ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա VII № 1, 1972 Математика

Э. О. НАЗАРЯН

О КОНФОРМНЫХ ОТОБРАЖЕНИЯХ ПРОСТРАНСТВА C^n НА ПРОСТРАНСТВО C^m $(m\leqslant n)$, ПРИДАЮЩИХ ВСЕМ КОМПЛЕКСНЫМ ПРЯМЫМ ОДИНАКОВЫЙ ДЕФЕКТ

В настоящей работе рассматриваются гладкие отображения области $G\subset C_z^n$ на область $G^*\subset C_w^m$ $(m\leqslant n)$, конформные на комплексных прямых и придающие всем комплексным прямым, проходящим через каждую точку $Q\in G$, одинаковый дефект, зависящий только от точки Q. Построен, в замкнутом виде, класс подобных квазиголоморфных отображений $E_Q(n, m)$, где $m=2l$, который в частном случае, когда $n=m=2l$, совпадает с классом В. В. Юрашева (см. [5]).

1°. Рассмотрим отображение

$$T:\ w_i=f_i(z_1,\cdots,\bar{z}_n)\in C^1(G),\ i=1,\cdots,m$$

области $G\subset C_z^n$, принадлежащее классу квазиголоморфных отображений $B_Q(n, m, k)$, конформных на комплексных прямых (см. [6]). Пусть

$$Td:\ w=Az+B\bar{z}$$

—дифференциал отображения (T). Здесь

$$w=(w_1,\cdots,w_m)',\ z=(z_1,\cdots,z_n)',\ A=(a_{ij}),\ B=(b_{ij}),$$

$$i=1,\cdots,m;\ j=1,\cdots,n;\ a_{ij}=\left(\frac{\partial w_i}{\partial z_j}\right)_{z=Q},\quad b_{ij}=\left(\frac{\partial w_i}{\partial \bar{z}_j}\right)_{z=Q},$$

$$\operatorname{Rang} A=k\leqslant m.$$

В силу теоремы 2.1, доказанной в работе [6], для того чтобы отображение $T\in B_Q(n, m, k)$ в точке Q, необходимо и достаточно выполнения условия

$$(A\omega)'\overline{B}\omega=0 \tag{1.1}$$

для всех $\omega=(\omega_1,\cdots,\omega_n)'$, или условия

$$A'\overline{B}=\Psi, \tag{1.2}$$

где Ψ—некоторая кососимметрическая матрица.

Если $T\in B_Q(n, m, k)$ в точке Q, то комплексная прямая

$$z=\omega t, \tag{1.3}$$

где t — комплексный параметр, при отображении T_d переходит или в точку, или, вообще говоря, в действительно двумерную плоскость с уравнением

$$w = A\omega t + B\bar{\omega}\bar{t}. \tag{1.4}$$

Дефект плоскости (см. [3], стр. 411) (1.4) вычисляется по формуле (см. [4])

$$\operatorname{def}(\omega, T_d) = 2\left(\frac{G(A\omega, B\bar{\omega})}{(|A\omega|^2 - |B\bar{\omega}|^2)^2 + 4G(A\omega, B\bar{\omega})}\right), \tag{1.5}$$

где $G(A\omega, B\bar{\omega})$—определитель Грамма векторов $A\omega$, $B\bar{\omega}$.

Определение 1.1. Отображение

$$T\colon w_i = f_i(z_1, \cdots, \bar{z}_n) \in C^1(G),\ i = 1, \cdots, m$$

области $G \subset C_z^n$ на область $G^* \subset C_w^m$, принадлежащее классу квазиголоморфных отображений $B_Q(n, m, k)$ в точке $Q \in G$, принадлежит к классу $E_Q(n, m, k)$ в этой точке, если дифференциал T_d придает всем невырождающимся комплексным прямым, проходящим через точку Q, одинаковый дефект.

Пусть $T \in B_Q(n, m, k)$ в точке Q. Преобразуя формулу (1.5), получаем, что

$$\operatorname{def}(\omega, T_d) = \left(\frac{2(|A\omega|^2 |B\bar{\omega}|^2 - |(A\omega)' \bar{B}\omega|)}{(|A\omega|^2 - |B\bar{\omega}|^2)^2 + 2(|A\omega|^2 |B\bar{\omega}|^2 - |(A\omega)' \bar{B}\omega|^2)}\right)^{1/2}. \tag{1.6}$$

Так как отображение T_d удовлетворяет условию (1.1), то формула (1.6) в этом случае принимает более простой вид, а именно

$$\operatorname{def}(\omega, T_d) = \left(\frac{2|A\omega|^2 |B\bar{\omega}|^2}{|A\omega|^4 + |B\bar{\omega}|^4}\right)^{1/2}. \tag{1.7}$$

Пусть $\operatorname{def}(\omega, T_d) = \delta > 0$. Тогда из (1.7) получаем, что

$$\sigma |A\omega|^2 = |B\bar{\omega}|^2, \tag{1.8}$$

где либо $\sigma = (1 + \sqrt{1 - \delta^4})\delta^{-2}$, либо $\sigma = (1 - \sqrt{1 - \delta^4})\delta^{-2}$. Условие (1.8) эквивалентно следующему:

$$\sigma\omega' A' \bar{A}\bar{\omega} = \omega' B^* B\bar{\omega}$$

или

$$\omega'(\sigma A' \bar{A} - B^* B)\bar{\omega} = 0. \tag{1.9}$$

Положим $C = \sigma A' \bar{A} - B^* B$. Имеет место

Лемма 1.1. *Для того чтобы равенство*

$$\omega' C \bar{\omega} = 0 \tag{1.10}$$

имело место для любого ω необходимо и достаточно, чтобы матрица C была нулевой.

Доказательство. Достаточность очевидна.

Необходимость. Пусть $C = (c_{ij})$, $i, j = 1, \cdots, n$, тогда условие (1.10) можно записать в следующей форме:

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i \sum_{j=1}^{n} c_{ij} \bar{\omega}_j = \sum_{i, j=1}^{n} c_{ij} \omega_i \bar{\omega}_j = 0.$$

Чтобы это равенство имело место для любого w_i ($i=1,\cdots,n$) необходимо, чтобы $c_{ij}=0$ ($i, j=1,\cdots,n$).. Лемма доказана.

Из леммы и из (1.9) следует, что

$$\sigma A'\bar{A}=B^*B. \tag{1.11}$$

Из (1.2) и (1.1) следует

Теорема 1.1. *Для того чтобы отображение*

$$T\colon\ w_i=f_i(z_1,\cdots,\bar{z}_n)\in C^2(G),\ i=1,\cdots,m$$

области $G\subset C_z^n$ на область $G^*\subset C_w^m$ принадлежало классу $B_\sigma(n, m, k)$, для какого либо k, в точке $Q\in G$, необходимо и достаточно, чтобы матрицы A и B, голоморфной и антиголоморфной частей дифференциала отображения T в точке Q, удовлетворяли условиям

$$1)\qquad A'\bar{B}=\Psi,$$

где Ψ — кососимметрическая матрица;

$$2)\qquad \sigma A'\bar{A}=B^*B,$$

где либо $\sigma=(1+\sqrt{1-\delta^4})\,\delta^{-2}$, либо $\sigma=(1-\sqrt{1-\delta^4})\,\delta^{-2}$, δ — дефект, приобретаемый комплексными прямыми, проходящими через точку Q.

2°. О совместности условий теоремы 1.1. Пусть в точке Q

$$\operatorname{Rang} A=k<m. \tag{2.1}$$

Для определенности предположим, что отличен от нуля минор

$$A\begin{pmatrix}1\ 2\cdots k\\ i_1\ i_2\cdots i_k\end{pmatrix}\neq 0. \tag{2.2}$$

Обозначим через A_1, B_1—матрицы размерности (k, n), состоящие из первых k строк матриц A и B, а через A_2, B_2—матрицы размерности $(m-k, n)$, состоящие из последних $(m-k)$ строк матриц A и B.

Тогда в силу (2.1) и (2.2) существует матрица λ, размерности $(m-k, k)$, для которой справедливо равенство

$$A_2=\bar{\lambda}A_1$$

или

$$A=\left(\frac{E}{\lambda}\right)A_1, \tag{2.3}$$

где E—единичная матрица размерности k.

В работе [6] установлено, что из первого условия теоремы 1.1 и условий (2.1) и (2.2) следует, что

$$\bar{B}_1=\bar{P}A_1-\lambda^*\bar{B}_2, \tag{2.4}$$

где P—кососимметрическая матрица. В силу того, что $T\in B_\sigma(n, m, k)$ в точке Q, из соотношения (2.4) далее следует, что

$$\operatorname{Rang}\left(\frac{A_1}{B_2}\right)=m. \tag{2.5}$$

Подставляя (2.3) и (2.4) во второе условие теоремы 1.1, получаем что

$$\sigma(A_1', A_1'\lambda^*)\begin{pmatrix}\overline{A}_1\\ \lambda\overline{A}_1\end{pmatrix}-(A_1' P^*-B_2^*\overline{\lambda},\ B_2^*)\begin{pmatrix}P\overline{A}_1-\lambda' B_2\\ B_2\end{pmatrix}$$

или

$$\sigma A_1'\overline{A}_1+\sigma A_1'\lambda^*\lambda\,\overline{A}_1-(A_1'P^*-B_2^*\overline{\lambda})(P\overline{A}_1-\lambda' B_2)-B_2^* B_2=0.$$

Отсюда далее вытекает, что

$$\begin{pmatrix}\overline{A}_1\\ B_2\end{pmatrix}'\begin{pmatrix}\sigma D-P^*P, & P^*\overline{\lambda}\\ \overline{\lambda}P, & -D\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_1\\ \overline{B}_2\end{pmatrix}'=0, \tag{2.6}$$

где $D=E+\lambda'\overline{\lambda}$—невырожденная матрица (см. [1], стр. 33). Из условий (2.5) и (2.6) следует, что

$$\begin{pmatrix}\sigma D-P^*P, & P^*\overline{\lambda}\\ \overline{\lambda}P, & -D\end{pmatrix}=0.$$

Это соотношение противоречит требованию невырожденности матрицы D.

Нам остается разобрать случай, когда $k=m$, т. е.

$$\mathrm{Rang}\,A=m. \tag{2.7}$$

Сначала мы докажем некоторые леммы.

Лемма 2.1. *Пусть матрицы A и B размерности (m, n) удовлетворяют условию*

$$A'\overline{B}=\Psi, \tag{1.2}$$

где Ψ—кососимметрическая матрица и

$$\mathrm{Rang}\,A=m. \tag{2.7}$$

Тогда

$$\overline{B}=\overline{\Phi}A, \tag{2.8}$$

где Φ—некоторая кососимметрическая матрица.

Доказательство. Известно, что (см. [2], теорема 1) для существования решения матричного уравнения

$$A'X=\Psi \tag{1.2}$$

необходимо и достаточно выполнения условия

$$A'A'^{+}\Psi=\Psi,$$

или, в силу кососимметричности матрицы Ψ, условия

$$\Psi A^{+}A=\Psi, \tag{2.9}$$

где A^{+} — псевдообратная матрица для матрицы A (см. [1], стр. 32). При выполнении этого условия общее решение уравнения (1.2) дается формулой

$$X=A'^{+}\Psi+(E-A'^{+}A')\,U, \tag{2.10}$$

где E—единичная матрица размерности m, а U—произвольная матрица размерности (m, n).

Подставляя левую часть соотношения (2.9) в (2.10), получаем, что

$$X = \overline{\Phi} A + (E - A'^{+} A') U,$$

где

$$\overline{\Phi} = A'^{+} \Psi A^{+}.$$

Кососимметричность матрицы Φ проверяется непосредственно. Так как матрица $\overline{B}$ удовлетворяет уравнению (1.2), то существует такая матрица U_1, что

$$\overline{B} = \overline{\Phi} A + (E - A'^{+} A') U_1. \tag{2.11}$$

Из определения псевдообратной матрицы следует, что если матрица A имеет полный ранг, т. е. если $\mathrm{Rang}\, A = m$, то

$$AA^{+} = E \quad \text{или} \quad E - A'^{+} A' = 0. \tag{2.12}$$

Подставляя (2.12) в (2.11), завершаем доказательство леммы.

Лемма 2.2. *Если*

$$\overline{B} = \overline{\Phi} A, \tag{2.8}$$

где Φ—кососимметрическая матрица, то

$$A'\overline{B} = \Psi, \tag{1.2}$$

где матрица Ψ—тоже кососимметрична.

Доказательство. Действительно, умножая равенство (2.8) слева на матрицу A' и обозначая

$$\Psi = A'\overline{\Phi} A,$$

получаем условие (1.2)

Из лемм 2.1, 2.2 следует, что условие 1) теоремы 1.1 эквивалентно условию (2.8). Таким образом, должны одновременно выполняться условия

$$\overline{B} = \overline{\Phi} A \tag{2.8}$$

и

$$\sigma A'\overline{A} = B^{*}B. \tag{1.11}$$

Отсюда вытекает, что матрицы A и B должны иметь один и тот же ранг, равный m. Отсюда и из условия (2.8) далее следует, что $m = 2l$, поскольку кососимметрическая матрица Φ может иметь только четный ранг (см. [1], стр. 322).

Подставляя (2.8) в (1.11), находим, что $\Phi^{*}\Phi = \sigma E$, где

$$\sigma = (1 + \sqrt{1 - \delta^4})\, \delta^{-2}, \quad \text{если} \quad \sum_{s=1}^{2l} |\Phi_{st}|^2 < 1,$$

$$\sigma = (1 - \sqrt{1 - \delta^4})\, \delta^{-2}, \quad \text{если} \quad \sum_{s=1}^{2l} |\Phi_{st}|^2 > 1.$$

Итак доказаны

Теорема 2.1. *Класс $E_Q(n, m, k)$ в случае, если $k < m$ и $m \neq 2l$— пуст.*

Замечание. Благодаря наличию этой теоремы, мы дальше рассматриваем только отображения $E_Q(n, 2l, 2l) \equiv E_Q(n, 2l)$.

Теорема 2.2. *Для того чтобы отображение*

$$T:\ w_i = f_i(z_1, \cdots, \bar{z}_n) \in C_1(G),\ i=1, \cdots, 2l,\ 2l \leqslant n$$

области $G \subset C^n_z$ принадлежало классу квазиголоморфных отображений $E_Q(n, 2l)$ в точке Q, необходимо и достаточно, чтобы матрицы A и B, голоморфной и антиголоморфной частей дифференциала отображения T в этой точке удовлетворяли условиям

$$1)\qquad \bar{B} = \bar{\Phi} A,$$

где Φ—кососимметрическая матрица и

$$2)\qquad \Phi^* \Phi = \sigma E,$$

где

$$\sigma = (1 + \sqrt{1-\delta^4})\delta^{-2}, \quad \text{если} \quad \sum_{s=1}^{2l} |\Phi_{st}|^2 > 1,$$

$$\sigma = (1 - \sqrt{1-\delta^4})\,\delta^{-2}, \quad \text{если} \quad \sum_{s=1}^{2l} |\Phi_{st}|^2 < 1.$$

Здесь δ — дефект невырождающихся комплексных прямых, проходящих через точку $Q \in G$.

Замечание. Второе условие этой теоремы означает, что кососимметрическая матрица Φ отличается от унитарной на постоянный множитель.

3°. Построение класса отображений $E_Q(n, 2l)$.

Определение 3.1. Отображение

$$T:\ w_i = f_i(z_1, \cdots, \bar{z}_n) \in C^1(G),\ i=1, \cdots, 2l;\ 2l \leqslant n,$$

принадлежит классу квазиголоморфных отображений $E_Q(n, 2l)$ в области G, если

1) $\operatorname{Rang} \dfrac{\partial(w, \bar{w})}{\partial(z, \bar{z})} = 4l;$

2) В каждой точке $Q \in G$ дифференциал отображения T сохраняет окружности с центром в этой точке, лежащие на всех невырождающихся комплексных прямых, переводит окружности, лежащие на вырождающихся комплексных прямых, в точки и придает всем невырождающимся комплексным прямым, проходящих через точку Q, одинаковый дефект.

Очевидно, что для подобного отображения имеет место теорема 2.2 в любой точке $Q \in G$.

Рассмотрим вопрос об интегрировании системы дифференциальных уравнений, которым должны удовлетворять функции $w_i = f_i(z_1, \cdots \cdots, \bar{z}_n)$, определяющие отображение $E_Q(n, 2l)$.

Эта система дифференциальных уравнений, в силу теоремы 2.2, может быть написана в следующей форме:

$$\begin{cases} \overline{B}=\overline{\Phi}A \\ A=-\sigma^{-1}\Phi\overline{B}, \end{cases} \tag{3.1}$$

где $\sigma^{-1}=\left(\sum\limits_{s=1}^{2l}|\Phi_{st}|^2\right)^{-1}$ — элементы кососимметрической матрицы Φ, функции $\Phi_{st}\in C^1(G)$ $(s, t=1,\cdots, 2l)$.

Последнее обстоятельство следует из того, что если первое равенство условия (3.1) умножить справа на матрицу A^+, получается $\overline{\Phi}=\overline{B}A^+$.

В работе [6] доказано, что из условий интегрируемости системы (3.1) следует голоморфность функций

$$\Phi_{ij} \text{ и } \left(\sum_{s=1}^{2l}|\Phi_{st}|^2\right)^{-1}\overline{\Phi}_{ij}$$

в области G. Учитывая голоморфность этих функций, можно доказать (см. [5], стр. 74), что

$$\Phi=\varphi L, \tag{3.2}$$

где φ—некоторая голоморфная функция $L=(l_{ij})$, $i, j=1,\cdots, 2l$ — некоторая кососимметрическая унитарная матрица.

Используя соотношения (3.1), легко показать, что

$$\Lambda=W-\Phi\overline{W}. \tag{3.3}$$

Здесь $\Lambda=(\Lambda_1,\cdots, \Lambda_{2l})'$, Λ_k —функции, голоморфные в области G.

Решая систему, состоящую из уравнения (3.3) и ему сопряженного, получим

$$W=(E-\Phi\overline{\Phi})^{-1}(\Phi\overline{\Lambda}+\Lambda). \tag{3.4}$$

Подставляя правую часть соотношения (3.2) в (3.4), найдем, что

$$W=(\varphi L\overline{\Lambda}+\Lambda)(1+|\varphi|^2)^{-1}. \tag{3.5}$$

Итак доказана

Теорема 3.1. *Если отображение*

$$T:\ w_i=f_i(z_1,\cdots, \overline{z}_n)\in C^2(G),\ i=1,\cdots, 2l;\ 2l\leqslant n$$

принадлежит классу $E_Q(n, 2l)$, то в некоторой окрестности каждой точки $Q\in G$ оно может быть представлено в виде

$$T^*:\ W=(\varphi L\overline{\Lambda}+\Lambda)(1+|\varphi|^2)^{-1}.$$

Здесь φ и $\Lambda=(\Lambda_1,\cdots, \Lambda_{2l})$ — голоморфные в G функции, L—постоянная унитарная кососимметрическая матрица.

Имеет место

Теорема 3.2. *Отображение T^* области $G\subset C^n_z$, определяемое равенствами* (3.5), *принадлежит классу $E_Q(n, 2l)$, если*

$$\operatorname{Rang}\frac{\partial(w, \overline{w})}{\partial(z, \overline{z})}=4l$$

в каждой точке $Q \in G$, функции, входящие в (3.5) *голоморфны в* G, *а* L*—постоянная унитарная кососимметрическая матрица.*

Теорема доказывается непосредственной проверкой. Рассмотрим пример отображения, принадлежащего классу $E_O(n, 2l)$.

Теорема 3.3. *Отображение*

$$w_k = (z_k + (-1)^{k-1} \bar{z}_{k+(-1)^{k-1}} z_{2l+1} \cdots z_n)(1 + |z_{2l+1} \cdots z_n|^2)^{-1}, \tag{3.6}$$

$k=1, \cdots, 2l$, *принадлежит классу* $E_O(n, 2l)$ *в области*

$$G = \left\{ z \in C^n, \sum_{k=1}^{2l} |z_k|^2 < 1, \ |z_{2l+1} \cdots z_n| < 1 \right\}$$

и отображает эту область на гипершар

$$\left\{ \sum_{k=1}^{2l} |w_k|^2 < 1 \right\}.$$

Доказательство. Подставляя в (3.5)

$$L_{2i-1, j} = \begin{cases} 0, & j \neq 2i \\ 1, & j = 2i \end{cases} \quad L_{2i, j} = \begin{cases} 0, & j \neq 2i-1 \\ -1, & j = 2i-1, \end{cases}$$

$$\varphi = z_{2l+1} \cdots z_n, \ \Lambda_j = z_j, \ i=1, \cdots, l; \ j=1, \cdots, 2l,$$

получаем отображение (3.6).

Вычисления показывают, что

$$\operatorname{Rang} \frac{\partial (w, \bar{w})}{\partial (z, \bar{z})} = 4l \tag{3.7}$$

и

$$\sum_{k=1}^{2l} |w_k|^2 = (1 + |z_{2l+1} \cdots z_n|^2)^{-1} \sum_{k=1}^{2l} |z_k|^2. \tag{3.8}$$

Из соотношений (3.7) и (3.8) следует справедливость теоремы.

Заметим, что дефекты, приобретаемые комплексными прямыми при отображении (3.6), изменяются в области G от нуля до единицы.

В заключение выражаю благодарность проф. Б. А. Фуксу за постановку задачи и внимание к настоящей работе.

Ереванский государственный
университет

Поступило 28.I.1971

Է. Հ. ՆԱԶԱՐՅԱՆ. C^m տարածության վրա $C^n (m<n)$ տարածության կոնֆորմ արտապատկերումների մասին, որոնք բոլոր կոմպլեքս ուղիղներին հաղորդում են միևնույն դեֆեկտը (*ամփոփում*)

Դիտարկվում են $G^* \subset C^m$ տիրույթի վրա $G \subset C^n_z (m<n)$ տիրույթի կոնֆորմ արտապատկերումները, որոնք բոլոր կոմպլեքս ուղիղներին հաղորդում են միևնույն դեֆեկտը։ Փակ տեսքով կառուցված է $E_O (n, m)$ դասը։ Գտնված են այդ դասին պատկանելու անհրաժեշտ և բավարար պայմաններ։

E. H. NAZARIAN. *On quasi-conformal mappings of C^n space on C^m* ($m < n$) *which ascribe the same defect to every complex line* (summary)

The paper discuses conform mappings of domain $G \subset C_z^n$ on domain $G \subset C_z^m$ ($m < n$) which induces the same defect to each complex line. In a closed form the class $E_Q(n, 2l)$ is constructed. Necessary and sufficient condition of belonging to that class are pointed out.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ф. Гантмахер.* Теория матриц, 1967.
2. *R. Penrose.* A generalized inverse for matrices, Proc. Cambridge Phill. Soc., 51, № 3, 1955, 406—413.
3. *Б. А. Фукс.* Специальные главы теории аналитических функций многих комплексных переменных, М., 1963.
4. *Д. Е. Рудник.* Об одной оценке дефекта при квазиголоморфных отображениях в пространстве C^n, Труды МИЭМ, вып. 4.
5. *В. В. Юрашев.* О квазиголоморфных отображениях, придающих всем комплексным прямым одинаковый дефект, Известия АН АрмССР, сер. „Математика", IV, № 1, 1969, 69—76.
6. *Э. О. Назарян.* Квазиголоморфные отображения пространства C^n на пространство C^m ($m < n$), конформные на комплексных прямых, Изв. АН АрмССР, сер. „Математика", VI, № 6, 1971, 423—439.