладают свойствами, отмеченными в следствии. Действительно, пусть $f \in X^*$. Согласно представлению Рисса $f(x) = \int\limits_\Gamma x(\zeta)\, d\mu$, где μ—некоторая комплексная мера. Если $|f(x_j)| \leqslant \varepsilon_j$, то это означает, что

$$\left|\int\limits_\Gamma \frac{d\mu}{\zeta - \alpha_j}\right| \leqslant \varepsilon_j, \; j=1, 2, \cdots. \qquad (44)$$

По теореме единственности из [41], [42] из неравенств (34)—(44) вытекает, что аналитическая функция $F(z)=\int\limits_{\Gamma}\frac{d\mu}{\zeta-z}\equiv 0$ при $|z|>1$. Но тогда $d\mu=\varphi(\zeta)\,d\zeta$, где $\varphi(z)$ аналитическая при $|z|<1$ функция из класса H^1 (см. [43]). Поэтому функционал $f\equiv 0$ над X. Нетрудно понять из рассуждений, применявшихся при выводе следствия, что тем самым доказано наличие у числа (43) нужного свойства.

2. Пусть $X=C[0,1]$—пространство непрерывных на $[0,1]$ функций, $x_j(t)=t^j$, $j=0, 1,\cdots$. Пусть последовательность $\{M_j>0\}$ такова, что найдется подпоследовательность индексов $\{j_k\}_{k=1}^{\infty}$, для которой выполняются условия:

$$\sum_{k=1}^{\infty}(j_k)^{-1}=\infty,\quad \lim_{k\to\infty}(M_{j_k})^{\frac{1}{j_k}}=\infty. \tag{45}$$

Положим $\varepsilon_j=M_j^{-1}$. Из результатов работ [9], [24] по усилению теоремы Вейерштрасса в направлении учета коэффициентов вытекает, что числа ε_j при выполнении (45) обладают свойством, указанным в следствии.

Случай, когда p—преднорма, а не норма, изучим при дополнительном предположении монотонности p. Будем называть преднорму p монотонной, если выполнено условие:

$$|\lambda_1|\leqslant|\mu_1|,\cdots,|\lambda_n|\leqslant|\mu_n|,\cdots \Rightarrow p(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)\leqslant p(\mu_1,\cdots,\mu_n). \tag{46}$$

Назовем индекс j ненулевым для преднормы p, если

$$p(\underbrace{0,\cdots,0,1}_{j},0,\cdots)\neq 0. \tag{47}$$

Пусть J — множество всех ненулевых индексов преднормы p. Очевидно J — непусто тогда и только тогда, когда $p\not\equiv 0$. Действительно, если J— не пусто, то $p\not\equiv 0$. Обратное утверждение вытекает из неравенства треугольника. Если p монотонна, $j\in J$ и $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$—произвольны, но $\lambda_j\neq 0$, то $p(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)\neq 0$. Таким образом,

$$p(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)=0 \Leftrightarrow \lambda_j=0,\ \forall j\in J,\ 1\leqslant j\leqslant n. \tag{48}$$

Для сопряженной с p нормы p^* отсюда вытекает, что

$$p^*(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)<+\infty \Leftrightarrow \alpha_j=0,\ \forall j\in N\setminus J \tag{49}$$

(N — множество натуральных чисел).

Будем говорить, что система $\{x_j\}$ переполнена относительно некоторого (непустого) множества индексов J, если система, получающаяся из нее удалением любой конечной совокупности элементов, индексы которых входят в J, является полной.

Теорема 5′. *Пусть J — некоторое непустое множество индексов. Для того, чтобы система $\{x_j\}$ была $o(p)$ полной с монотонной преднормой p, для которой J— множество ненулевых индексов, необходимо и достаточно, чтобы $\{x_j^*\}$ была переполненной относительно J.*

Следствие. Для того, чтобы система $\{x_j\}$ была $o(p)$ полной относительно некоторой монотонной преднормы $p \not\equiv 0$ необходимо и достаточно, чтобы она была переполненной относительно некоторого непустого множества индексов.

Доказательство теоремы 5′ не слишком усложняется в сравнении с доказательством теоремы 5 и мы его опустим.

§ 4. Минимальные системы и аппроксимация с учетом величин коэффициентов

Система $\{x_j\}$ называется минимальной (или усиленно линейно независимой) в пространстве X, если любой ее элемент x_k не принадлежит замкнутой линейной оболочке системы $x_1, \cdots, x_{k-1}, x_{k+1}, \cdots$ (см. [44], [46], [32]). Известно, что минимальность $\{x_j\}$ равносильна наличию биортогональной с ней системы линейных функционалов $\{f_k\} \subset X^*$. Таким образом, $f_k(x_j) = \delta_{kj}$, $\delta_{kk} = 1$, $\delta_{kj} = 0$ при $k \neq j$. Класс минимальных систем совпадает с классом систем, не являющихся переполненными ни по какому непустому множеству индексов. Поэтому теорема 5′ может быть переформулирована следующим образом

Теорема 5″. *Для того, чтобы система $\{x_j\}$ не была $o(p)$ полной ни при какой (монотонной) преднорме $p \not\equiv 0$ необходимо и достаточно, чтобы эта система была минимальной.*

Следствие. Ортонормальная система в гильбертовом пространстве не может быть $o(p)$ полной ни при какой монотонной преднорме p.

Действительно, ортонормальная система обязательно минимальна. Если $\{x_j\}$ — полная минимальная система, то произвольному $\omega \in X$ отвечает единственный ряд

$$\omega \sim \sum_{k=1}^{\infty} f_k(\omega)\, x_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k, \tag{50}$$

который, однако, не обязан сходиться, а если он сходится, то сумма его не обязана совпадать с ω. Может быть и так, что у разных ω_1 и ω_2 ряд (50) один и тот же (см. [45], [46]). Система $\{x_j\}$ есть базис X, если для $\forall \omega$ ряд (50) сходится к ω (47).

Теорема 7. *Пусть $\{x_j\}$ — полная минимальная система в банаховом пространстве X, а p — монотонная преднорма. Тогда для $\forall \omega \in X$*

$$\lim_{n \to \infty} p(a_1, \cdots, a_n) \leqslant \tilde{p}(\omega), \tag{51}$$

где $\{a_k\}$ — последовательность коэффициентов ряда (50). Если какая-то последовательность S_{n_m} частных сумм ряда (50) сходится к ω, то

$$\lim_{n \to \infty} p(a_1, \cdots, a_n) = \bar{p}(\omega). \tag{52}$$

В частности, если $\{x_j\}$ — базис, то равенство (52) имеет место для всех $\omega \in X$.

Доказательство. Так как $p(a_1, \cdots, a_n) = p(a_1, \cdots, a_n, 0) \leqslant \leqslant p(a_1, \cdots, a_{n+1})$ (в силу (1) и (46)), то конечный или бесконечный предел в левой части (51) обязательно существует. Зададимся произвольным $\varepsilon > 0$. Существует последовательность $\omega_m = \sum_{k=1}^{N_m} \lambda_k^m x_k \to \omega$, для которой

$$p(\lambda_1^m, \cdots, \lambda_{N_m}^m) \leqslant \bar{p}(\omega) + \varepsilon, \quad m = 1, 2, \cdots.$$

В силу монотонности p при любом фиксированном n имеем

$$p(\lambda_1^m, \cdots, \lambda_n^m) \leqslant p(\lambda_1^m, \cdots, \lambda_{N_m}^m) \leqslant \bar{p}(\omega) + \varepsilon$$

для достаточно большого m (мы считаем, что $N_m \to \infty$, так как случай, когда N_m ограничены сверху только проще). Однако

$$p(a_1, \cdots, a_n) = p(f_1(\omega), \cdots, f_n(\omega)) = \lim_{m \to \infty} p(f_1(\omega_m), \cdots, f_n(\omega_m)) =$$

$$= \lim_{m \to \infty} p(\lambda_1^m, \cdots, \lambda_n^m) \leqslant \bar{p}(\omega) + \varepsilon. \tag{53}$$

В силу произвольности ε получаем из (53) при любом n неравенство

$$p(a_1, \cdots, a_n) \leqslant \bar{p}(\omega). \tag{54}$$

Ясно, что (54) влечет (51). Пусть теперь последовательность частных сумм $S_{n_m} = \sum_1^{n_m} a_k x_k$ ряда (50) сходится к ω. Тогда, с одной стороны по определению $\bar{p}(\omega)$

$$\bar{p}(\omega) \leqslant \lim_{n_m \to \infty} p(a_1, \cdots, a_{n_m}) = \lim_{n \to \infty} p(a_1, \cdots, a_n), \tag{55}$$

а с другой—имеется неравенство (51). Из (51) и (55) вытекает неравенство (52).

Неравенство (51) может рассматриваться как обобщение неравенства Бесселя на произвольные минимальные системы, а равенство (52)—как обобщение равенства Парсеваля. Равенство (52) показывает оптимальность коэффициентов базисного разложения элемента в сравнении со всеми другими способами аппроксимации данного элемента полиномами по системе $\{x_j\}$. При этом сравнение величин коэффициентов делается по произвольной монотонной преднорме p.

В связи с теоремой 4 возникает естественный вопрос. Поставим в соответствие каждому линейному функционалу $f \in X^*$ точку пространства s всевозможных последовательностей:

$$(f(x_1), \cdots, f(x_n), \cdots). \tag{56}$$

Отображение $X^* \to s$, задаваемое (56), обозначим через T. Пусть $K(\varepsilon)$—круг: $K(\varepsilon) = \{z : |z| \leqslant \varepsilon\}$ в комплексной плоскости или отрезок $[-\varepsilon, \varepsilon]$, если рассматриваются вещественные пространства. Пусть $\{\varepsilon_k\}$—последовательность положительных чисел. Рассмотрим прямое произведение кругов (отрезков) $K(\varepsilon_j)$:

$$K = \prod_{j=1}^{\infty} K(\varepsilon_j) \subset s.$$

Упомянутый выше вопрос состоит в следующем. Какой должна быть система элементов $\{x_j\}$, чтобы нашлась последовательность положительных чисел $\{\varepsilon_j\}$ такая, что при отображении $T: X^* \to s$, задаваемом (56)

$$T(X^*) \supset K. \tag{57}$$

Теорема 8. 1. *Для того, чтобы существовали положительные числа $\{\varepsilon_j\}$ такие, что имеет место включение* (57), *необходимо и достаточно, чтобы система $\{x_j\}$ была минимальной.* 2. *Для того, чтобы при выполнении* (38) *система $\{x_j\}$ была еще и полной, необходимо и достаточно, чтобы $\{\varepsilon_j\}$ можно было выбрать так, что из включения*

$$T(f) \in K \Rightarrow \|f\| \leqslant 1.$$

Доказательство. 1. Пусть $\{x_j\}$—минимальная система и $\{f_k\}$—биортогональная с ней система линейных функционалов. Возьмем числа $\varepsilon_j > 0$ так, чтобы $\sum_1^{\infty} \varepsilon_j \|f_j\| < +\infty$. Для $\forall (\alpha_1, \cdots, \alpha_n, \cdots) \in \in \prod_1^{\infty} K(\varepsilon_j)$ функционал $f = \sum_1^{\infty} \alpha_j f_j$ входит в X^* (ряд сходится в X^* по норме) и $f(x_j) = \alpha_j$. Таким образом, (57) имеет место с выбранными так ε_j. Если теперь известно, что имеет место (57) с некоторыми ε_j, то при $\forall k$ точка $(0, \cdots, 0, \varepsilon_k, 0, \cdots) \in T(X^*)$ и значит существует функционал F_k, интерполирующий на системе $\{x_j\}$ значения $0, \cdots, 0, \varepsilon_k, 0, \cdots$. Тогда функционалы $f_k = \frac{1}{\varepsilon_k} F_k$ дадут систему, биортогональную с $\{x_j\}$ и значит $\{x_j\}$ минимальна. Вторая часть теоремы вытекает из теоремы 4.

§ 5. Построение $o(p)$ полных (переполненных) систем из полных

Известен и применялся в некоторых вопросах способ построения переполненных систем из полных путем рассмотрения значений векторно-значных аналитических функций (см., например, обзор [32]). В работе [1] (теорема 3) этот способ получил количественное выражение как некоторая теорема об $o(p)$ полноте. Однако условия, наложенные на p в этой работе, не точны. Более точный результат был получен в работе [31] (§ 9 этой работы), однако необходимость полученных там условий была доказана лишь при дополнительном предположении о том, что исходная система является минимальной. Мы снимаем это ограничение.

Теорема 9. *Пусть $\{x_j\}$—полная система в бесконечномерном банаховом пространстве X, причем*

$$\overline{\lim}\,(\|x_n\|^{1/n}) = \sigma < +\infty. \tag{58}$$

Пусть последовательность комплексных чисел $\{z_n\}$ *удовлетворяет условиям* $0 < |z_n| < \sigma^{-1}$, $n=1, 2, \cdots$, $z_n \to 0$. *Определим норму* p *равенствами*

$$p(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) = \sum_1^n C_j |\lambda_j|, \quad n = 1, 2, \cdots, \tag{59}$$

где C_j — *последовательность положительных чисел. Система элементов* y_n:

$$y_n = \sum_{k=1}^{\infty} z_n^k x_k \tag{60}$$

будет $o(p)$ *полной тогда и только тогда, когда для каждого натурального* m *существует бесконечная последовательность индексов* $\{n_k^m\}$, $k=1, 2, \cdots$, *такая, что*

$$C_{n_k^m} = o(|z_{n_k^m}|^m). \tag{61}$$

(*Поскольку* m — *любое натуральное число, то в* (61) *можно* o *формулы заменить на* O).

Доказательство. Достаточность. Рассмотрим в круге $|z| < \sigma^{-1}$ векторнозначную аналитическую функцию со значениями в X:

$$F(z) = \sum_1^{\infty} x_k z^k. \tag{62}$$

Тогда $y_n = F(z_n)$. Для любого линейного функционала $f \in X^*$ будем иметь

$$f(y_n) = \sum_{k=1}^{\infty} f(x_k) z_n^k = F_f(z_n), \tag{63}$$

где $F_f(z) = f \circ F(z)$ — обычная аналитическая функция в круге $|z| < \sigma^{-1}$. Для $o(p)$ полноты $\{y_n\}$ из неравенств

$$|f(y_n)| = |F_f(z_n)| \leqslant C_n \tag{64}$$

должно вытекать, что $f \equiv 0$. Из условий (64) следует, что $F_f(z) \equiv 0$. Действительно, если бы $F_f(z) \not\equiv 0$, то в точке $z=0$ у $F_f(z)$ был бы нуль некоторого порядка m. Но тогда неравенства (64) не могли бы осуществляться для последовательности индексов $\{n_k^m\}$ из-за (61). Итак, $F_f(z) \equiv 0$ для любого $f \in X^*$, удовлетворяющего (64). Но тогда в силу (63) $f(x_k) = 0$, $k=1, 2, \cdots$ и $f \equiv 0$ из-за полноты $\{x_k\}$. Мы находимся в условиях следствия 6 к теореме 1.

Необходимость. Допустим, что требования теоремы не имеют места. Это значит, что для некоторого m нет бесконечной последовательности индексов, для которой осуществляется (61). Последнее равносильно тому, что

$$C_n \geqslant A\,|z_n|^m \tag{65}$$

при некотором $A > 0$. В силу бесконечномерности можно найти такое $N > m$, что x_N будет линейно независим от $x_1, \cdots, x_{N-1}$. Построим линейный функционал $f \in X^*$, для которого $f(x_1) = \cdots = f(x_{N-1}) = 0$, $f(x_N) = 1$. Функция

$$F_f(z) = \sum_1^{\infty} f(x_k) z^k = \sum_{k \geq N} f(x_k) z^k \tag{66}$$

будет иметь в точке $z=0$ нуль порядка N. Тогда в силу (65) она будет удовлетворять неравенствам $|f(y_n)| = |F_f(z_n)| \leqslant C_n$ при достаточно больших n. Взяв $f_1 = kf$ при достаточно малом k добьемся выполнения неравенств $|f_1(y_n)| \leqslant C_n$ при всех $n = 1, 2, \cdots$. Однако $f_1 \not\equiv 0$ и следовательно, система $\{y_n\}$ не является $o(p)$ полной.

В упоминавшейся выше теореме 3 из 1 было доказано лишь, что условие $C_n^{1/m} = o(|z_n|)$ является достаточным. Ясно, что теоремы, подобные теореме 9, могут быть близкими методами получены на основе других свойств единственности аналитических функций. Так, например, основываясь на теореме единственности из [41], уже упоминавшейся нами в примере 1 к следствию из теоремы 7, можно установить следующий результат.

Теорема 10. *Пусть $\{x_j\}$ — полная система в X, причем*

$$\overline{\lim} \, (\|x_n\|^{1/n}) = 1, \ \sum_1^{\infty} \|x_n\|^2 < +\infty.$$

Пусть последовательность комплексных чисел $\{z_n\}$ удовлетворяет условиям:

$$|z_n| < 1, \ n = 1, 2, \cdots; \ \sum_1^{\infty} (1 - |z_n|) = \infty, \ \frac{|z_{n+1}| - |z_n|}{(1 - |z_n|)(1 - |z_{n+1}|)} \geqslant d > 0$$

(d не зависит от n). Если числа $\{C_j\}$ удовлетворяют условию

$$\lim_{n \to \infty} (1 - |z_n|) \ln C_n = -\infty,$$

то система (60) *$o(p)$ полна с нормой p из* (59).

§ 6. Устойчивость $O(p)$ и $o(p)$ полных систем

В известной работе М. Г. Крейна, Д. П. Мильмана и М. А. Рутмана [48] была установлена устойчивость базисов в банаховых пространствах. Фактически там была установлена устойчивость и полных минимальных систем. В явном виде последний факт отмечен А. И. Маркушевичем в его докторской диссертации [46] (см. также [49]). Устойчивость свойства полноты была доказана Гурарием и Мелитиди [40] (см. также обзор [32]). Мы установим устойчивость $O(p)$ и $o(p)$ полных систем. Будем предполагать сопряженную норму p^* удовлетворяющей условию монотонности (46) с заменой p на p^*.

Теорема 11. *Пусть $\{x_j\}$ — $O(p)$ полная система, где p — некоторая преднорма и p^* монотонна. Пусть $\{\varepsilon_j\}$ — последовательность неотрицательных чисел, для которой*

$$p^*(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n) \leqslant q, \ n = 1, 2, \cdots, \ Dq < 1, \tag{67}$$

где D—константа из соотношений (25). *Тогда всякая система* $\{y_j\}$, *удовлетворяющая неравенствам*

$$\|x_j - y_j\| \leqslant \varepsilon_j,\ j=1, 2, \cdots, \tag{68}$$

является $O(p)$ полной.

Доказательство. Достаточно показать, что для $\forall f \in X^*$

$$p^*(f(y_1), \cdots, f(y_n)) \leqslant q,\ n=1, \cdots \Rightarrow \|f\| \leqslant C \tag{69}$$

с некоторым C. Предположим что первое из неравенств (69) имеет место. С помощью условия монотонности p^* имеем:

$$\begin{aligned} p^*(f(x_1), \cdots, f(x_n)) &= p^*(|f(x_1)|, \cdots, |f(x_n)|) \leqslant \\ &\leqslant p^*(|f(y_1)| + \|f\| \|x_1 - y_1\|, \cdots, |f(y_n)| + \|f\| \|x_n - y_n\|) \leqslant \\ &\leqslant p^*(f(y_1), \cdots, f(y_n)) + \|f\| p^*(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n) \leqslant q(1 + \|f\|). \end{aligned} \tag{70}$$

Воспользовавшись (25) из (70) получаем

$$\|f\| \leqslant Dq(1 + \|f\|),\ \|f\| \leqslant \frac{Dq}{1 - Dq} \overset{\text{def}}{=} C. \tag{71}$$

Таким образом, (69) установлено.

Поскольку p предполагалась лишь преднормой, а не нормой, то чтобы достичь неравенства (67) некоторые ε_j возможно по необходимости будут равными нулю. Эта необходимость исключена, когда p — норма.

Следствие. Если система $\{x_j\}$ $O(p)$ полна, причем p — норма, то существуют положительные числа $\{\varepsilon_j\}$ такие, что всякая система $\{\ _j\}$, для которой

$$\|x_j - y_j\| < \varepsilon_j,\ j=1, 2, \cdots,$$

также будет $O(p)$ полной. В качестве ε_j можно взять любые положительные числа, для которых имеет место (67).

Теорема 12. *Пусть $\{x_j\}$ — $o(p)$ полная система, где p—некоторая преднорма, причем p^* монотонна. Пусть $\{\varepsilon_j\}$ — последовательность неотрицательных чисел, для которой выполняется условие:*

$$p^*(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n) \leqslant q,\ n=1, 2, \cdots\ (\forall q < +\infty). \tag{72}$$

Тогда всякая система $\{y_j\}$, удовлетворяющая (68), *является $o(p)$ полной.*

Доказательство. Условия (25) теперь выполняются со сколь угодо малым D. Поэтому и C из (71) сколь угодно мало. В силу следствия 6 к теореме 1 доказательство завершено.

Следствие 1. Если в условиях теоремы 12 p—норма, то существуют положительные $\{\varepsilon_j\}$ такие, что из неравенств (68) вытекает $o(p)$ полнота $\{x_j\}$. В качестве $\{\varepsilon_j\}$ можно выбрать любые, при которых имеет место (72).

Следствие 2. Пусть $\{x_j\}$ —переполненная система. Существуют положительные числа $\{\varepsilon_j\}$ такие, что система $\{y_j\}$, удовлетворяющая неравенствам (68), также являтся переполненной.

Доказательство вытекает из теоремы 7 и предыдущего следствия. Нам неизвестно, отмечалась ли ранее устойчивость свойства переполненности систем.

§ 7. Теоремы типа Винера-Пэли

Другой формой выражения фактов устойчивости являются теоремы типа известного критерия Винера—Пэли [50]. Для случая обычной полноты в банаховом, а не в гильбертом, как в [50], пространстве соответствующие факты отмечались в [51], [52], [53]. Перенесение этого факта на $o(p)$ полные системы было сделано в работе [1] для специальных p: для p, имеющего вид (35) (или, что то же самое, (59)), или для p вида:

$$p(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)=\left(\sum_1^n|\lambda_j|^\delta\right)^{1/\delta},\ \delta>1,\ n=1,2,\cdots. \tag{73}$$

(В работе [1] все изложение ведется лишь для p указанных двух видов). Однако доказательство проходит при любой преднорме p, а также для случая $O(p)$ полноты.

Теорема 13. *Пусть для систем $\{x_j\}$ и $\{y_j\}$ существует число q, $0<q<1$, такое, что при любом n и любых $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ выполняются неравенства:*

$$\left\|\sum_1^n\lambda_j(x_j-y_j)\right\|\leqslant q\left\|\sum_1^n\lambda_jx_j\right\|. \tag{74}$$

Тогда из $O(p)$ или $o(p)$ полноты системы $\{x_j\}$ следует аналогичное свойство $\{y_j\}$.

Доказательство. Пусть для некоторого $f\in X^*$ выполнены неравенства

$$p^*(f(y_1),\cdots,f(y_n))\leqslant 1,\ n=1,2,\cdots. \tag{75}$$

Положим $\alpha_j=f(x_j-y_j)$, $j=1,\cdots$. Имеем при любых $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ оценку

$$\left|\sum_1^n\lambda_j\alpha_j\right|\leqslant\|f\|\left\|\sum_1^n\lambda_j(x_j-y_j)\right\|\leqslant q\|f\|\left\|\sum_1^n\lambda_jx_j\right\|. \tag{76}$$

Поэтому в силу хорошо известного следствия из теоремы Хана—Банаха существует функционал $F\in X^*$, для которого

$$F(x_j)=\alpha_j,\ j=1,\cdots,\ \|F\|\leqslant q\|f\|. \tag{77}$$

Имеем

$$(f-F)(x_j)=f(x_j-y_j)+f(y_j)-F(x_j)=\alpha_j+f(y_j)-\alpha_j=f(y_j). \tag{78}$$

Из (75) и (78) вытекает, что

$$p^*((f-F)(x_1),\cdots,(f-F)(x_n))\leqslant 1,\ n=1,2,\cdots. \tag{79}$$

Поэтому если система $\{x_j\}$ была $o(p)$ полной, то из (79) следует, что $f-F\equiv 0$ и в силу (77) $f=F\equiv 0$. Таким образом, $\{y\}$—$o(p)$ полная система. Если же $\{x_j\}$ была $O(p)$ полной, то из (79) вытекает, что $\|f-F\|\leqslant D$ и, следовательно, в силу (77) $\|f\|\leqslant D+q\|f\|$, т. е.

$$\|f\|\leqslant\frac{D}{1-q}. \tag{80}$$

Поскольку из (75) вытекает (80), то $\{y_j\}-O(p)$ полна.

Следствие. Пусть неравенство (74) имеет место с $q<\frac{1}{2}$. Тогда $\{x_j\}$ и $\{y_j\}$ одновременно $O(p)$ (соответственно $o(p)$) полны или нет.

Доказательство. Имеем

$$\left\|\sum_1^n\lambda_j x_j\right\|-\left\|\sum_1^n\lambda_j y_j\right\|\leqslant\left\|\sum_1^n\lambda_j(x_j-y_j)\right\|\leqslant q\left\|\sum_1^n\lambda_j x_j\right\|.$$

Поэтому

$$\left\|\sum_1^n\lambda_j x_j\right\|\leqslant\frac{1}{1-q}\left\|\sum_1^n\lambda_j y_j\right\|.$$

Теперь (65) дает

$$\left\|\sum_1^n\lambda_j(x_j-y_j)\right\|\leqslant\frac{q}{1-q}\left\|\sum_1^n\lambda_j y_j\right\|,$$

где $\frac{q}{1-q}<1$, так как $q<\frac{1}{2}$. Осталось применить теорему 13.

Московский инженерно-строительный
институт им. В. В. Куйбышева

Поступила 20.X.1984

Ս. Յա. ԽԱՎԻՆՍՈՆ. Բանախի տարածություններում լրիվ համակարգերի մասին *(ամփոփում)*

Ներմուծվում և հետազոտվում են X նորմավորված տարածության ω էլեմենտի տրված $\{x_j\}$ համակարգի էլեմենտների գծային կոմբինացիաներով (բազմանդամներով) O(p) և o(p) մոտարկելիությունների գաղափարները։ O(p) մոտարկելիությունը նշանակում է ըստ p նախանորմայի սահմանափակ գործակիցներ ունեցող բազմանդամներով ω էլեմենտին ցանկացած ճշտությամբ մոտարկելու հնարավորությունը, իսկ o(p) մոտարկելիությունը՝ նշված մոտարկման հնարավորությունն է ըստ p նախանորմայի ցանկացած չափով փոքր գործակիցներ ունեցող բազմանդամներով։ Այդ գաղափարները հանդիսանում են հեղինակի կողմից արդեն դիտարկված համակարգերի O(p) և o(p) լրիվությունների գաղափարների լոկալիզացիան։ Աշխատանքի հիմնական արդյունքները կապերի հաստատումն է O(p) և o(p) լրիվությունների և սովորական լրիվության միջև։ Այսպես, օրինակ, ապացուցվում է, որ $\{x_j\}$ համակարգը կլինի o(p) լրիվ որևէ p նորմայի նկատմամբ այն և միայն այն դեպքում, երբ նրանից կամայական վերջավոր բազմությամբ էլեմենտներ դուրս գցելուց հետո արդյունքում մնում է լրիվ համակարգ (այդպիսի համակարգերը կոչվում են գերլրիվացված)։ Դրա հիման վրա ստացված են լրիվ և գերլրիվացված համակարգերի նոր բնութագրություններ. $\{x_j\}$ համակարգը լրիվ է այն և միայն այն դեպքում, երբ գոյություն ունի դրական թվերի այնպիսի $\{\varepsilon_j\}$ համակարգ, որ ամեն մի $f\in X$ էլեմենտի համար $|f(x_j)|<\varepsilon_j$ անհավասարություններից հետևում է, որ $\|f\|<1$, իսկ գերլրիվացված է այն և միայն այն դեպքում, երբ նշված անհավասարություններից հետևում է, որ $f\equiv 0$։ Մինիմալ համակարգերի համար ստացված է արդյունք, որը կարելի է մեկնաբանել որպես գործակիցների մեծությունը չափող կամայական նախանորմայով Բեսելի անհավասարության և Պարսևալի հավասարության ընդհանրացում։ Բերված են նաև թեորեմներ O(p) և o(p) լրիվությունների կայունության մասին։

S. Ya. HAVINSON. *On complete systems in Banach spaces* (summary)

Let X be a normed space. We introduce and investigate $O(p)$ and $o(p)$ approximations of the elements $w \in X$ by the linear combinations (polynomials) of the elements from a system $\{x_j\} \subset X$. Here p is some seminorm; $O(p)$-approximation of w is that by the polynomials with the p — bounded coefficients; $o(p)$-approximation it that with arbitrary small (in p) coefficients. Earlier the author considered the $O(p)$ and $o(p)$ — completeness concept, and the $O(p)$, respectively $o(p)$-approximations are its localizations. The main results of the paper are the connections between the $O(p)$ and $o(p)$ — completeness, and the usual completeness. They enable to give new characterization of the completeness: a system $\{x_j\}$ is complete if there exist $\{\varepsilon_j > 0\}$ such that for every $f \in X^*$ we have: $|f(x_j)| < \varepsilon_j \Rightarrow \|f\| < 1$. Also, for minimal systems we give a result, which may be considered as generalized Bessel inequality and Parseval equality for arbitrary seminorm p. Further, we prove some theorems on stability of $O(p)$ and $o(p)$ — completeness.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ph. Davis and Fan Ky.* Complete sequences and approximation in normed spaces, Duke Mathem. Journ., 1957, v. 24, № 2, 183–192.
2. *Far Ky.* Linear inequalities and closure properties in normed linear spaces, In book: Seminars of analytic functions Institute of advanced study, v. 2, Princeton, 1958.
3. *С. Я. Хавинсон.* Некоторые вопросы полноты систем, ДАН СССР, 1961, 137, № 4, 793—796.
4. *С. Я. Хавинсон.* Некоторые теоремы о приближении с учетом величин коэффициентов приближающих многочленов, ДАН СССР, 1971, 196, № 6, 1283—1286.
5. *С. Я. Хавинсон.* О понятии полноты, учитывающем величины коэффициентов аппроксимирующих полиномов, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., 1971, 6, № 2—3, 221—234.
6. *J. Stafney.* A permissible restrictions on the coefficients in uniform polynomial approximation to $C[0, 1]$, Duke Mathem, Journ., 1967, 34, № 3, 393–396.
7. *John A. Roulier.* Permissible Bounds on the Coefficients of Approximating Polynomials, Journ. of Approxim. Theory, 1970, 3, 117—122.
8. *John A. Roulier.* Restrictions on the Coefficients of Approximating Polynomials, Journ. of Approxim. Theory, 1972, 6, 276–282.
9. *M. von Golitschek.* Permissible bounds on the Coefficients of generalised polynomials. In the book: Approximation Theory. Proceedings of a Conference on Approxim. Theory, Austin, Texas, New York; Academic Press, 1973.
10. *M. von Golitschek and D. Leviatan.* Permissible bounds on the coefficients of approximation polynomials with real and complexe exponents, Mathem. Analysis and Applications, 1977, 60, № 1, 123–137.
11. *J. Bak, M. von Colitschek, D. Leviatan.* The Rate of approximation by means of polynomials with restricted coefficients, Israel Journ. of Mathem., 1977, 26, № 3—4, 265—275.
12. *D. Leviatan.* Approximation by polynomials with restricted coefficients, In book: Approximation Theory, v. 2, New York: Academic Press, 1976, 417—422.
13. *В. И. Гурарий, М. А. Мелитиди.* Об оценках коэффициентов полиномов, аппроксимирующих непрерывные функции, Функциональный анализ и его приложения, 1971, 5, № 1, 73—75.
14. *Б. А. Самокиш.* О поведении коэффициентов многочленов, приближающих регулярную на отрезке функцию, в кн.: Методы вычислений, Ленинград: ЛГУ, 1963, вып. 1, 58—65.
15. *Р. М. Тригуб.* О приближении функций многочленами со специальными коэффициентами, Изв. ВУЗ-ов, сер. математика, 1977, № 1 (176), 93—99.

16. *С. Я. Хавинсон*. Об экстремальных задачах для функций, удовлетворяющих дополнительным ограничениям внутри области и применении этих задач к вопросам аппроксимации, ДАН СССР, 1960, 135, № 2, 270—273.
17. *С. Я. Хавинсон*. Об аппроксимации с учетом величин коэффициентов, Труды Матем. ин-та им. Стеклова АН СССР, 1961, 60, 557—590.
18. *С. Я. Хавинсон*. Об аппроксимации на множествах аналитической емкости нуль, ДАН СССР, 1960, 131, № 4, 793—796.
19. *С. Я. Хавинсон*. Допустимые величины коэффициентов многочленов при равномерной аппроксимации непрерывных функций, Матем. заметки, 1969, 6, № 5 619—625.
20. *В. П. Хавин*. О пространстве ограниченных регулярных функций, ДАН СССР, 1960, 131, № 1, 40—43.
21. *В. П. Хавин*. О пространстве ограниченных регулярных функций, Сибирский матем. журнал, 1961, 2, № 4, 622—638.
22. *О. А. Мурадян*. О росте коэффициентов аппроксимирующих агрегатов в теореме Мюнца, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., 1973, 8, № 1, 70—87.
23. *О. А. Мурадян*. О некоторых теоремах единственности и величинах коэффициентов аппроксимирующих агрегатов в задаче Мюнца, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., 1977, 12, № 6, 435—446.
24. *О. А. Мурадян* и *С. Я. Хавинсон*. О величинах коэффициентов многочленов в аппроксимационной теореме Вейерштрасса, Матем. заметки, 1977, 22, № 2, 269—276.
25. *В. А. Мартиросян*. О росте коэффициентов многочленов, осуществляющих равномерное приближение на комплексной плоскости, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., 1980, 15, № 6, 419—432.
26. *А. А. Вагаршакян*. Теоремы единственности для ограниченных аналитических функций и их приложение в теории аппроксимации, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., 1977, 12, № 5, 345—357.
27. *В. В. Напалков*. Аппроксимация функций многих переменных с учетом роста коэффициентов аппроксимирующих агрегатов, Матем. сборник, 1980, 111 (153), № 1. 144—156.
28. *Е. Ш. Чацкая*. Об одновременной аппроксимации непрерывных функций рациональными дробями и их производными на некоторых замкнутых множествах комплексной плоскости, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., 1964, 17, № 4, 9—22.
29. *Е. Ш. Чацкая*. Двойственное истолкование граничной теоремы единственности, Ученые записки Ленингр. пед. ин-та им. Герцена, 1967, вып. 328, 250—255.
30. *Е. Ш. Чацкая*. Об усилении одной теоремы Кегеяна. В кн.: Линейные операторы и их обобщения. Межвузовский сборник научных трудов, Ленинград: Ленингр. пед. ин-т им. Герцена, 1981, 65—70.
31. *G. Schröeter* Ein Beitrag zum Müntzschen Problem und zur (a_n) — Abgeschlossenheit in Banach räumen, Mitteilungen aus dem Mathem. Seminar Giessen, 1973, № 105, 1—57.
32. *В. Д. Мильман*. Геометрическая теория пространств Банаха. Ч. 1, УМН, 1970, 25, № 3 (153), 113—174: Ч. 2,—УМН, 1971, 26, № 6 (162), 74—149.
33. *С. Я. Хавинсон*. О двух классах экстремальных задач для полиномов и моментов. Изв. АН СССР, сер. матем., 1961, 25, № 4, 557—590.
34. *М. Г. Крейн*. Проблема моментов в абстрактном линейном нормированном пространстве, Статья IV в кн.: Ахиезер Н. И. и Крейн М. Г. О некоторых вопросах теории моментов, Харьков, ГОНТИ, 1938.
35. *С. М. Никольский*. Приближение функций тригонометрическими полиномами в среднем, Изв. АН СССР, 1946, т. 10, 207—256.
36. *Н. П. Корнейчук*. Экстремальные задачи теории приближения, М., Наука, 1976.
37. *В. М. Тихомиров*. Некоторые вопросы теории приближения, М., МГУ, 1976.
38. *М. Г. Крейн, А. А. Нудельман*. Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи, М., Наука, 1973.
39. *Н. Донфорд, Шварц*. Линейные операторы. Общая теория, т. 1, М.. ИИЛ, 1962.

40. *В. И. Гурарий, М. А. Мелитиди.* Устойчивость полноты последовательностей в банаховых пространствах, Бюллетень Польской АН, серия мат., астр. и физ. наук, 1970, 18, № 9, 533—536.
41. *С. Я. Хавинсон.* Об экстремальных задачах для функций, удовлетворяющих дополнительным ограничениям внутри области и применении этих задач к вопросам аппроксимации, ДАН СССР, 1960, 135, № 2, 270—273.
42. *С. Я. Хавинсон.* Теория экстремальных задач для ограниченных аналитических функций, удовлетворяющих дополнительным условиям внутри области, УМН, 1963, 18, № 2, 25—98.
43. *И. И. Привалов.* Граничные свойства аналитических функций, М., Гостехиздат, 1950.
44. *С. С. Левин.* Ueber einige mit Konvergenz im Mittel verbundenden Eigenschaften von Funktionen—Folgen, Mathem. Zeitschrift, 1930, Bd. 32, 491—511.
45. *А. И. Маркушевич.* О базисе (в широком смысле слова), ДАН СССР, 1943, 41, № 2, 241—243.
46. *А. И. Маркушевич.* Некоторые вопросы теории приближения и разложения функций в ряды, Дисс. на соискание уч. ст. докт. физ-мат. наук, М., МГУ, 1944, 169 с.
47. *С. Банах.* Курс функционального анализа, Киев, Радяньска школа, 1948.
48. *М. Г. Крейн, Д. П. Мильман, М. А. Рутман.* Об одном свойстве базиса в пространстве Банаха, Ученые записки Харьковского матем. общества, 1940, 4, № 16, 106—110.
49. *В. И. Гурарий, М. И. Кадец.* О минимальных системах и квазидополненных в пространстве Банаха, ДАН СССР, 1962, 145, № 2, 256—258.
50. *Н. Винер, Р. Пели.* Преобразование Фурье в комплексной области, М., Наука, 1964.
51. *R. P. Boas.* General expansions theorems, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 1940, v. 26, 139—143.
52. *B. de Sz. Nagy.* Expansions theorems of Paley—Wiener type, Duke Mathem., Journ., 1947, 14, № 3, 975—978.
53. *F. Schäfke.* Das Kirterium von Paley und Wiener in Banachschen Raum, Mathem. Nachrichten, 1949—50, v. 3, 59—61.