ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա 2, № 2, 1967 Математика

Л. А. МАТЕВОСЯН

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ В ПРИВОДИМЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

В работе [1] изучена поверхность X_m в приводимом пространстве V_n в том случае, когда базовые многообразия поверхности M_{m_1} и M_{m_2} расслаиваются так, что M_{m_1} покрывается однократно m_1+m_2-m-параметрическим семейством слоев M_{m-m_2}, а M_{m_2} покрывается однократно семейством слоев M_{m-m_1}, соответствующих слоям M_{m-m_2}.

В настоящей работе рассматривается поверхность X_m, для которой слои M_{m-m_2} и M_{m-m_1} вырождаются в точки, то есть для которой $m-m_2=0$, $m-m_1=0$. Поверхность X_m характерна тем, что существует взаимно однозначное соответствие между ее проекциями $'X_m$ и $'\overline{X}_m$, она обладает рядом интересных свойств, зависящих от свойств этого соответствия.

Изучим свойства поверхности X_m при некоторых соответствиях между проекциями.

1. Формулы, выражающие связь между основными величинами поверхности X_m и ее проекций $'X_m$, $'\overline{X}_m$, получим из соответствующих формул, доказанных в работе [1], предполагая $m_1=m_2=m$.

Сохраняя обозначения, введенные в работе [1], запишем эти формулы:

$$g_{\sigma\mu} = {}'g_{\sigma\mu} + {}'\overline{g}_{\sigma\mu}, \tag{1.1}$$

$$\overset{t_1}{b}_{\rho\sigma} = {}'\overset{t_1}{b}_{\rho\sigma}, \tag{1.2}$$

$$\overset{t_2}{b}_{\rho\sigma} = {}'\overline{\overset{t_2}{b}}_{\rho\sigma}, \tag{1.3}$$

$$\underset{s}{b}_{\rho\sigma} = T^{\tau}_{\rho\sigma}\, {}'g_{\tau\mu} \underset{s}{\lambda}^{\mu}, \tag{1.4}$$

$$\overset{t_1}{\underset{\cdot s_1}{n}}{}_{\rho} = {}'\overset{t_1}{\underset{\cdot s_1}{n}}{}_{\rho}, \tag{1.5}$$

$$\overset{t_2}{\underset{\cdot s_1}{n}}{}_{\rho} = 0, \tag{1.6}$$

$$\overset{t_2}{\underset{\cdot s_2}{n}}{}_{\rho} = {}'\overline{\overset{t_2}{\underset{\cdot s_2}{n}}}{}_{\rho}, \tag{1.7}$$

$$\overset{t_1}{\underset{\cdot s}{n}}{}_{\rho} = {}'\overset{t_1}{b}_{\rho\sigma} \underset{s}{\lambda}^{\sigma}, \tag{1.8}$$

$$\overset{t_2}{\underset{\cdot s}{n}}{}_{\rho} = {}'\overline{\overset{t_2}{b}}_{\rho\sigma} \underset{s}{\overline{\lambda}}^{\sigma}, \tag{1.9}$$

$$\underset{ps}{n_\rho} = {}'g_{\sigma\mu}\underset{p}{\lambda^\mu}\,{}'\Gamma_\rho\underset{s}{\lambda^\sigma} + {}'\overline{g}_{\sigma\mu}\underset{p}{\overline{\lambda}^\mu}\,{}'\dot{\overline{\Gamma}}_\rho\underset{s}{\overline{\lambda}^\mu}, \tag{1.10}$$

$$\rho, \sigma, \tau, \mu = 1, 2, \cdots, m, \; s_1 = 1, 2, \cdots, n_1 - m, \; s = n_1 - m + 1, \cdots, n_1,$$

$$s_2 = n_1 + 1, \cdots, n - m,$$

где $T^{\cdot}_{\rho\sigma}$ — тензор аффинной деформации $'X_m$ и $'\overline{X}_m$, а векторы $\underset{s}{\lambda^\mu}$ и $\underset{s}{\overline{\lambda}^\mu}$ определяются уравнениями

$$\underset{s}{\lambda^\sigma}\,{}'g_{\sigma\mu} + \underset{s}{\overline{\lambda}^\sigma}\,{}'\overline{g}_{\sigma\mu} = 0, \tag{1.11}$$

$$\underset{s}{\lambda^\sigma}\underset{t}{\lambda^\mu}\,{}'g_{\sigma\mu} + \underset{s}{\overline{\lambda}^\sigma}\underset{t}{\overline{\lambda}^\mu}\,{}'\overline{g}_{\sigma\mu} = g_{st}. \tag{1.12}$$

Геометрически ясно, что если изменяется только соответствие между проекциями $'X_m$ и $'\overline{X}_m$, то X_m изменяется в V_n, оставаясь все время в подпространстве V_{2m} пространства V_n, являющемся топологическим произведением этих проекций. Имея это в виду, рассмотрим некоторые свойства поверхности X_m в пространстве V_{2m} при данных соответствиях между $'X_m$ и $'\overline{X}_m$, а именно: при аффинном, конформном и проективном соответствиях.

Основные величины X_m в V_{2m} определяются по формулам (1.1), (1.4), (1.10), где векторы $\underset{s}{\lambda^\mu}$ и $\underset{s}{\overline{\lambda}^\mu}$ определяются формулами (1.11), и (1.12). Из (1.11) и (1.12) получим

$$-\underset{s}{\lambda^\sigma}\underset{t}{\overline{\lambda}^\mu}\,{}'\overline{g}_{\sigma\mu} - \underset{s}{\overline{\lambda}^\sigma}\underset{t}{\lambda^\mu}\,{}'g_{\sigma\mu} = g_{st}$$

или, используя (1.1), имеем

$$-\underset{s}{\lambda^\sigma}\underset{t}{\overline{\lambda}^\mu}\,g_{\sigma\mu} = g_{st}, \tag{1.13}$$

откуда следует, что репер $\underset{s}{\overline{\lambda}^\mu}$ есть взаимный репер репера $\underset{s}{\lambda^\mu}$ на поверхности X_m. Соотношение (1.13) можно записать еще в виде

$$\underset{s}{\lambda^\sigma}\,\overset{s}{\overline{\lambda}^\mu} = -g^{\sigma\mu}. \tag{1.14}$$

2. Предположим, что соответствие между проекциями аффинное, т. е.

$$T^{\cdot}_{\rho\sigma} = 0. \tag{2.1}$$

Из (1.4), используя (2.1), получим $\underset{s}{b_{\rho\sigma}} = 0$, т. е. X_m является вполне геодезической поверхностью (ср. [3], стр. 222).

И наоборот, если $\underset{s}{b_{\rho\sigma}} = 0$, то из (1.4), используя то обстоятельство, что векторы $\underset{s}{\lambda^\sigma}$ независимы, следует (2.1).

Таким образом, доказана следующая теорема: *для того чтобы поверхность была вполне геодезической необходимо и достаточно, чтобы связности ее проекций совпадали.*

3. Предположим, что соответствие между проекциями конформное, то есть

$$'\overline{g}_{\rho\sigma} = \lambda' g_{\rho\sigma}. \tag{3.1}$$

Согласно (3.1) и (1.11) из (1.13) получим

$$\underset{s}{\lambda^{\sigma}} \underset{t}{\lambda^{\mu}}\, 'g_{\sigma\mu} = \lambda g_{st}, \tag{3.2}$$

т. е. на поверхности X_m $\underset{s}{\lambda^{\sigma}}$ есть ортогональный репер, состоящий из векторов одинаковой длины $\sqrt{\lambda}$.

Тензор аффинной деформации имеет вид (см. [2], стр. 166)

$$T^{\tau}_{\rho\sigma} = p_{\rho}\,\delta^{\tau}_{\sigma} + p_{\sigma}\delta^{\tau}_{\rho} - 'g^{\tau\mu} p_{\mu}\, 'g_{\rho\sigma},$$

где

$$p_{\sigma} = \frac{1}{2}\,\partial_{\sigma} \ln \lambda.$$

Вторые тензоры, определяемые по формуле (1.4), примут вид

$$\underset{s}{b}_{\rho\sigma} = \frac{1}{1+\lambda}\left(p_{\rho}\, g_{\sigma\mu} + p_{\sigma} g_{\rho\mu} - p_{\mu} g_{\rho\sigma}\right) \underset{s}{\lambda^{\mu}}. \tag{3.3}$$

Рассмотрим асимптотические линии поверхности X_m. Они определяются из уравнения (см. [3], стр. 201)

$$\underset{s}{b}_{\rho\sigma} \overset{s}{b}_{\varkappa\omega}\, du^{\rho}\, du^{\sigma}\, du^{\varkappa}\, du^{\omega} = 0. \tag{3.4}$$

Подставляя в (3.4) выражение $\underset{s}{b}_{\rho\sigma}$ из (3.3) и используя (1.11) и (1.14), получим

$$(g^{\mu\varkappa} p_{\mu} p_{\varkappa})\,(g_{\rho\sigma}\, du^{\rho}\, du^{\sigma}) = 0. \tag{3.5}$$

Предположим, что $g^{\mu\varkappa} p_{\mu} p_{\varkappa} \neq 0$, т. к. в противном случае $\lambda = \text{const}$ и соответствие аффинное, рассмотренное в пункте 2. В силу этого предположения из (3.5) получим

$$g_{\rho\sigma}\, du^{\rho}\, du^{\sigma} = 0,$$

откуда вытекает, что *асимптотические линии изотропны.*

Рассмотрим линии кривизны поверхности X_m.

Уравнение линии кривизны для данной нормали имеет вид (см. [3], стр. 203)

$$(\underset{s}{b}_{\rho\sigma} + \underset{s}{K} g_{\rho\sigma})\, du^{\rho} = 0, \tag{3.6}$$

где $\underset{s}{K}$ — корни уравнения

$$\left| \underset{s}{b}_{\rho\sigma} + \underset{s}{K} g_{\rho\sigma} \right| = 0. \tag{3.7}$$

Подставляя в (3.7) выражение $\underset{s}{b}_{\rho\sigma}$ из (3.3), для корней этого уравнения получим следующие выражения:

$$\underset{s}{K}_{1,2} = \pm \frac{\Pi}{1+\lambda} \sqrt{\lambda}, \quad \underset{s}{K}_{3,4,\dots,m} = \frac{1}{1+\lambda}\, p_{\mu} \underset{s}{\lambda^{\mu}}, \tag{3.8}$$

где
$$\Pi^2 = g^{\mu\pi} p_\mu p_\pi.$$

Таким образом, *для данной нормали на поверхности существует многообразие $m-2$ измерений $\underset{s}{M}_{m-2}$, все направления которого есть главные направления для этой нормали.*

Изучим расположение многообразий $\underset{s}{M}_{m-2}$ на поверхности X_m. Подставляя в (3.6) выражение $\underset{s}{b}_{\rho\sigma}$ из (3.3) и $\underset{s}{K}$ из (3.8), получим уравнение линий кривизны данной нормали, соответствующих кратным корням, в следующем виде:
$$(p_\rho g_{\sigma\mu} + p_\sigma g_{\rho\mu}) \underset{s}{\lambda}{}^\mu du^\rho = 0. \tag{3.9}$$

Свертывая (3.9) с du^σ, получим
$$(p_\rho du^\rho)(g_{\sigma\mu} \underset{s}{\lambda}{}^\mu du^\sigma) = 0. \tag{3.10}$$

Из (3.10) следует, что по крайней мере один из сомножителей равен нулю, а из (3.9) следует, что в этом случае оба они равны нулю
$$p_\rho\, du^\rho = 0, \tag{3.11}$$
$$g_{\sigma\mu} \underset{s}{\lambda}{}^\mu du^\sigma = 0. \tag{3.12}$$

Из (3.11) и (3.12) вытекает, что многообразия $\underset{s}{M}_{m-2}$ лежат на поверхности уровня функции p — потенциала вектора конформного преобразования, именно: их касательные плоскости являются пересечениями касательной плоскости этой поверхности с гиперплоскостями $\underset{s}{\Pi}_{m-1}$ пространства X_m, которые ортогональны векторам репера $\underset{s}{\lambda}{}^\sigma$ соответственно.

Второй тензор $b_{\rho\sigma}$, соответствующий средней нормали, определяется из условия (см. [8], стр. 205)
$$M b_{\rho\sigma} = \overset{s}{b}_{\rho\sigma} \underset{s}{b}_{\varkappa\omega}\, g^{\varkappa\omega}, \tag{3.13}$$
где M есть средняя кривизна поверхности X_m, т. е.
$$M^2 = \overset{s}{b}_{\rho\sigma} \underset{s}{b}_{\varkappa\omega}\, g^{\rho\sigma} g^{\varkappa\omega}. \tag{3.14}$$

Подставляя в (3.14) выражение $\underset{s}{b}_{\rho\sigma}$ из (3.3), получим
$$M = \frac{2-m}{1+\lambda} \Pi \sqrt{\lambda}. \tag{3.15}$$

Поверхность будет минимальной, если ее средняя кривизна равна нулю (см. [3], стр. 213). Из (3.15) следует, что это имеет место тогда и только тогда, когда $m=2$. Таким образом, приходим к выводу: *поверхность X_2 в Y_4 является минимальной.*

Подставляя в (3.13) выражение M из (3.15) и $\underset{s}{b}_{\rho\sigma}$ — из (3.3), получим

$$b_{\rho\sigma} = \frac{\sqrt{\lambda}}{(1+\lambda)\,\Pi}\,(2p_\rho p_\sigma - \Pi^2 g_{\rho\sigma}).$$

Подставляя затем значение $b_{\rho\sigma}$ в уравнение $|b_{\rho\sigma} + Kg_{\rho\sigma}| = 0$, для его корней получим

$$K_1 = 0;\ K_{2,3,\cdots,m} = \frac{\Pi}{1+\lambda}\sqrt{\lambda}$$

и уравнения линий кривизны для средней нормали, соответствующих кратным корням, будут

$$p_\rho\, p_\sigma\, du^\sigma = 0. \tag{3.16}$$

Так как все p_ρ одновременно не равны нулю, то из (3.16) получим

$$p_\sigma\, du^\sigma = 0.$$

Таким образом, приходим к выводу: *все линии на поверхности уровня функции p есть линии кривизны для средней нормали.*

Поверхность уровня функции p имеет $m+1$ нормалей в пространстве V_{2m}, из которых m нормалей общие с нормалями поверхности X_m, а одна есть нормаль этой поверхности в пространстве X_m. Вторые тензоры, соответствующие общим нормалям, определяются из соотношения (см. [3], стр. 236)

$$\underset{s}{b_{ij}} = \underset{s}{b_{\rho\sigma}}\,\xi^\rho_i\,\xi^\sigma_j, \tag{3.17}$$

где $\xi^\rho_i = \dfrac{du^\rho}{du^i}$, а u^i $(i, j = 1, 2, \cdots, m-1)$ — криволинейные координаты этой поверхности.

Нужно отметить, что формула (3.17) ([3], стр. 236) имеет место для поверхности пространства Y_m, вложенного в плоское пространство S_n, и легко проверить, что она верна и для поверхности пространства Y_m, вложенного в пространство Y_n.

Подставляя в (3.17) выражение $\underset{s}{b_{\rho\sigma}}$ из (3.3) и имея в виду, что вдоль этой поверхности $p_\sigma \xi^\sigma_i = 0$, получим

$$\underset{s}{b_{ij}} = -\frac{1}{1+\lambda}\,p_\mu \underset{s}{\lambda^\mu}\, g_{ij},$$

где g_{ij} — метрический тензор этой поверхности.

Таким образом, рассматривая поверхность $p = \text{const}$ как подпространство пространства X_m, вложенного в пространство Y_{2m}, получим, *что все направления поверхности уровня функции p являются главными направлениями этой поверхности относительно любой общей нормали.*

Нужно отметить, что отсюда не следует, что все эти направления являются главными направлениями и для поверхности X_m относительно данной нормали. Действительно, главные направления поверхности уровня функции p относительно данной общей нормали удовлетворяют уравнению

$$(\underset{s}{b}_{ij} + \underset{s}{K} g_{ij})\, du^i = 0;$$

подставляя сюда $g_{ij} = g_{\rho\sigma} \xi^\rho_i \xi^\sigma_j$ и выражение $\underset{s}{b}_{ij}$ из (3.17), получим

$$(\underset{s}{b}_{\rho\sigma} + \underset{s}{K} g_{\rho\sigma}) \xi^\sigma_j\, du^\rho = 0,$$

откуда не следует, что

$$(\underset{s}{b}_{\rho\sigma} + \underset{s}{K} g_{\rho\sigma})\, du^\rho = 0.$$

4. Предположим, что соответствие между проекциями проективное. Тензор аффинной деформации имеет вид ([2] стр. 171)

$$T^\tau_{\rho\sigma} = p_\rho\, \delta^\tau_\sigma + p_\sigma \delta^\tau_\rho.$$

Вторые тензоры, определяемые по формуле (1.4), примут вид

$$\underset{s}{b}_{\rho\sigma} = (p_\rho{}' g_{\sigma\mu} + p_\sigma{}' g_{\rho\mu}) \underset{s}{\lambda}^\mu. \tag{4.1}$$

Подставляя в (3.4) выражение для $\underset{s}{b}_{\rho\sigma}$ из (4.1), получим уравнения асимптотических линий в виде

$$(p_\alpha\, du^\alpha)\, (g^{\mu\kappa}{}' g_{\mu\sigma}{}' \bar{g}_{\kappa\rho}\, du^\sigma du^\rho) = 0.$$

Значит есть два семейства асимптотических линий. Любая линия одного семейства содержится на поверхности уровня функции p — потенциала вектора проективного преобразования и наоборот, линии же другого семейства касаются конуса второго порядка специального вида

$$g^{\mu\kappa}{}' g_{\mu\sigma}{}' \bar{g}_{\rho\kappa}\, du^\sigma du^\rho = 0.$$

Рассуждая аналогично, как и для конформного преобразования, для корней уравнения (3.7) получим следующие выражения:

$$\underset{s}{K}_{1,2} = -g^{\mu\kappa} p_\mu{}' g_{\kappa\sigma} \pm \pi \sqrt{g^{\kappa\omega}{}' g_{\kappa\rho}{}' g_{\omega\sigma} \underset{s}{\lambda}^\rho \underset{s}{\lambda}^\sigma}\,; \quad \underset{s}{K}\ 3, 4, \cdots, m = 0. \tag{4.2}$$

Таким образом, *для данной нормали на поверхности существует многообразие $m-2$ измерений, все направления которого есть главные направления для этой нормали.*

Подставляя выражение для $\underset{s}{b}_{\rho\sigma}$ из (4.1) и $\underset{s}{K}$—из (4.2) в (3.6), уравнения линий кривизны данной нормали, соответствующих кратным корням, примут вид

$$(p_\rho{}' g_{\sigma\mu} + p_\sigma{}' g_{\rho\mu}) \underset{s}{\lambda}^\mu du^\rho = 0.$$

Рассуждая аналогично как и в случае, когда преобразование конформно, получим:

$$p_\rho\, du^\rho = 0 \tag{4.3}$$

и

$${}' g_{\sigma\mu} \underset{s}{\lambda}^\mu\, du^\sigma = 0. \tag{4.4}$$

Из (4.3) и (4.4) следует, что многообразия $\underset{s}{M}_{m-2}$ лежат на поверхности уровня функции p, именно: их касательные плоскости являются пересечениями касательной плоскости этой поверхности с гиперплоскостями $\underset{s}{\Pi}_{m-1}$ пространства X_m, соответствующим гиперплоскостям $'\underset{s}{\Pi}_{m-1}$ пространства $'X_m$, которые ортогональны векторам репера $\underset{s}{\lambda'}$.

Рассмотрим поверхность $p = \text{const}$ как подпространство пространства X_m, вложенное в V_{2m}. Вторые тензоры, соответствующие общим нормалям, определяются по формуле (1.4). Рассуждая так же, как и в случае, когда преобразование конформно, получим

$$\underset{s}{b}_{ij} = 0.$$

Это означает, что *все направления поверхности уровня функции p являются главными направлениями этой поверхности относительно любой общей нормали.*

Казанский государственный
университет

Поступило 7.IV.66

Լ. Ա. ՄԱԹԵՎՈՍՅԱՆ

ՄԱԿԵՐԵՎՈՒՅԹՆԵՐԻ ՄԻ ԴԱՍԻ ՄԱՍԻՆ ԲԵՐՎԱԾ ՏԱՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՄԵՋ

Ամփոփում

Ներկա աշխատանքում դիտարկում ենք ռիմանյան բերված տարածության մեջ այնպիսի մակերևույթ, որի պրոեկցիաների միջև գոյություն ունի փոխմիարժեք համապատասխանություն։ Մանրամասն ուսումնասիրված է մակերևույթի հատկություններն այն դեպքերում, երբ այդ համապատասխանությունն աֆֆինական է, կոնֆորմ կամ պրոեկտիվ։

L. A. MATEVOSIAN

ON A CLASS OF SURFACES IN REDUCED SPACES

Summary

Surfaces in reduced Rieman space are considered.

The cases of affine, conform and projective correspondence between the projections are studied in detail.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Л. А. Матевосян.* О поверхностях в приводимых пространствах, Известия АН Арм.ССР, Математика, 1, № 6 (1966).
2. *А. П. Норден.* Пространства аффинной связанности, М. Л., Гос. изд. техн.-теорет. лит. (1950).
3. *Л. П. Эйзенхарт.* Риманова геометрия, Москва, Гос. изд. иностр. лит-ры (1948).