ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա V, № 3, 1970 Математика

KLAUS HORNEFFER

EINE CROFTONFORMEL UND DER SATZ VON STOKES

Einleitung

Die Cauchy—Crofton—Formel der klassischen Integralgeometrie drückt den k-dimensionalen Inhalt einer orientierten k-demensionalen Untermannigfaltigkeit des R^n durch ein Integral über die Anzahl der Schnittpunkte mit $(n-k)$-dimensionalen affinen Teilräumen aus. Ist T das positive normierte k-Tangentialfeld der k-dimensionalen Untermannigfaltigkeit N, τ ihr Volumenelement, $G(n, n-k)$ die Mannigfaltigkeit der affinen orientierten $(n-k)$ — dimensionalen Teilräume des R^n, μ ein passend normiertes invariantes Maß auf $G(n, n-k)$, so kann die Cauchy—Crofton—Formel in der Form

$$\int\limits_N \tau = \int\limits_{G(n,\, n-k)} \sum_{p \in g \cap N} \langle T, \tau \rangle_p \, \mu(dg) \tag{1}$$

geschrieben werden. Hierbei ist also $\langle T, \tau \rangle = 1$.

In dieser Arbeit wird eine Crofton—Formel behandelt, die sich von (1) in zweierlei Hinsicht unterscheidet. Zunächst bleibt die Gleichung (1) offenbar auch dann sinnvoll, falls man unter τ nicht das Volumenelement von N, sondern eine beliebige Differentialform k-ten Grades auf N (oder auf R^n) versteht. Weiter wird das k — Tangentialfeld T von N durch einen gewissen k — Normalenvektor des affinen Teilraums g ersetzt. Man erhält so eine neue Croftonformel für Integrale von Differentialformen über C^1 — Untermannigfaltigkeiten des R^n.

Mit Hilfe dieser Croftonformel wird ein integral-geometrischer Beweis des Satzes von Stokes gegeben. Dabei wird nur vorausgesetzt, daß die Untermannigfaltigkeit N von der Klasse C^1 ist und daß die Differentialform auf einer Umgebung von N definiert und dort ebenfalls C^1 ist. Die Darstellung des Integrals einer Differentialform mit Hilfe unserer Croftonformel gestattet es, den Satz von Stokes auf den Satz von Fubini zurückzuführen.

Durch einen Ausdruck ähnlich dem in unserer Croftonformel hat *Maak* ([4]) eine allgemeine Definition der Integrals einer Differentialform gegeben, für die der Satz von Stokes gilt. Als Integrationsbereiche führte er dabei gewisse Systeme von Teilmengen des R^n ein, die die für diese Definition benötigten Eigenschaften aufweisen. Absicht der vorliegenden Arbeit war es dagegen, die Tragweite eines solchen Vorgehens für differenzierbare Untermannigfaltigkeiten zu untersuchen. Das läuft gerade auf die Croftonformel und einen integral-geometrischen Beweis der Stokesformel hinaus.

§ 1. Dichte für k-Ebenen

Die Croftonformel, deren Beweis wir anstreben, ersetzt das Integral einer Differentialform über eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit des R^n durch ein Integral auf dem Raum der $(n-k)$-dimensionalen affinen Teilräume. Wir erläutern daher zunächst die hierfür benötigte Dichte.

Es sei E ein n-dimensionaler affiner orientierter euklidischer Punktraum. Unter einer k-Ebene in E verstehen wir für $0<k<n$ einen orientierten k-dimensionalen affinen Teilraum von E. Eine o-Ebene sei ein Punkt von E, eine n-Ebene der Raum E selbst. Die Menge der k-Ebenen in E bezeichnen wir mit $G(E, k)$. Ist E der orientierte R^n, so schreiben wir kurz $G(n, k)$.

Auf $G(E, k)$ operiert die Bewegungsgruppe von E transitiv und effektiv; $G(E, k)$ kann mit dem homogenen Raum

$$\frac{iSO(n)}{iSO(k)\times SO(n-k)},$$

identifiziert werden und ist daher eine analytische Mannigfaltigkeit der Dimension $(k+1)(n-k)$.

Unter einer Dichte auf einer n-dimensionalen C^r-Mannigfaltigkeit M $(r>1)$ verstehen wir eine reelle Funktion auf dem Bündel $\overset{n}{\tau}M$ der n-Tangentialvektoren,

$$\rho\colon \overset{n}{\tau}M \to R,$$

mit $\rho(\lambda v)=|\lambda|\rho(v)$ für $\lambda\in R$. Ist ω eine Differentialform vom Grade n auf der Mannigfaltigkeit M, so wird eine (nicht-negative) Dichte $|\omega|$ definiert durch

$$|\omega|(v):=|\langle v, \omega\rangle|=|\omega(v)|.$$

Die in der klassischen Integralgeometrie betrachteten Dichten werden in der Regel auf diese Weise durch Differentialformen definiert.

Um eine bezüglich der Bewegungsgruppe von E invariante Dichte auf $G(E, k)$ explizit anzugeben, ist es zweckmäßig, folgendermaßen vorzugehen. Es sei für $0<k<n$ $S_k(\epsilon)$ die Menge der normierten zerlegbaren k-Vektoren des Vektorraums ϵ von E. $S_0(\epsilon)$ enthalte nur die Zahl 1, $S_n(\epsilon)$ nur den positiven normierten n-Vektor von ϵ.

Ordnet man einem Element $e\in S_k(\epsilon)$ denjenigen k-dimensionalen Vektorraum zu, dessen Elemente die Gleichung

$$x \wedge e = 0$$

erfüllen und dessen Orientierung durch den k-Vektor e bestimmt ist, so liefert diese Abbildung eine Bijektion von $S_k(\mathfrak{E})$ auf die Grassmannmannigfaltigkeit der orientierten k-dimensionalen Teilvektorräume von $\mathfrak{E}$. Sie ist ein Isomorphismus der homogenen Räume der speziellen orthogonalen Gruppe von $\mathfrak{E}$. $S_k(\mathfrak{E})$ ist insbesondere eine analytische Mannigfaltigkeit der Dimension $k(n-k)$. Die Abbildung π,

$$\begin{array}{c} E \times S_k(\mathfrak{E}) \\ \downarrow \pi \\ G(E, k), \end{array}$$

$\pi(p, e) := p + \bar{e}$, die dem Paar (p, e) die k-Ebene durch p zuordnet, deren zugehöriger orientierter Vektorraum $\bar{e}$ durch e gegeben ist, definiert ein affines G^{∞} — Bündel über $G(E, k)$ (zum Begriff des affinen Bündels vgl. z. B. [2], S. 293). Das zugehörige Vektorraumbündel hat als Faser über $g \in G(E, k)$ gerade den Vektorraum von g. Die Projektion π ist mit den Operationen der Bewegungsgruppe von E verträglich.

Als homogene Riemannsche Mannigfaltigkeit besitzt $S_k(\mathfrak{E})$ eine bezüglich der speziellen orthogonalen Gruppe $SO(\mathfrak{E})$ invariante Dichte, die durch das Volumenelement $\nu_{\mathfrak{E}, k}$ definiert werden kann. Identifiziert man für $0 < k < n$ die Mannigfaltigkeit $S_k(\mathfrak{E})$ mit

$$\frac{SO(n)}{SO(k) \times SO(n-k)}$$

und bildet ω_{ij} $(1 \leqslant i < j \leqslant n)$ die natürliche Basis der Maurer—Cartan — Formen von $SO(n)$, so gilt mit der Projektion $\pi_{\mathfrak{E}}$,

$$\begin{array}{c} SO(n) \\ \downarrow \pi_{\mathfrak{E}} \\ S_k(\mathfrak{E}), \end{array}$$

die Gleichung

$$\overset{*}{\pi}_{\mathfrak{E}} \nu_{\mathfrak{E}, k} = \bigwedge_{i=1}^{k} \bigwedge_{j=k+1}^{n} \omega_{ij}.$$

Auf $E \times S_k(\mathfrak{E})$ existiert eine kanonische Differentialform vom Grade $n-k$. Sei nämlich $(p, e) \in E \times S_k(\mathfrak{E})$. Dann existieren natürliche Vektorraumisomorphismen

$$\overset{n-k}{\tau}_{(p,e)}(E \times S_k(\mathfrak{E})) \simeq \overset{n-k}{\bigwedge}(\mathfrak{E}_p E \oplus \tau_e S_k(\mathfrak{E}))$$

$$\simeq \bigoplus_{r=0}^{n-k} (\overset{n-k-r}{\bigwedge} \tau_p E \odot \overset{r}{\bigwedge} \tau_e S_k(\mathfrak{E})) = \bigoplus_{r=0}^{n-k} (\overset{n-k-r}{\tau_p} E \odot \overset{r}{\tau}_e S_k(\mathfrak{E}))$$

Die Projektion auf die erste Komponente bildet ein Element von $\overset{n-k}{\tau}_{(p,e)}(E \times S_k(\mathfrak{E}))$ ab auf ein Element von $\overset{n-k}{\tau_p} E \simeq \overset{n-k}{\bigwedge} \mathfrak{E}$.

Ist T der positive normierte n-Vektor aus $\overset{n}{\bigwedge} \mathfrak{E}$ und bezeichnet $(\,|\,)$ die Metrik von $\mathfrak{E}$, so ist der $*$-Operator definiert durch $(* x|y) = (T|x \wedge y)$. Mit der Abbildung

$$\bigwedge^{n-k} \mathfrak{E} \to \boldsymbol{R},$$
$$v \mapsto (*^{-1} v|e),$$

erhalten wir schließlich eine $\boldsymbol{R}$-lineare Abbildung

$$\alpha_{E,k}|_{(p,e)}: \overset{n-k}{\tau_{(p,e)}}(E \times S_k(\mathfrak{E})) \to \boldsymbol{R}.$$

Offenbar ist $\alpha_{E,k}$ eine C^∞— Differentialform vom Grad $n-k$ au $E \times S_k(\mathfrak{E})$.

Mittels der auf $E \times S_k(\mathfrak{E})$ zurücktransportierten $k(n-k)$-Form $\nu_{\mathfrak{E},k}$ definieren wir

$$\tilde{\Omega}_{E,k} := \alpha_{E,k} \wedge \overset{*}{pr_2} \nu_{\mathfrak{E},k},$$

Man sieht leicht, daß $\tilde{\Omega}_{E,k}$ invariant bezüglich der Bewegungsgruppe $iSO(E)$ und projizierbar (wahlinvariant) ist; es existiert daher genau eine C^∞-Differentialform $\Omega_{E,k}$ auf $G(E, k)$ mit

$$\pi^* \Omega_{E,k} = \tilde{\Omega}_{E,k}.$$

Durch $\mu_{E,k} := |\Omega_{E,k}|$ wird dann eine invariante Dichte auf $G(E, k)$ definiert. Für $\mu_{R^n,k}$ schreiben wir kurz $\mu_{n,k}$, analog $\nu_{n,k}$ und $\Omega_{n,k}$.

Wir bemerken noch, daß die Definition von $\Omega_{E,k}$ funktoriell ist. Ist u: $E \to F$ ein Isomorphismus der orientierten euklidischen Räume, so induziert u einen Diffeomorphismus $G(E, k) \to G(F, k)$, der $\Omega_{F,k}$ in $\Omega_{E,k}$ überführt.

§ 2. Die Croftonformel

Für den Beweis unserer Croftonformel benötigen wir den Satz über die Transformation eines Integrals für den Fall, daß die Abbildung der zugrunde liegenden Mannigfaltigkeiten kein globaler Diffeomorphismus ist. Wir formulieren ihn in folgender Weise.

Satz 2.1. Seien N eine kompakte C^1— Mannigfaltigkeit mit oder ohne Rand, M eine parakompakte C^1— Mannigfaltigkeit mit dim $M = \dim N$, $\varphi: N \to M$ eine C^1— Abbilidung, ρ eine Dichte auf M, f eine Funktion auf N derart, daß $f\overset{*}{\varphi}\rho$ über N integrierbar ist. Sei für $q \in \varphi(N)$

$$F(q) := \sum_{p \in \varphi^{-1}(\{q\})} f(p).$$

Dann ist $F\rho$ über $\varphi(N)$ integrierbar und es gilt

$$\int_N f \overset{*}{\varphi}\rho = \int_{\varphi(N)} F\rho.$$

Beweis. Der Satz wird auf die entsprechende lokale Aussage im $\boldsymbol{R}^n$ zurückgeführt, die man etwa in [3], S. 243 findet. Man kann sie auch leicht aus dem gewöhnlichen Transformationssatz für C^1—Diffeomorphismen herleiten. Mit Hilfe von Partitionen der Eins überträgt man die lokale Aussage auf den Fall, daß φ ein C^1—Abbildung $\varphi: N \to M$ für $\dim N = \dim M = n$ mit Rang $\varphi = n$ in ganz N ist.

Ist diese zusätzliche Voraussetzung nicht erfüllt, kann man so schließen. Für kritische Punkte $p \in N$ ist $\dot{\varphi}\mathfrak{p}|_p = 0$. Die regulären Punkte bilden eine offene Untermannigfaltigkeit N_0 von N, auf der also Rang $\varphi = n$ ist. Also gilt

$$\int_N f\,\dot{\varphi}\mathfrak{p} = \int_{N_0} f\,\dot{\varphi}\mathfrak{p} = \int_{\varphi(N_0)} F\mathfrak{p}.$$

Nach dem Satz von Sard ([5], S. 47) bilden die kritischen Werte von φ eine Nullmenge, daher ist $\int_{\varphi(N_0)} F\mathfrak{p} = \int_{\varphi(N)} F\mathfrak{p}$, q. e. d.

Definition 2.2. Sei N eine orientierte k-dimensionale C^1—Untermannigfaltigkeit des R^n, und T ihr positives normiertes k-Tangentialfeld. Für $g \in G(n, n-k)$ sei $V(g)$ das positive k-Normalenfeld auf g, m. a. W. ist $g = p + \bar{e}$, so sei $V(g) = *e$. Sei die Abbildung

$$\varepsilon: N \times G(n, n-k) \to \{-1, 0, +1\}$$

erklärt durch

$$(p, g) \mapsto \operatorname{sgn}\,(V(g) \mid T_p).$$

Durch $\varepsilon(p, g)$ wird der Punkt $p \in g \cap N$ orientiert, falls g nicht tangential zu N in p ist. Allgemeiner sei die Orientierung eines Durchschnitts $h \cap N$ für $h \in G(n, p)$ durch folgende Vorschrift festgelegt. Das innere Produkt zwischen r- und s-Vektoren des euklidischen Vektorraums $\mathfrak{E}$ mit der Metrik $(\,|\,)$ wird definiert durch

$$(x|y \lrcorner z) = (x \wedge y|z) \quad \text{und} \quad (z \llcorner y|x) = (z|y \wedge x)$$

für $x \in \overset{s-r}{\wedge}\mathfrak{E}, y \in \overset{r}{\wedge}\mathfrak{E}, z \in \overset{s}{\wedge}\mathfrak{E}$. Diese Definition überträgt sich sofort auf k-Vektorfelder und Differentialformen auf Riemannschen Mannigfaltigkeiten. Für fast alle $h \in G(n, l)$ ist $h \cap N$ leer oder eine $(k+l-n)$—dimensionale Untermannigfaltigkeit von M (Diese keineswegs triviale Aussage kann man z. B. mittels des Satzes von Sard zeigen.). Sei für ein festes h das letztere der Fall. Dann ist $\dim\,(h \cap \tau_p N) = k + l - n$. Dies ist genau dann der Fall, wenn für das k-Tangentialfeld T von N gilt $V_p(h) \lrcorner T_p \neq 0$ (vgl. [1], S. 112). Man kann daher eine Orientierung von $h \cap N$ dadurch definieren, daß man das $(k+l-n)$—Vektorfeld $V(h) \lrcorner T$ positiv nennt.

Wir bezeichnen mit $O_{n,k}$ das Volumen der orientierten Grassmannmannigfaltigkeit $S_k(R^n)$. Dann ist $O_{n,1} = O_n$ das Volumen der $(n-1)$-Sphäre in R^n und allgemeiner für $1 < k < n$

$$O_{n,k} = \frac{O_n \cdot O_{n-1} \cdots O_{n-k+1}}{O_2 O_3 \cdots O_k}.$$

Damit lautet unsere Groftonformel:

Satz 2.3. Es sei N eine orientierte kompakte k-dimensionale C^1 — Untermannigfaltigkeit des R^n mit oder ohne Rand. Ist ω eine C^r — Differentialform ($r > 0$) vom Grad k in R^n, so gilt

$$\int_N \omega = \frac{\binom{n}{k}}{O_{n,k}} \int_{G(n,\, n-k)} \sum_{p \in g \cap N} \varepsilon(p,\, g) < V(g),\, \omega >_p \mu_{n,\, n-k}(dg).$$

Beweis. Sei $\bar{N}: = \{(p,\, g) \mid p \in g \cap N,\ g \in G(n,\, n-k)\}$. Wir betrachten das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
 & N \times S_{n-k}(R^n) \arrow[r, "(\iota, id)"] \arrow[dl, "pr_1"'] \arrow[d] & R^n \times S_{n-k}(R^n) \arrow[r, "pr_2"] \arrow[d, "\pi"] & S_{n-k}(R^n) \arrow[d, "*"] \\
N & \tilde{N} \arrow[l, "pr_1"] \arrow[r, "pr_2"'] & G(n,n-k) \arrow[r, "V"'] \arrow[ur, "\gamma"] & S_k(R^n)
\end{tikzcd}$$

Die Abbildung π: $(p,\, e) \mapsto p + \bar{e}$ wurde auf S. 3 definiert; da $*$ invertierbar ist, ist $\gamma: = \overset{-1}{*} \circ V$ erklärt; ι ist die Einbettung $N \hookrightarrow R^n$.

Es existiert nun genau eine Abbildung

$$\Psi: N \times S_{n-k}(R^n) \to \bar{N},$$

so daß alle Teildigaramme kommutativ sind. Offenbar muß dazu

$$\Psi(p,\, e) = (p,\, p + \bar{e})$$

sein. Ψ ist eine Bijektion. Denn sei für $(p,\, g) \in \bar{N}$

$$\chi(p,\, g): = (p,\, \gamma(g))$$

gesetzt. Dann ist $\Psi \circ \chi(p,\, g) = (p,\, p + \overline{\gamma(g)}) = (p,\, g)$, da $p + \overline{\gamma(g)}$ diejenige k-Ebene durch p ist, deren orientierter Vektorraum gerade durch $\gamma(g)$ bestimmt ist. Außerdem ist $\chi \circ \Psi\ (p,\, e) = (p + \bar{e})) = (p,\, e)$.

Wir können daher $\bar{N}$ zu einer C^1 — Mannigfaltigkeit machen, indem wir verlangen, daß Ψ ein Diffeomorphismus sein soll. Dann sind auch die Abbildungen pr_1 und pr_2 auf $\bar{N}$ stetig differenzierbar. Außerdem ist dim $\bar{N} =$ dim $N +$ dim $S_{n-k}(R^n) = k + k(n-k) = k(n-k+1) =$ dim $G(n,n-k)$.

Die Funktion $\varepsilon < V,\, \omega >$ ist auf $N \times G(n,\, n-k)$, also auch auf $\bar{N}$ erklärt, außerdem fast überall stetig. Wir können daher das Integral

$$I: = \int_{\bar{N}} \varepsilon < V,\, \omega > pr_2^* \mu = \int_{\Psi(N \times S_{n-k}(R^n))} \varepsilon < V,\, \omega > pr_2^* \mu$$

betrachten, wobei $\mu = \mu_{n,\, n-k}$ gesetzt ist. Der gewöhnliche Transformationssatz liefert

$$I = \int\limits_{N \times S_{n-k}(R^n)} (\varepsilon < V,\ \omega >) \circ \Psi \cdot \Psi^* \, pr_2^* \, \mu.$$

Es ist $(\varepsilon < V,\ \omega >) \circ \Psi (p,\ e) = \operatorname{sgn} (*\ e | T_p) < *e,\ \omega_p >$. Andererseits ist

$$\Psi^* pr_2^* \mu = (\iota,\ id)^* \pi^* \mu = | (\iota, id)^* \bar{\Omega} | = | (\iota,\ id)^* \alpha \wedge pr_2^* \nu |$$

$$\text{und } < v,\ (\iota,\ id)^* \alpha_{(p,\, e)} > = < (\iota,\ id)_{*(p,\, e)} v,\ \alpha_{(p,\, e)} >$$

$$= << v,\ pr_1^* \tau_p > T_p,\ \alpha_{(p,\, e)} > = < v,\ pr_1^* \tau_p > (T_p |\ *^{-1} e)$$

$$= < v,\ (*^{-1} e | T_p)\ pr_1^* \tau_p > \text{ nach § 1, S. 3,}$$

falls τ das Volumenelement von N bezeichnet. Also folgt

$$\Psi^* pr_2^* |_{(p,\, e)} = |(*^{-1} e | T_p)| \cdot | pr_1^* \tau \wedge pr_2^* \nu |_{(p,\, e)}$$

und damit

$$I = \int\limits_{N \times S_{n-k}(R^n)} (*\ e | T_p) < *\ e,\ \omega_p > \tau(dp)\ \nu(de)$$

und mittels des Satzes von Fubini

$$I = \int\limits_N \tau \int\limits_{S_{n-k}(R^n)} (*\ e | T) < *\ e,\ \omega > \nu(de).$$

Um das Integral über $S_{n-k}(R^n)$ auszuwerten, betrachten wir die Abbildung

$$b\colon \overset{k}{\wedge} R^n \times \overset{k}{\wedge} R^n \to R$$

$$b(x,\ y) = \int\limits_{S_{n-k}(R^n)} (*\ e | x)\ (*\ e | y)\ \nu(de).$$

b ist eine symmetrische Bilinearform, die invariant bezüglich $SO(n)$ ist, da ν es ist. Also ist $b(x,\ y) = c\,(x|y)$ mit einer Konstanten c, für die

$$c = \int\limits_{S_{n-k}(R^n)} (*\ e | z)^2 \nu\ (de)$$

für irgendeinen normierten k-Vektor z gilt. Setzen wir für z nacheinander die Vektoren einer orthnonormierten Basis von $\overset{k}{\wedge} R^n$ ein, so folgt

$$c = \frac{1}{\binom{n}{k}} \int\limits_{S_{n-k}(R^n)} \nu = \frac{O_{n,\, n-k}}{\binom{n}{k}} = \frac{O_{n,\, k}}{\binom{r}{k}}.$$

Wir erhalten

$$I = \frac{O_{n,k}}{\binom{n}{k}} \int_N \tau < T, \omega > = \frac{O_{n,k}}{\binom{n}{k}} \int_{\tilde{N}} \omega,$$

da $\tau \odot T$ auf N den Einsoperator darstellt.

Wenden wir den Transformationssatz 2.1 auf die Abbildung pr_2: $\tilde{N} \to G(n, n-k)$ an, so erhalten wir sofort die Aussage des Satzes. q. e. d.

§ 3. Dichte für inzidierende k- und l-Ebenen

Wesentliches Hilfsmittel für den integralgeometrischen Beweis der Stokesformel ist die Mannigfaltigkeit inzidierender k- und l-Ebenen und ihre invariante Dichte.

Ist E ein orientierter euklidischer Punktraum, dim $E = n$, $0 \leqslant k \leqslant \leqslant l \leqslant n$, so sei

$$G(E, k, l) := \{(g, h) | g \in G(E, k), h \in G(E, l), g \subset h\}.$$

Auf $G(E, k, l)$ operiert die Bewegungsgruppe $iSO(E)$ transitiv; $G(E, k, l)$ kann mit dem homogenen Raum

$$\frac{iSO(n)}{iSO(k) \times SO(l-k) \times SO(n-l)}.$$

identifiziert werden und ist damit eine analytische Mannigfaltigkeit der Dimension $(l+1)(n-l)+(k+1)(l-k)$. Invariante Dichten auf $G(E, k, l)$ lassen sich leicht beschreiben, indem man $G(E, k, l)$ als Faserbündel über $G(E, k)$ bzw. $G(E, l)$ betrachet.

Es ist

$$\begin{array}{c} G(E, k, l) \\ \downarrow pr_1 \\ G(E, k) \end{array}$$

ein C^∞ — Faserbündel mit typischer Faser $S_{l-k}(R^{n-k})$ und Strukturgruppe $SO(n-k)$, außerdem ist die Bündelstruktur mit der Operation von $iSO(n, k)$ verträglich. Auf $S_{l-k}(R^{n-k})$ haben wir die bezüglich $SO(n-k)$ invariante $(l-k)(n-l)$ — Form $\nu_{n-k, l-k}$ (das Volumenelement) und auf dem Basisraum $G(E, k)$ die unter $iSO(E)$ invariante $(k+1)(n-k)$— Form $\mu_{E,k}$. Da $\nu_{n-k, l-k}$ invariant ist, existiert genau eine Dichte $\mu_{E,k,l}$ auf $G(E, k, l)$, derart daß eine lokale Trivialisierung

$$pr_1^{-1} U \to U \times S_{l-k}(R^{n-k})$$

eines differenzierbaren Bündelatlas das Produkt der Dichten $\mu_{E,k}$ und $|\nu_{n-k, l-k}|$ in $\mu_{E,k,l}$ überfürht. $\mu_{E,k,l}$ ist dann invariant unter $iSO(n)$.

Auf ähnliche Weise erhalten wir eine invariante Dichte $\mu_{E,k,l}$, falls wir das Bündel

$$\begin{array}{c} G(E, k, l) \\ \downarrow pr_2 \\ G(E, l) \end{array}$$

betrachten. Die typische Faser ist hier $G(l, k)$, die Strukturgruppe $iSO(l)$. Die Dichten $\mu_{l,k}$ auf $G(l, k)$ und $\mu_{E,l}$ auf $G(E, p)$ definieren eine invariante Dichte $\mu'_{E,k,l}$ auf $G(E, k, l)$.

Als homogener Raum kann $G(E, k, l)$ bis auf einen konstanten Faktor höchstens eine invariante Dichte besitzen; es ist also $\mu'_{E,k,l} = \mu_{E,k,l} \cdot c$ mit einer Konstanten $c > 0$. Wir zeigen in § 5, daß diese Konstante 1 ist.

Für die Integration auf $G(E, k, l)$ bezüglich $\mu_{E,k,l}$ gilt ein Satz von Fubini. Denn in einer lokalen Produktdarstellung von $G(E, k, l)$ ist $\mu_{E,k,l}$ ein Produktmaß. Man kann sogar $G(E, k, l)$ bis auf eine Nullmenge als Prcdukt $G(E, k) \times S_{l-k}(R^{n-k})$ bzw. $G(E, l) \times G(l, k)$ schreiben. Es gilt daher der

Satz 3.1 Es sei f eine integrierbare Funktion auf $G(E, k, l)$. Für $g \in G(E, k)$ sei der zum Vektorraum von g senkrechte komplementär orientierte Vektorraum mit $g^{\perp}$ bezeichnet und für $e \in S_{l-k}(g^{\perp})$ sei $h(e)$ der von g und e aufgespannte orientierte affine Teilraum aus $G(E, l)$. Dann ist

$$\int\limits_{G(E,k,l)} f(g, h)\, \mu_{E,k,l}(d(g, h)) =$$

$$= \int\limits_{G(E,k)} \left(\int\limits_{S_{l-k}(g^{\perp})} f(g, h(e))\, \nu_{g^{\perp}, l-k}(de) \right) \mu_{E,k}(dg) =$$

$$= \int\limits_{G(E,l)} \left(\int\limits_{G(h,k)} f(g, h)\, \mu_{h,k}(dg) \right) \mu_{E,l}(dh).$$

§ 4. Integralgeometrischer Beweis der Stokesformel

Um die allgemeine Stokesformel zu beweisen, zeigen wir zunächst, daß das Integral einer Differentialform über den Rand ∂N einer $(k+1)$—dimensionalen C^1 — Untermannigfaltigkeit N des R^n in ein Integral über den Raum $G(n, n-k-1, n-k) := G(R^n, n-k-1, n-k)$ übergeführt werden kann. Der Rand ∂N der Untermannigfaltigkeit N werde dabei wie üblich so orientiert, daß gilt: Ist w ein positiver k — Tangentialvektor von N in p, v ein äußerer Tangentialvektor von N in p, so ist $v \wedge w$ ein positiver $(k+1)$ — Tangentialvektor von N in p. Ist $h \in G(n, k)$, $g \in G(n, l)$, $l < k$, so bezeichne $V^h(g)$ das in h zu g totalsenkrechte normierte konstante $(k-p)$ — Vektorfeld in R^n. Speziell ist also $V^{R^n}(g) = V(g)$.

Satz 4. 1. Es sei $0 \leqslant k < n$. Ist N eine kompakte orientierte $(k+1)$ — dimensionale C^1—Untermannigfaltigkeit von R^n mit orientiertem Rand ∂N; ist ω eine C^1 — Differentialform k-ten Grades auf R^n, so gilt

$$\int_{\partial N} \omega = \frac{\binom{n}{k}(n-k)}{O_{n,k}\,O_{n-k}} \int_{G(n,\,n-k-1,\,n-k)} \sum_{p\in g\cap N} \varepsilon(p,\,g)\; V_p^h(g) < V(h),\ \omega > \mu_{n,\,n-k,\,m-k}(d\,(g,\,h)).$$

Beweis. Nach Satz 2.3 gilt

$$\int_{\partial N} \omega = \frac{\binom{n}{k}}{O_{n,k}} \int_{G(n,\,n-k)} \sum_{p\in h\cap\partial N} \varepsilon(p,\,h) < V(h),\ \omega >_p \mu_{n,\,n-k}(dh).$$

Nun gibt $p \mapsto \varepsilon(p,\,h)$ gerade eie Orientierung von $h\cap\partial N = \partial(h\cap N)$ falls $h\cap N$ eine eindimensionale Untermannigfaltigkeit von N ist. Für fast alle $h\in G(n,\,n-k)$ gilt daher

$$\sum_{p\in h\cap\partial N} \varepsilon(p,\,h) < V(h),\ \omega >_p = \int_{h\cap N} d\iota^* < V(h),\ \omega >,$$

falls $\iota\colon h\cap N \longrightarrow R^n$ die Einbettung bedeutet.

Wiederum nach Satz 2.3 gilt

$$\int_{h\cap N} d\iota^* < V(h),\ \omega > = \frac{n-k}{O_{n-k}} \int_{G(h,\,n-k-1)} \sum_{p\in g\cap(h\cap N)} \varepsilon^h(p,\,h)\; V_p^h(g) < V(h),\ \omega > (dg).$$

Hierin ist $\varepsilon^h(p,\,h) = \operatorname{sgn}(V^h(g)|S)_p$, wenn S positives normiertes Tangentialfeld von $h\cap N$ ist. Dies ist aber gerade $V(h) \lrcorner\, T$, also ist $\varepsilon^h(p,\,g) =$ $= \operatorname{sgn}(V^h(g) \wedge V(h)|T)_p$.

Nun ist $V^h(g) \wedge V(h) = V(g)$. Denn sei $g = p + \bar{e},\ h = p + \bar{f}$. Dann ist $V(g) = *\,e,\ V(h) = *\,f$ und $V^h(g) = f \llcorner e$. Da $g\subset h$ ist, gilt $(f \llcorner e) \wedge *f = *((f \llcorner e) \lrcorner f) = *e$ (vgl. [1], S. 108, 109). Also ist $\varepsilon^h(p,\,g) = \operatorname{sgn}(V(g)|T)_p = \varepsilon(p,\,g)$.

Wir erhalten also

$$\int_{\partial N} \omega = \frac{\binom{n}{k}(n-k)}{O_{n,k}\,O_{n-k}} \int_{G(n,\,n-k)} \mu_{n,\,n-k}(dh) \int_{G(h,\,n-k-1)} \sum_{p\in g\cap N} \varepsilon(p,g)\, V_p^h(g) < V(h),\omega > \mu_{h,\,n-k-1}(dg).$$

Nach 3.1. ergibt der Satz von Fubini, angewandt auf das Faserbündel $G(n,\,n-k-1,\,n-k) \xrightarrow{pr_2} G(n,\,n-k)$

$$\int_{\partial N} \omega = \frac{\binom{n}{k}(n-k)}{O_{n,k}\,O_{n-k}} \int_{G(n,\,n-k-1,\,n-k)} \sum_{p\in g\cap N} \varepsilon(p,g)\, V_p^h(g) < V(h),\omega > \mu_{n,\,n-k-1,\,n-k}(d\,(g,\,h)).$$

q. e. d.

Um das Integral auf $G(n,\,n-k-1,\,n-k)$ in ein Integral auf N umzuformen, betrachten wir das Faserbündel $G(n,\,n-k-1,\,n-k) \xrightarrow{pr_1}$ $\rightarrow G(n,\,n-k-1)$. Da $V(h) = V(g) \llcorner V^h(g)$ ist, folgt mit Satz 3.1 und Satz 4. 1

$$\int\limits_{\partial N} \omega = \frac{\binom{n}{k}(n-k)}{O_{n,k}\,O_{n-k}} \int\limits_{O(n,\,n-k-1)} \sum_{p\in g\cap N} s(p,g)\,\mu_{n,\,n-k-1}(dg) \int\limits_{S_1(g^\perp)} e\langle V(g)\llcorner e,\omega\rangle\,\nu_{g^\perp,1}(de).$$

Hierin ist $g^\perp$ der zum Vektorraum von g komplementäre Vektorraum und $e\in g^\perp$ ist mit dem konstanten Vektorfeld, das e auf R^n definiert, identifiziert. Nach Satz 2.3 ist

$$\int\limits_N d\omega = \frac{\binom{n}{k+1}}{O_{n,\,k+1}} \int\limits_{O(n,\,n-k-1)} \sum_{p\in g\cap N} s(p,g)\langle V(g), d\omega\rangle_p\,\mu_{n,\,n-k-1}(dg).$$

Falls wir noch zeigen, daß mit einer Konstanten c gilt

$$\langle V(g), d\omega\rangle = c \int\limits_{S_1(g^\perp)} e\langle V(g)\llcorner e,\omega\rangle\,\nu_{g^\perp,1}(de),$$

ist die Stokesformel bewiesen. Hierbei muß

$$c = \frac{\binom{n}{k}(n-k)}{O_{n,k}\,O_{n-k}}\;\frac{O_{n,\,k+1}}{\binom{n}{k+1}} = \frac{k+1}{O_{k+1}}$$

sein. Wir beweisen dazu das folgende

Lemma 4.2. Es sei ω eine C^1 — Differentialform $(n-1)$-ten Grades in R^n, S^{n-1} die $(n-1)$ — Sphäre in R^n, O_n ihr $(n-1)$ — dimensionales Volumen, ν ihr Volumenelement. Ist $W\in\tilde{\bigwedge} R^n$, so gilt

$$\frac{n}{O_n}\int\limits_{S^{n-1}} e\langle W\llcorner e,\omega\rangle\,\nu(de) = \langle W, d\omega\rangle.$$

Beweis. Sei τ das Volumenelement des R^n. Wir können ohne Einschränkung annehmen, daß $\langle W,\tau\rangle = 1$ ist. Dann lautet die Behauptung

$$\frac{n}{O_n}\int\limits_{S^{n-1}} e\langle * e,\omega\rangle\,\nu(de) = *\,d\omega.$$

Wir betrachten die Abbildung

$$\varphi:\omega \mapsto \frac{n}{O_n}\Bigl(\int\limits_{S^{n-1}} e\langle *e,\omega\rangle\,\nu(\mathrm{de})\Bigr)\tau.$$

φ ordnet jeder C^1 — Differentialform $(n-1)$ — ten Grades eine C^∞-Form n-ten Grades zu. Offenbar ist φ R-linear. Ist f eine C^1 — Funktion, so gilt

$$\varphi(f\omega) = f\varphi(\omega) + \frac{n}{O_n}\Bigl(\int\limits_{S^{n-1}} \langle e, df\rangle\langle * e,\omega\rangle\,\nu(de)\Bigr)\tau.$$

Wie beim Beweis des Satzes 2.3 ergibt sich, daß für $x, y\in R^n$ gilt

$$\int_{S^{n-1}} (e|x)\,(e|y)\,\nu\,(de) = \frac{O_n}{n}\,(x|y).$$

Da $(df|\ *^{-1}\omega)\,\tau = (*\ df|\omega)\,\tau = (W \llcorner\ df|\omega)\tau\ = (W|df \wedge \omega)\,\tau = df \wedge \omega$ ist, folgt

$$\varphi\,(f\varphi) = f\varphi\,(\omega) + df \wedge \omega. \tag{1}$$

Für $\omega^i = dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^i \cdots \wedge dx^n$ ist

$$\langle *\ e, \omega^i \rangle = \langle e,\ *^{-1}\omega^i \rangle = \langle e,\ (-1)^{i-1} dx^i \rangle = (-1)^{i-1}\,(e|\mathfrak{n}_i),$$

also konstant. Daher ist

$$\varphi\,(\omega^i) = o. \tag{2}$$

Die einzige R-lineare Abbildung von $(n$-$1)$-Formen auf n-Formen, die (1) und (2) erfüllt, ist die äußere Differentiation. Daher ist $\varphi\,(\omega) = r\omega$. q. e. d.

Damit ist der Beweis der Stokesformel vollendet, falls wir noch zeigen, daß die Dichten $\mu_{E,\,k,\,l}$ und $\mu'_{E,\,k,\,l}$ auf $G\,(E,\ k,\ l)$ tatsächlich übereinstimmen, wie wir oben behauptet haben. Das soll im nächsten Paragraphen geschehen. Wir stellen die Voraussetzungen, unter denen die Stokesformel bewiesen wurde, noch einmal zusammen.

Satz 4.3. Es sei N eine orientierte $(k+1)$-dimensionale C^1—Untermannigfaltigkeit des R^n, ∂N ihr orientierter Rand. Ist ω eine C^1-Differentialform vom Grade k auf R^n, so gilt die Stokesformel

$$\int_{\partial N} \omega = \int_N d\omega.$$

§ 5. Vergleich der Dichten auf $G(E,\ k,\ l)$

Will man den Satz benutzen, daß auf einem homogenen Raum höchstens ein invariantes Maß existiert, so kann man, um die Gleichheit der Dichten $\mu_{E,\,k,\,l}$ und $\mu'_{E,\,k,\,l}$ zu zeigen, folgendermaßen vorgehen. Setzt man nur voraus, daß mit einer Konstanten $c > 0$ gilt $\mu_{E,\,k,\,l} = c \cdot \mu'_{E,\,k,\,l}$, so liefert die integralgeometrische Methode des § 4 die Stokesformer nur bis auf die Konstante c. Diese kann man aus einer speziellen Situation (etwa durch Integration über eine Sphäre) zu 1 bestimmen.

Wir wollen jedoch den allgemeinen Satz vermeiden und die Gleichheit der beiden Dichten direkt zeigen. Sei dazu zunächst $V_n\,(\mathfrak{E})$ die Stiefel—Mannigfaltigkeit der positiven orthonormierten n-Beine von $\mathfrak{E}$. Wir betrachten das Bündel

$$\begin{array}{c} E \times V_n\,(\mathfrak{E}) \\ \downarrow \pi' \\ E \times S_k(\mathfrak{E}) \end{array}$$

mit $\pi'(p, e_1, \cdots, e_n) := (p, e_1 \wedge \cdots \wedge e_k)$. π' ist mit der Operation der Bewegungsgruppe von E verträglich. $E \times V_n(\epsilon)$ kann mit der Bewegungsgruppe $iSO(n)$ identifiziert werden. Überträgt man die natürliche Basis der Maurer—Cartan—Formen von $iSO(n)$ auf $E \times V_n(\epsilon)$, so erhält man invariante Differentialformen ω_{ij}, die wie folgt definiert werden können. Es sei f_i diejenige Abbildung $E \times V_n(\epsilon) \to \epsilon$, die dem Element $(p, e_1, \cdots, e_n)$ den Vektor e_i zuordnet. Dann ist

$$\omega_{ij} = (df_i | f_j), \quad 1 \leqslant i < j \leqslant n,$$

$$\omega_{0j} = (dpr_1 | f_j), \quad 1 \leqslant j \leqslant n.$$

Hilfssatz 5.1. Sei $\widetilde{\Omega}_{E,k}$ die kanonische $(k+1)(n-k)$ — Form auf $E \times S_k(\epsilon)$. Dann gilt

$$\pi'^* \widetilde{\Omega}_{E,k} = \bigwedge_{i=0}^{k} \bigwedge_{j=k+1}^{n} \omega_{ij}.$$

Beweis. Da das Diagramm

$$\begin{tikzcd} E \times V_n(\epsilon) \arrow[r, "pr_2"] \arrow[d, "\pi'"'] & V_n(\epsilon) \arrow[d] \\ E \times S_k(\epsilon) \arrow[r, "pr_2"] & S_k(\epsilon) \end{tikzcd}$$

kommutiert, folgt aus der Definition von $\nu_{\epsilon,k}$

$$\pi'^* pr_2^* \nu_{\epsilon,k} = \bigwedge_{i=1}^{k} \bigwedge_{j=k+1}^{n} \omega_{ij} \qquad \text{(vgl. S. 3).}$$

Wir müssen daher noch $\pi'^* \alpha_{E,k} = \bigwedge_{j=k+1}^{n} \omega_{0j}$ zeigen.

Sei dazu $v = v_{k+1} \wedge \cdots \wedge v_n$ ein zerlegbarer $(n-k)$ — Tangentialvektor von $E \times V_n(\epsilon)$ im Punkt $(p, e_1, \cdots, e_n)$. Dann ist

$$\begin{aligned} \langle v, \pi'^* \alpha_{E,k} \rangle &= \langle \pi'_* v, \alpha_{E,k} \rangle = (pr_{1*} \pi'_* v | *(e_1 \wedge \cdots \wedge e_k)) = \\ &= (pr_{1*} v_{k+1} \wedge \cdots \wedge pr_{1*} v_n | *(e_1 \cdots e_k)) = \\ &= (v_{k+1}(pr_1) \wedge \cdots \wedge v_n(pr_1) | e_{k+1} \wedge \cdots \wedge e_n) = \\ &= \det\, (v_{k+i}(pr_1) | e_{k+j}) = \\ &= \det \langle v_{k+i}, (dpr_1 | e_{k+j}) \rangle = \\ &= \langle v, \bigwedge_{j=k+1}^{n} \omega_{0j} \rangle. \text{ q. e. d.} \end{aligned}$$

Wir betrachten jetzt die Bündel

$$\begin{tikzcd} G(E, k, l) \arrow[d, "pr_1"] & \text{und} & E \times V_n(\epsilon) \arrow[d, "\pi''"] \\ G(E, k) & & G(E, k, l) \end{tikzcd}$$

mit $\pi''(p, e_1, \cdots, e_n) := (p + \overline{e_1 \wedge \cdots \wedge e_k},\ p + \overline{e_1 \wedge \cdots \wedge e_l})$.

Die Dichte $\mu_{E,k,l}$ ist folgendermaßen definiert. Ist

$$\rho : pr_1^{-1}\, U \to U \times S_{l-k}(\mathbf{R}^{n-k})$$

eine lokale Trivialisierung eines differenzierbaren Bündelatlas von $G(E, k, l)$ über der offenen Menge $U \subset G(E, k)$, so gilt dort

$$\mu_{E,k,l} = |\rho^* (pr_1^* \Omega_{E,k} \wedge pr_2^* \nu_{n-k,\, l-k})|.$$

Wir behaupten

Hilfssatz 5.2. Es ist

$$(\pi'')^* \rho^* (pr_1^* \Omega_{E,k} \wedge pr_2^* \nu_{n-k,\, l-k}) = \bigwedge_{i=0}^{k} \bigwedge_{j=k+1}^{n} \omega_{ij} \wedge \bigwedge_{i=k+1}^{l} \bigwedge_{j=l+1}^{n} \omega_{ij}.$$

Beweis. Wir haben das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} E \times V_n(\mathfrak{E}) & \xrightarrow{\pi'} & E \times S_k(\mathfrak{E}) \\ \downarrow{\scriptstyle \pi''} & & \downarrow{\scriptstyle \pi} \\ G(E, k, l) & \xrightarrow[pr_1]{} & G(E, k) \end{array}$$

Da $pr_1 \circ \rho \circ \pi'' = pr \circ \pi'' = \pi \circ \pi'$ ist, folgt

$$(\pi'')^* \rho^* pr_1^* \Omega_{E,k} = (\pi')^* \tilde{\Omega}_{E,k} = \bigwedge_{i=0}^{k} \bigwedge_{j=k+1}^{n} \omega_{ij} \text{ über } U.$$

Sei $g \in U$ und F_g die Faser über g in $E \times V_n(\mathfrak{E})$. Dann ist $F_g = g \times V_k(g) \times V_{n-k}(g^\perp)$. Sei ι_g die Einbettung $F_g \hookrightarrow E \times V_n(\mathfrak{E})$. Es genügt dann zu zeigen, daß $(\pi'')^* \rho^* pr_2^* \nu_{n-k,\, l-k}$ und $\bigwedge_{i=k+1}^{l} \bigwedge_{j=l+1}^{n} \omega_{ij}$, eingeshränkt auf F_g, übereinstimmen. Denn die Differentialform $\bigwedge_{i=0}^{k} \bigwedge_{j=k+1}^{n} \omega_{ij}$ ist projizierbar, verschwindet also auf vertikalen Vektoren, und ihr Grad stimmt mit der Dimension des Basisraums $G(E, k)$ überein. Wir haben folgende Abbildungen

$$\begin{array}{ccc} F_g & \xrightarrow{\iota_g} & E \times V_n(\mathfrak{E}) \\ \downarrow{\scriptstyle pr_3} & & \downarrow{\scriptstyle \pi''} \\ V_{n-k}(g^\perp) & & G(E, k, l) \supset pr_1^{-1}\, U \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \rho} \\ S_{l-k}(g^\perp) & & \\ \downarrow & & \\ S_{l-k}(R^{n-k}) & \xleftarrow[pr_2]{} & U \times S_{l-k}(R^{n-k}). \end{array}$$

Es gibt einen Isomorphismus $g^\perp \to \mathbf{R}^{n-k}$, der einen Diffeomorphismus u_g: $S_{l-k}(g^\perp) \to S_{l-k}(\mathbf{R}^{n-k})$ induziert, welcher das Diagramm kommutativ macht. Daher ist

$$\iota_g^* (\pi'')^* \rho^* pr_2^* \nu_{n-k,\, l-k} = \iota_g^* \bigwedge_{i=k+1}^{l} \bigwedge_{j=l+1}^{n} \omega_{ij}. \quad \text{q. e. d.}$$

Wir behandeln jetzt auf ähnliche Weise die Dichte $\mu'_{E,\,k,\,l}$, die mit der Bündelstruktur

$$\begin{tikzcd} G(E, k, l) \arrow[d, "pr_2"'] \\ G(E, l) \end{tikzcd}$$

definiert ist. Ist

$$\rho\colon pr_2^{-1}\, U \to U \times G(l, k)$$

eine lokale Trivialisierung eines differenzierbaren Bündelatlas von $G(E, k, l)$ über $U \subset G(E, l)$, so ist dort

$$\mu'_{E,\,k,\,l} = |\rho^* (pr_1^* \Omega_{E,\,l} \wedge pr_2^* \Omega_{l,\,k}|).$$

Hilfssatz 5. 3. Es ist

$$(\pi'')^* \rho^* (pr_1^* \Omega_{E,\,l} \wedge pr_2^* \Omega_{l,\,k}) = \bigwedge_{i=0}^{l} \bigwedge_{j=l+1}^{n} \omega_{ij} \wedge \bigwedge_{i=0}^{k} \bigwedge_{j=k+1}^{l} \omega_{ij}.$$

Beweis. Aus dem kommutativen Diagramm

$$\begin{tikzcd} E \times V_n(\epsilon) \arrow[r, "\pi'"] \arrow[d, "\pi''"'] & E \times S_l(\epsilon) \arrow[d, "\pi"] \\ G(E, k, l) \arrow[r, "pr_2"'] & G(E, l) \end{tikzcd}$$

entnehmen wir zunächst $(\pi'')^* \rho^* pr_1^* \Omega_{E,\,l} = (\pi')^* \tilde{\Omega}_{E,\,l} = \bigwedge_{i=0}^{l} \bigwedge_{j=l+1}^{n} \omega_{ij}$ über U. Wie oben genügt es jetzt, einzusehen, daß $(\pi'')^* \rho^* pr_2^* \Omega_{l,\,k}$ und $\bigwedge_{i=0}^{k} \bigwedge_{j=k+1}^{l} \omega_{ij}$ auf vertikalen Vektoren übereinstimmen.

Ist $h \in U$ und F_h die Faser über h in $E \times V_n(\epsilon)$, so ist $F_h = h \times V_l(h) \times V_{n-l}(h^\perp)$. Sei ι_h die Einbettung $F_h \hookrightarrow E \times V_n(\epsilon)$. Wir haben nun folgende Abbildungen

$$\begin{tikzcd} F_h \arrow[r, "\iota_h"] \arrow[d] & E \times V_n(\epsilon) \arrow[d, "\pi''"] \\ h \times V_l(h) \arrow[d] & G(E, k, l) \supset pr_2^{-1} U \arrow[dd, "\rho"] \\ G(h, k) \arrow[d] & \\ G(l, k) & U \times G(l, k) \arrow[l, "pr_2"] \end{tikzcd}$$

Mit einem Isomorphismus $h \to \mathbf{R}^l$, der einen passenden Diffeomorphismus u_h: $G(h, k) \to G(l, k)$ liefert, folgt dann die Behauptung. q. e. d.

S a t z 5.4. Die Dichten $\mu_{E,k,l}$ und $\mu'_{E,k,l}$ auf $G(E, k, l)$ stimmen überein.

B e w e i s. Die Dichten $\mu_{E,k,l}$ und $\mu'_{E,k,l}$ sind durch Differentialformen auf $G(E, k, l)$ definiert, deren Liftungen nach $E \times V_n(\varepsilon)$ bis auf ein Vorzeichen übereinstimmen. Daher ist $\mu_{E,k,l} = \mu'_{E,k,l}$. q. e. d.

Wir haben in Satz 2.3 das Volumen $O_{n,k}$ der orientierten Grassmannmannigfaltigkeit $S_k(\mathrm{R}^n)$ benutzt. Man braucht jedoch die Kenntnis von $O_{n,k}$ nicht vorauszusetzen. Denn der Beweis der Stokesformel liefert (vgl. S. 11) die Gleichung

$$O_{n,k+1} = O_{n,k} \frac{O_{n-k}}{O_{k+1}}. \tag{5.5}$$

Dafür wird nur die Gültigkeit der Stokesformel in einem Spezialfall benötigt. Aus (5.5). folgt sofort für $1 < k < n$

$$O_{n,k} = \frac{O_n \cdots O_{n-k+1}}{O_2 \cdots O_k}.$$

Mathematisches Institut der
Universität Göttingen

Поступило 5.X.1969

Կ. ԽՈՐՆԵՖՖԵՐ. Կրոֆտոնի բանաձևը և Ստոքսի թեորեմը *(ամփոփում)*

Աշխատանքում ստացված է Կրոֆտոնի կլասիկ (1) բանաձևի անալոգը ենթաբազմաձևություններով դիֆերենցիալ ֆորմերի ինտեգրալների համար։ Այդ արդյունքի օգնությամբ տրվում է Ստոքսի բանաձևի ինտեգրալ-երկրաչափական ապացույց։

К. ХОРНЕФФЕР. *Формула Крофтона и теорема Стокса*

В работе получен аналог классической формулы Крофтона (1) для интегралов от дифференциальных форм по C^1 — подмногообразиям в R^n. С помощью этого результата дается интегрально-геометрическое доказательство формулы Стокса.

LITERATUR

1. *Bourbaki N.* Eléments de mathématique, Algèbre, Chap. III. Paris, 1958.
2. *Dombrowski H. D., u. Horneffer K.* Die Differentialgeometrie des Galileischen Relativitätsprinzips. Math. Zeitschr. 86 (1964), 291—311.
3. *Federer H.* Geometric Measure Theory. Berlin—Heidelberg—New York, 1969.
4. *Maak K.* Oberflächenintegral und Stokesformel im gewöhnlichen Raume. Math. Ann. 116 (1939), 574—597.
5. *Sternberg S.* Lectures on Differential Geometry. Prentice—Hall, 1964.