ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XIII, №№ 5—6, 1978 Математика

А. А. НЕРСЕСЯН

ТЕОРЕМА ОБ ОДНОВРЕМЕННОМ КАСАТЕЛЬНОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

В работе [1] У. Капланом доказано следующее утверждение:

Теорема. Пусть $f \in C^1(-\infty, +\infty)$, $\varepsilon \in C([0, +\infty))$, $\varepsilon > 0$. Существует такая целая функция G, что

$$|f(x) - G(x)| < \varepsilon(|x|),$$

$$|f'(x) - G'(x)| < \varepsilon(|x|); \qquad x \in (-\infty, +\infty).$$

Такого рода приближения назовем одновременным касательным приближением.

В работе [2] Л. Хойшен доказал возможность одновременного касательного приближения всех производных функций класса $C^\infty(-\infty, +\infty)$, целой функцией и ее производными. Автор доказал теорему об одновременном касательном приближении на счетной совокупности радиусов круга, лучей или достаточно гладких кривых, причем приближаются производные до произвольного фиксированного порядка [3]. Отметим также работу [4], где рассмотрено одновременное касательное приближение вместе с интерполяцией.

Теоремы о касательном приближении обычно дают удобное средство для построения примеров функций, имеющих заданное граничное поведение (см., например, [5]).

В настоящей работе доказывается теорема об одновременном касательном приближении на совокупности точек радиусов единичного круга, оканчивающихся на множестве типа F_σ и первой категории на единичной окружности (теорема 1). В п. 2° приведено применение теоремы 1 к построению примера типа Ф. Багемила и У. Зейдела. Полученные в работе результаты допускают обобщения на случай других совокупностей вместо радиусов, например, на совокупности „tress“, введенной в [5], однако в настоящей работе такие обобщения не рассматриваются.

1°. Пусть $D = \{z: |z| < 1\}$, $C = \partial D$, $D_p = \{z: |z| < r_p\}$, $r_p = \dfrac{2^p - 1}{2^p}$, $p \geqslant 0$, $E \subset [0, 2\pi]$ — множество типа F_σ первой категории по Бэру, $E = \bigcup\limits_{p=0}^{\infty} E_p$, где множество $E_p \subset [0, 2\pi]$ — замкнутое нигде не плотное, K_p — совокупность замкнутых в D отрезков радиусов, заключенных между D_p и e^{iE_p}, $p \geqslant 0$; $K = \bigcup\limits_{p=0}^{\infty} K_p$; $K \cap D_p = K^p$, $p \geqslant 0$.

Ниже принято обозначение

$$f^{(p)}(z) = e^{-ip\vartheta} \frac{d^p}{dr^p} f(z) \text{ при } z = re^{i\vartheta},\ p \geqslant 0.$$

Если $S \subset D$ — некоторое множество, то обозначим через $C_\varphi^{(p)}(S)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, класс функций, значения радиальных производных которых до p-го порядка представляют функции, непрерывные на S. Будем говорить $f \in \tilde{C}(K)$, если $f \in C_\varphi^{(p)}(K \setminus K^{p-1})$, $p \geqslant 1$.

Теорема 1. *Для произвольной пары f, ε, $f \in \tilde{C}(k)$, $\varepsilon \in C([0, 1))$, $\varepsilon > 0$,*

существует такая аналитическая в D функция g, что

$$|f^{(p)}(z) - g^{(p)}(z)| < \varepsilon(|z|),$$

если $z \in K \setminus K^p$, $p \geqslant 0$.

Доказательство. Не нарушая общности будем считать, что $\varepsilon < 1$ и не возрастающая.

Обозначим

$$\chi(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0 \\ 1 - \exp \dfrac{x}{x-1}, & 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 1, & x \geqslant 1, \end{cases}$$

и $$\chi_p(x) = \chi(2^{p-1} x),\ p \geqslant 1,\ c_p = \max_{1 \leqslant l \leqslant p} \|\chi_p^{(l)}\|.$$

Очевидно $c_p > 1$, $p \geqslant 1$.

По теореме С. Н. Мергеляна о полиномиальном приближении ([6]) существует такой полином $p_1^{(1)}$, что

$$\|f' - p_1^{(1)}\|_{K^2} < \frac{\varepsilon(r_2)}{8 \cdot 2^2 \cdot c_1}. \tag{1}$$

Из неравенства (1) для полинома

$$p_1(z) = f(0) + \int_0^z p_1^{(1)}(z)\, dz$$

интегрированием по радиусам получаем

$$\|f - p_1\|_{K^2} < \frac{\varepsilon(r_2)}{8 \cdot 2^2 \cdot c_1}.$$

Таким образом, при $j = 0, 1$ имеем

$$\|f^{(j)} - p_1^{(j)}\|_{K^2} < \frac{\varepsilon(r_2)}{8 \cdot 2^2 \cdot c_1}. \tag{2}$$

Предположим, что при некотором $q \geqslant 1$ построены полиномы $p_1, \cdots, p_q$ и $g_q = \sum_{j=1}^{q} p_j$, причем при $0 \leqslant j \leqslant q$

$$\|f^{(j)} - g_q^{(j)}\|_{K^{q+1}\setminus K^q} < \frac{\varepsilon(r_{q+1})}{8 \cdot 2^q \cdot c_q}. \tag{3}$$

Положим

$$h_q(z) = \chi_q(|z| - r_q)(f(z) - g_q(z)). \tag{4}$$

Имеем при $0 \leqslant k \leqslant q$, согласно (3) и $c_q > 1$

$$\|h_q^{(k)}\|_{K^{q+1}\setminus K^q} \leqslant \sum_{j=0}^{k} \binom{j}{k} \|\chi_q^{(j)}\| \, \|f^{(k-j)} - g_q^{(k-j)}\|_{K^{q+1}\setminus K^q} <$$

$$< \frac{2^k c_q}{8 \cdot 2^q \cdot c_q} \varepsilon(r_{q+1}) = \frac{\varepsilon(r_{q+1})}{8}. \tag{5}$$

Аналогично p_1 построим для $K^{q+1} \cup D_q$ и функции h_q такой полином p_{q+1}, что при $0 \leqslant j \leqslant q+1$

$$\|h_q^{(j)} - p_{q+1}^{(j)}\|_{K^{q+2} \cup D_q} < \frac{\varepsilon(r_{q+2})}{8 \cdot 2^q \cdot c_{q+1}}. \tag{6}$$

Согласно (4) и (6) имеем для $g_{q+1} = g_q + p_{q+1}$

$$\|f^{(j)} - g_{q+1}^{(j)}\|_{K^{q+2}\setminus K^{q+1}} < \frac{\varepsilon(r_{q+2})}{8 \cdot 2^q \cdot c_{q+1}} \tag{7}$$

при $0 \leqslant j \leqslant q+1$.

В силу (5), (6) при $0 \leqslant j \leqslant q$

$$\|p_{q+1}^{(j)}\|_{K^{q+1}\setminus K^q} < \frac{\varepsilon(r_{q+1})}{8 \cdot 2^q \cdot c_{q+1}} + \frac{\varepsilon(r_{q+1})}{8} < \frac{\varepsilon(r_{q+1})}{4}. \tag{8}$$

Сопоставляя (3) и (8), получаем при $0 \leqslant j \leqslant q$

$$\|f^{(j)} - g_{q+1}^{(j)}\|_{K^{q+1}\setminus K^q} < \frac{\varepsilon(r_{q+1})}{8 \cdot 2^q \cdot c_q} + \frac{\varepsilon(r_{q+1})}{4} < \frac{\varepsilon(r_{q+1})}{2}. \tag{9}$$

Отметим, что из (4), (5) вытекает при $0 \leqslant j \leqslant q$ и $q \geqslant 2$

$$\|p_q^{(j)}\|_{D_{q-1}} < \frac{\varepsilon(r_{q+1})}{8 \cdot 2^q \cdot c_q}. \tag{10}$$

Из (10) следует, что $g = \sum_{q=1}^{\infty} p_q$ аналитическая в D функция.

Пусть теперь $z \in K$ — произвольная фиксированная точка, $q > 0$ такое число, что $z \in K^{q+1}\setminus K^q$, а $0 \leqslant j \leqslant q$.

Согласно (9) и (10) имеем

$$|f^{(j)}(z) - g^{(j)}(z)| \leqslant |f^{(j)}(z) - g_{q+1}^{(j)}(z)| + \sum_{q+2}^{\infty} |p^{(j)}(z)| <$$

$$< \frac{\varepsilon(r_{q+1})}{2} + \frac{1}{8}\sum_{q+2}^{\infty}\frac{\varepsilon(r_{s+1})}{2^s c_s} < \varepsilon(|z|).$$

Теорема доказана.

2°. Пусть E — множество типа F_σ первой категории на $[0,2\pi]$, $mE = 2\pi$.

Имеет место следующая

Теорема 2. *Для произвольной последовательности* $\{\alpha_p\}$, $\alpha_p \in C(E)$, $p \geq 0$, *существует такая аналитическая в* D *функция* A, *что*

$$\lim_{r\to 1} A^{(p)}(re^{i\vartheta}) = \alpha_p(\vartheta)$$

при $\vartheta \in E$ и $p \geq 0$.

Сначала покажем, что для любой последовательности $\alpha_p \in C(E)$ существует такая $A^* \in \bar{C}(K)$, что

$$\lim_{r\to 1} A^{*(p)}(re^{i\vartheta}) = \alpha_p(\vartheta)$$

при $\vartheta \in E$ и $p \geq 0$.

Доказательство является модификацией схемы Е. Берца [7].

Составим последовательность $\{\beta_p\}$ следующим образом:

$$\beta_p(\vartheta) = e^{ip\vartheta}\alpha_p(\vartheta) \quad p \geq 0.$$

Определим последовательность функций $\{\varepsilon_p\}$, $0 < \varepsilon_p \in C(E)$, $p \geq 1$ с помощью равенств

$$\varepsilon_p(\vartheta) = \frac{1}{2^p \max(|\beta_p(\vartheta)|, 1)}, \quad \vartheta \in E. \tag{11}$$

Нетрудно убедиться, что существует такая последовательность $\{\varepsilon_p^*\}$, $0 < \varepsilon_p^* \in C(E)$, что функции

$$\varphi_p(re^{i\vartheta}) = (-1)^p \chi(r) \int_r^1 \cdots \int_{\sigma_2}^1 \chi\left(\frac{\sigma_1 + \varepsilon_p^*(\vartheta) - 1}{\varepsilon_p^*(\vartheta)}\right) d\sigma_1 \cdots d\sigma_p$$

при $p \geq 1$ и

$$\varphi_0(re^{i\vartheta}) = \chi(r),$$

удовлетворяют условиям

i) $\dfrac{\partial^p}{\partial r^p}\varphi_n(e^{i\vartheta}) = 0, \quad 0 \leq p,\ p \neq n,$

ii) $\max\limits_{r\in[0,1]}\left|\dfrac{\partial^p}{\partial r^p}\varphi_n(re^{i\vartheta})\right| < \varepsilon_n(\vartheta),\ 0 \leq p \leq n-1,\ \vartheta \in E,$

iii) $\dfrac{\partial^n}{\partial r^n}\varphi_n(e^{i\vartheta}) = 1$

при $n \geq 1$.

Рассмотрим ряд

$$A^{*}(re^{i\vartheta})=\sum_{n=0}^{\infty}\varphi_n(re^{i\vartheta})\,\beta_n(\vartheta).$$

В силу (11) и ii) этот ряд и все его формальные радиальные производные ряды сходятся для всех $\vartheta\in E$ равномерно по $r\in[0, 1]$. Следовательно, для всех $\vartheta\in E$ $A^{*}(re^{i\vartheta})$ представляет собой бесконечно дифференцируемую по r функцию. Наконец i), iii) показывают, что функция A^{*} удовлетворяет требуемым условиям.

В качестве функции A можно теперь взять функцию, существование которой утверждается в теореме 1, примененной к функции A^{*}.

Теорема 2 доказана.

Ереванский государственный университет

Поступила 29.IX.1978

Ա. Հ. ՆԵՐՍԻՍՅԱՆ. *Թեորեմ միաժամանակյա շոշափումային մոտարկման մասին (ամփոփում)*

Դիտարկված է միավոր շրջանագծի վրա առաջին կատեգորիայի F_σ- տիպի E բազմության վրա վերջացող շառավիղների վրայով ֆունկցիայի և նրա բոլոր ածանցյալների շոշափումային մոտարկման խնդիրը: Որպես հետևանք թեորեմ 1-ի ստացված է հետևյալ արդյունքը.

Թեորեմ 2. Կամայական $\{\alpha_p\}$, $\alpha_p\in C(E)$, $p\geq 0$, հաջորդականության համար գոյություն ունի միավոր շրջանում անալիտիկ այնպիսի A ֆունկցիա, որ

$$\lim_{r\to 1}A^{(p)}(re^{i\vartheta})=\alpha_p(e^{i\vartheta})$$

բոլոր ոչ բացասական p-երի և $e^{i\vartheta}\in E$ համար:

A. H. NERSESIAN. *A sumiltaneous tangential approximation theorem* (summary)

The problem of simultaneous tangential approximation of a function and all it's derivatives along radii terminating in a set E of the first Baire cathegory and of F_σ type on the unique circle is considered. The next result is obtained as a corollary of the Theorem 1.

Teorem 2. For any sequence $\{\alpha_p\}$, $\alpha_p\in C(E)$, there exists a function A analytical in the unique disk such that

$$\lim_{r\to 1}A^{(p)}(re^{i\vartheta})=\alpha_p(e^{i\vartheta})$$

for all $p\geq 0$ and $e^{i\vartheta}\in E$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *W. Kaplan*. Approximation by entire functions, Mich. Math. Journ., 3, 1955—1956, 43—52.
2. *L. Hoischen*. Eine Verschärfung eines Approximationssatzes von Carleman, Journ. Approx. Theory, 3, 1973, 272—277.
3. *А. А. Нерсесян*. Об одновременном приближении с касанием функций и их производных. Изв. АН Арм.ССР, сер. „Матем.", 8, № 6, 1973, 464—473.

4. *L. Hoischen.* Approximation und Interpolation durch ganze Funktionen, Journ. Approx. Theory, 15, 1975, 116—123.
5. *F. Bagemihl, W. Seidel.* Some boundary properties of analytic functions, Math. Zeitsch, 61, 1954—1955, 186—199.
6. *С. Н. Мергелян.* Равномерные приближения функций комплексного переменного, УМН, 7, вып. 2, 1952, 31—122.
7. *E. Berz.* Operatoren verallgemeinerter Funktionen, Math. Ann., 158, 1965, 215—232.